

SISTEMAS DE EDOS

GUILLERMO GALLEGO

1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

1.1. Un *sistema de EDOs*¹ es un par de ecuaciones diferenciales de la forma

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t). \end{cases}$$

Aquí, x e y son funciones en t , y a , b , c y d son números reales.

1.2. Notación matricial. Vamos a denotar,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Nos damos cuenta de que podemos reescribir el sistema (1) como

$$(2) \quad X'(t) = AX(t).$$

1.3. Ejemplo. Podemos considerar el siguiente sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t). \end{cases}$$

En este caso,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.4. Observación. Si tenemos una EDO de orden 2 de la forma

$$x''(t) - ax'(t) - bx(t) = 0,$$

podemos definir $y(t) = x'(t)$, y por tanto $y'(t) = x''(t)$. Tenemos entonces que la ecuación anterior es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = bx(t) + ay(t). \end{cases}$$

1.5. Un *problema de valor inicial* para el sistema (1) tiene la forma

$$(3) \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t). \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

O, más corto,

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

¹de orden 1, lineal, autónomo, con coeficientes constantes, de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

2. LOS CASOS CANÓNICOS

2.1. Caso I. Podemos considerar el sistema “totalmente desacoplado”

$$(4) \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ y'(t) = by(t). \end{cases}$$

En este caso, la matriz A es diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

La solución general de este sistema es, claramente

$$(5) \quad \begin{cases} x(t) = C_1 e^{at} \\ y(t) = C_2 e^{bt}. \end{cases}$$

Podemos reescribirla como

$$X(t) = C_1 e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{bt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Caso II. Consideremos ahora el siguiente sistema

$$(6) \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + y(t) \\ y'(t) = ay(t). \end{cases}$$

En este caso, la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que la siguiente es una solución particular del sistema

$$\begin{cases} x(t) = e^{at} \\ y(t) = 0. \end{cases}$$

Podemos buscar otra solución particular imponiendo

$$y(t) = e^{at},$$

que claramente resuelve la ecuación $y'(t) = ay(t)$. En ese caso, se trata de resolver la ecuación

$$x'(t) = ax(t) + e^{at},$$

que sabemos resolver por el método de variación de constantes. En ese caso obtenemos la solución

$$\begin{cases} x(t) = te^{at} \\ y(t) = e^{at}. \end{cases}$$

Se seguirá entonces de la teoría que la solución general tiene la forma

$$(7) \quad \begin{cases} x(t) = C_1 e^{at} + C_2 t e^{at} \\ y(t) = C_2 e^{at}. \end{cases}$$

Podemos reescribirla como

$$X(t) = C_1 e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{at} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

2.3. Caso III. Finalmente, consideramos el siguiente sistema (con $b \neq 0$)

$$(8) \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = -bx(t) + ay(t). \end{cases}$$

En este caso, la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Intentemos buscar soluciones con

$$x(t) = C(t)e^{at},$$

emulando el método de variación de parámetros, ya que $x(t) = Ce^{at}$ es solución de la ecuación homogénea $x'(t) = ax(t)$. Derivando y sustituyendo en la primera ecuación obtenemos

$$by(t) = C'(t)e^{at}$$

y, por tanto,

$$y(t) = \frac{1}{b}C'(t)e^{at}.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos

$$\frac{1}{b}(C''(t)e^{at} + aC'(t)e^{at}) = y'(t) = -bC(t)e^{at} + \frac{a}{b}C'(t)e^{at}.$$

Despejando, obtenemos

$$C''(t) = -b^2C(t).$$

Una solución particular es

$$C(t) = \cos(bt).$$

Por tanto,

$$\begin{cases} x(t) = e^{at} \cos(bt) \\ y(t) = -e^{at} \sin(bt). \end{cases}$$

Otra solución particular es

$$C(t) = \sin(bt).$$

Por tanto,

$$\begin{cases} x(t) = e^{at} \sin(bt) \\ y(t) = e^{at} \cos(bt). \end{cases}$$

La solución general es

$$(9) \quad \begin{cases} x(t) = C_1e^{at} \cos(bt) + C_2e^{at} \sin(bt) \\ y(t) = -C_1e^{at} \sin(bt) + C_2e^{at} \cos(bt). \end{cases}$$

