Matemáticas II

CURSO 2025-2026 | Parcial | 1º ING. QUÍMICA

Utiliza solo las hojas del examen para escribir tu respuesta en bolígrafo.

1) (2 puntos) Da una ecuación diferencial ordinaria (donde aparezca la derivada de la función) y resuélvela. Da una condición inicial y encuentra su solución particular.

- Podemos dar un ejemplo muy sencillo, como

$$y'(t) = 0.$$

O, por ejemplo,

$$y'(t) = y(t).$$

- La solución general de $y'(t)=0$ es

$$y(t) = C.$$

La solución general de $y'(t)=y(t)$ es

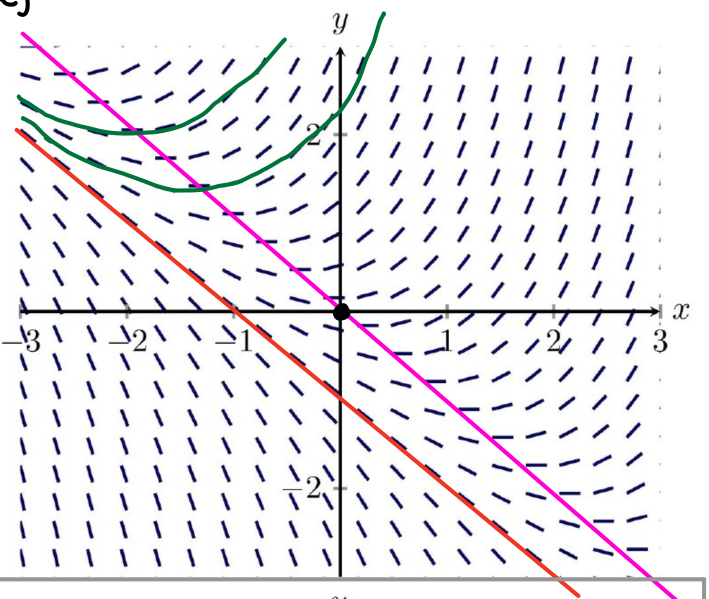
$$y(t) = Ce^{t}.$$

- Un posible PVI es $\begin{cases} y'(t)=0 \\ y(0)=0 \end{cases}$, con solución $y(t)=0$.

Otro posible PVI es $\begin{cases} y'(t)=y(t) \\ y(0)=1 \end{cases}$, con solución $y(t)=e^{t}$.

2) (2,75 puntos) Dibuja aproximadamente, sobre estos campos de pendientes, 2 isoclinas y 2 soluciones indicando cuál es cuál. Si es posible, da la recta de fase de las EDOs asociadas e identifica los puntos de equilibrio. De forma **RAZONADA** pero concisa (sin razonamiento se evaluará esa parte de la respuesta como si se dejase en blanco).

(a)



Isoclina 1: $y=-x-1$

Isoclina 2: $y=-x$

[Cualquier recta paralela a éstas es isoclina]

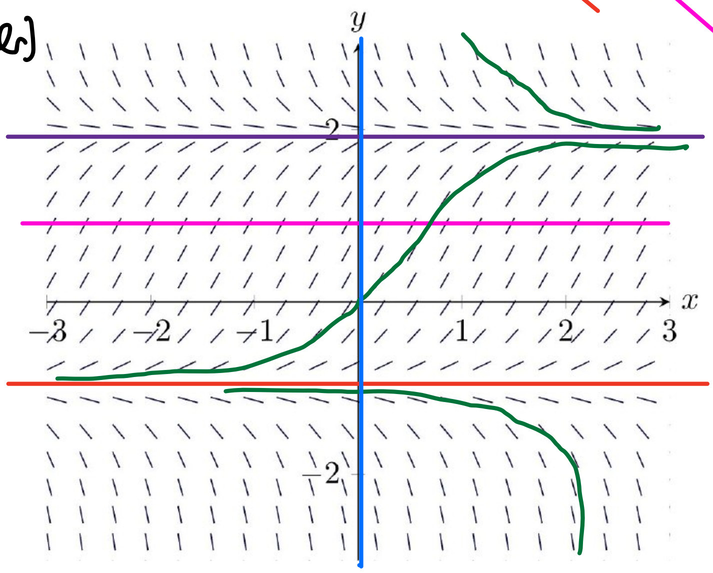
Solución 1.