Podemos reescribirla como

$$\boxed{X(t) = C_1e^{at} \left[\cos(bt) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(bt) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + C_2e^{at} \left[\sin(bt) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(bt) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]}.$$

3. ESTRUCTURA LINEAL DE LAS SOLUCIONES

Teorema 3.1. Si $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ y $X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ son soluciones de (1), entonces, para cualesquiera números reales C_1 y C_2 , la función

$$\begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = X_3(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) = \begin{pmatrix} C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \\ C_1y_1(t) + C_2y_2(t) \end{pmatrix}$$

también lo es.

Demostración. Basta comprobarlo

$$X_3'(t) = C_1X_1'(t) + C_2X_2'(t) = C_1AX_1(t) + C_2AX_2(t) = A(C_1X_1(t) + C_2X_2(t)) = AX_3(t). \quad \square$$

Corolario 3.2 (Unicidad de la solución). Si $X_1(t)$ y $X_2(t)$ son soluciones del PVI (3), entonces $X_1(t) = X_2(t)$.

Demostración. Consideremos $X_3(t) = X_1(t) - X_2(t)$, que también es solución de la ecuación (1). Por tanto, $X_3'(t) = AX_3(t)$. Ahora, $X_3(0) = X_1(0) - X_2(0) = 0$, y por tanto $X_3'(0) = AX_3(0) = 0$. Concluimos que $X_3(t)$ es constante y por tanto 0. Tenemos entonces $X_1(t) - X_2(t) = 0$ y por tanto $X_1(t) = X_2(t)$. \square

3.3. Decimos que dos vectores $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ son *linealmente independientes* si

$$x_1y_2 - y_1x_2 \neq 0.$$

Más generalmente, decimos que dos vectores de funciones $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ y $X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ son *linealmente independientes* si la función

$$x_1(t)y_2(t) - y_1(t)x_2(t)$$

no es idénticamente nula. Es decir, si existe algún punto t_0 tal que

$$x_1(t_0)y_2(t_0) - y_1(t_0)x_2(t_0) \neq 0.$$

Proposición 3.4. Si X_1 y X_2 son dos vectores linealmente independientes, entonces, para todo vector $X_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ existen dos únicos números reales C_1 y C_2 tales que

$$X_3 = C_1X_1 + C_2X_2.$$

(Decimos que X_1 y X_2 generan el espacio vectorial \mathbb{R}^2).

Demostración. Se trata de resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_3 = C_1x_1 + C_2x_2 \\ y_3 = C_1y_1 + C_2y_2, \end{cases}$$

en las variables C_1 y C_2 , que matricialmente se expresa como

$$X_3 = MC,$$

para

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

y

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

La condición $x_1 y_2 - y_1 x_2 \neq 0$ equivale a $\det M \neq 0$. Esto garantiza la existencia de C_1 y C_2 . En efecto, podemos usar la teoría de sistemas lineales aprendida en el instituto o, simplemente, como sabemos que $\det M \neq 0$, existe la matriz inversa M^{-1} , y podemos poner

$$C = M^{-1} X_3.$$

□

Teorema 3.5 (Solución general del sistema (1)). *Sean $X_1(t)$ y $X_2(t)$ dos soluciones particulares linealmente independientes de (1). Toda solución $X(t)$ de (1) puede escribirse como*

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$$

para ciertos (únicos) números reales C_1 y C_2 .

Demostración. Sea $X(t)$ una solución de (1) y sea t_0 un número real tal que $x_1(t_0)y_2(t_0) - x_2(t_0)y_1(t_0) \neq 0$. Por la proposición anterior, existen dos únicos números reales C_1 y C_2 tales que

$$X(t_0) = C_1 X_1(t_0) + C_2 X_2(t_0).$$

Ahora, si definimos $\tilde{X}(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$, está claro que esta $\tilde{X}(t)$ es solución del PVI

$$\begin{cases} \tilde{X}'(t) = A\tilde{X}(t) \\ \tilde{X}(t_0) = X(t_0). \end{cases}$$

Pero $X(t)$ es también una solución de este PVI, y por tanto $X(t) = \tilde{X}(t)$. □

Proposición 3.6. *Sea P una matriz invertible (es decir, con $\det P \neq 0$), y sea J tal que $A = PJP^{-1}$. El vector $X(t)$ es una solución de*

$$X'(t) = AX(t)$$

si y sólo si el vector $Y(t) = PX(t)$ es una solución de

$$Y'(t) = JY(t).$$

Demostración. En efecto, como P es invertible, $Y' = JY$ si y sólo si

$$X' = PY' = PJY = PJP^{-1}PY = AX.$$

□

En la demostración estamos usando lo siguiente:

Lema 3.7. $\frac{d}{dt}(PX(t)) = PX'(t)$.

Demostración. Se sigue de que podemos sacar las sumas y las constantes de la derivada. Hacer como ejercicio. □

4. ESTRATEGIA PARA LA RESOLUCIÓN DEL SISTEMA

Dado el sistema

$$X'(t) = AX(t),$$

se trata de encontrar la expresión de su solución general.

4.1. Paso 1. Diagonalización. El primer paso consiste en hallar una matriz invertible P de modo que

$$A = PJP^{-1}$$

tiene una de las siguientes *formas canónicas*

- **Caso I:**

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

- **Caso II:**

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

- **Caso III:**

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

4.2. Paso 2. Solución del caso canónico. Estudiamos ahora el sistema

$$Y'(t) = JY(t).$$

Se trata de uno de los casos canónicos estudiados anteriormente, para los cuales sabemos hallar la solución general $Y(t)$.

4.3. Paso 3. Solución del caso general. Finalmente, recuperamos la solución general del sistema escribiendo

$$(10) \quad X(t) = PY(t).$$

5. CÁLCULO DE LA MATRIZ P

5.1. Se denomina *polinomio característico de la matriz A* al polinomio

$$p_A(T) = \det(A - T\mathbb{I}),$$

en la variable t , donde $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad.

Las raíces de este polinomio $p_A(T)$, es decir, los números λ y μ tales que $p_A(\lambda) = p_A(\mu) = 0$, se denominan los *autovalores de A* .

Nótese que los *autovalores de A siempre existen* pero podrían no ser números reales, sino *posiblemente números complejos*. Distinguimos entonces varias situaciones:

- λ y μ reales, $\lambda \neq \mu$.
- $\lambda = \mu$.
- λ y μ complejos.

5.2. λ y μ reales, $\lambda \neq \mu$. En este caso, veremos que siempre podemos hallar P tal que la forma canónica J es la del **Caso I**. Más concretamente, tendremos

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Teorema 5.3. *Supongamos que λ y μ son reales, y $\lambda \neq \mu$. Sean $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ y $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dos vectores tales que*

$$AU_1 = \lambda U_1 \quad \text{y} \quad AU_2 = \mu U_2.$$

Entonces

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1},$$

para

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Los vectores U_1 y U_2 se denominan los autovectores de A . Nótese que, como $\lambda \neq \mu$, estos vectores U_1 y U_2 son necesariamente linealmente independientes y, por tanto, P es invertible.

Proof. Basta probar que

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

En efecto, como $AU_1 = \lambda U_1$ y $AU_2 = \mu U_2$, tenemos

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda u_1 & \mu u_2 \\ \lambda v_1 & \mu v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

□

5.4. Caso $\lambda = \mu$. En este caso distinguimos dos posibles situaciones

- $A = \lambda \mathbf{I}$. En este caso, estamos directamente en el caso canónico **Caso I**, que ya hemos resuelto.
- $A \neq \lambda \mathbf{I}$. Lo notable de este caso es que no será posible hallar dos autovectores U_1 y U_2 que sean linealmente independientes. La matriz canónica J tendrá la forma del **Caso II**, esto es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Teorema 5.5. Supongamos que $\lambda = \mu$. Sean $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ y $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dos vectores tales que

$$AU_1 = \lambda U_1, \quad (A - \lambda \mathbb{I})^2 U_2 = 0 \quad \text{y} \quad AU_2 = U_1 + \lambda U_2.$$

Entonces

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1},$$

para

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Proof. Igual que antes, basta ver que

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

En efecto, como $AU_1 = \lambda U_1$ y $AU_2 = U_1 + \lambda U_2$, tenemos

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda u_1 & u_1 + \lambda u_2 \\ \lambda v_1 & v_1 + \lambda v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

□

5.6. λ y μ complejos. En este caso, se tiene que λ es de la forma $\lambda = \alpha + i\beta$, mientras que $\mu = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ (es decir, λ y μ son conjugados), ya que el polinomio característico $p_A(T) = T^2 - (\lambda + \mu)T + \lambda\mu$ tiene coeficientes reales. Veremos que en este caso la matriz canónica J pertenece al **Caso III**; esto es, tendremos

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sean $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ y $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ los correspondientes autovectores

$$AU_1 = \lambda U_1 \quad \text{y} \quad AU_2 = \mu U_2.$$

Nótese que estos vectores en general tienen entradas complejas y son conjugados, esto es $U_2 = \bar{U}_1$ (es decir, $u_2 = \bar{u}_1$ y $v_2 = \bar{v}_1$). Realizando un cambio de base, podemos obtener los vectores $\tilde{U}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{pmatrix}$ y $\tilde{U}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix}$ definidos como

$$\tilde{U}_1 = \operatorname{Re}(U_1) = \frac{1}{2}(U_1 + \bar{U}_1) = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$$

y

$$\tilde{U}_2 = \operatorname{Im}(U_1) = \frac{1}{2i}(U_1 - \bar{U}_1) = \frac{1}{2i}(U_1 - U_2).$$

Nótese que estos vectores tienen entradas reales. Nótese también que, como la matriz

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{pmatrix}$$

tiene determinante distinto de 0, los vectores \tilde{U}_1 y \tilde{U}_2 son linealmente independientes. En efecto, podemos recuperar

$$U_1 = \tilde{U}_1 + i\tilde{U}_2 \quad \text{y} \quad U_2 = \tilde{U}_1 - i\tilde{U}_2.$$

Teorema 5.7. *Tenemos que*

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} P^{-1},$$

para

$$P = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 & \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Demostración. De nuevo, basta ver que

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} A\tilde{U}_1 &= \frac{1}{2}(AU_1 + AU_2) = \frac{1}{2}(\lambda U_1 + \bar{\lambda} U_2) \\ &= \frac{1}{2}[\lambda(\tilde{U}_1 + i\tilde{U}_2) + \bar{\lambda}(\tilde{U}_1 - i\tilde{U}_2)] \\ &= \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})\tilde{U}_1 - \frac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda})\tilde{U}_2 = \alpha\tilde{U}_1 - \beta\tilde{U}_2. \end{aligned}$$

De igual manera obtenemos que

$$\begin{aligned} A\tilde{U}_2 &= \frac{1}{2i}(AU_1 - AU_2) = \frac{1}{2i}(\lambda U_1 - \bar{\lambda} U_2) \\ &= \frac{1}{2i}[\lambda(\tilde{U}_1 + i\tilde{U}_2) - \bar{\lambda}(\tilde{U}_1 - i\tilde{U}_2)] \\