Solución 2.

El sistema no es autónomo porque la pendiente depende de x, no sólo de y.

↳ No hay recta de fases ni puntos de eq.

(b)



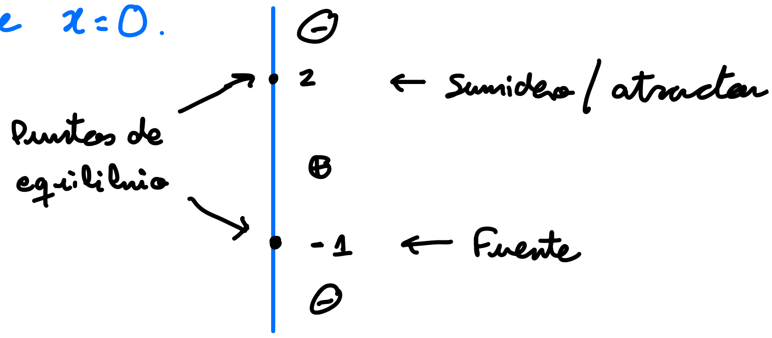
Isoclina 1: $y=-1$

Isoclina 2: $y=1$

[Todas las rectas horizontales $(y=c)$ son isoclinas] → Sistema autónomo.

Soluciones.

Recta de fase $x=0$.



3) (2,75 puntos) Utilica el método de Euler con 3 pasos para aproximar la solución de la EDO

$$y' + ty + t^2 = 0$$

que tiene condición inicial $y(4) = 5$ en el punto $t = 7$. Si no sabes calcular alguna operación, puedes dejarla indicada.

Tenemos: $t_0 = 4$, $y_0 = 5$, $t_3 = 7$, $h = \frac{t_3 - t_0}{3} = 1$. $f(t,y) = -ty - t^2$.

Paso (i)	$t_i = t_{i-1} + h$	$\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + f(t_{i-1}, \tilde{y}_{i-1}) \cdot h$
0	$t_0 = 4$	$\tilde{y}_0 = y_0 = 5$
1	$t_1 = 5$	$\tilde{y}_1 = 5 + (-4 \cdot 5 - 4^2) = -31$
2	$t_2 = 6$	$\tilde{y}_2 = -31 + (-5 \cdot 31 - 5^2) = 99$
3	$t_3 = 7$	$\boxed{\tilde{y}_3 = 99 + (-6 \cdot 99 - 6^2) = -531}$

Aproximamos: $y(7) = -531$.

4) (2,5 puntos) Encuentra de forma **RAZONADA** dos soluciones del tipo $y(t) = t + C$ que satisfagan la EDO $y' = y^2 - 2ty + t^2$. Dibuja sus gráficas. Esta EDO no es separable, pero explica, de forma **RAZONADA**, qué ocurre con la gráfica de la solución que cumple $y(0,5) = 0,5$. Sin razonamiento se evaluará esa parte de la respuesta como si se dejase en blanco.

- Conviene reescribir $y' = y^2 - 2ty + t^2$

  como $y' = (y-t)^2$.

- Buscamos $y = t + C$ tal que $y' = (y-t)^2$.

  Sustituyendo: $(t+C)' = [(t+C) - t]^2$

  $$1 = C^2$$

  $$C = \pm 1.$$

  Hallamos las soluciones: $\boxed{y(t) = t+1, \quad y(t) = t-1}$.

- Por el teorema de esxistencia y unicidad, la gráfica de tal $y(t)$ debe estar contenida en la banda delimitada por las rectas $y = t+1$, $y = t-1$. Gráficamente: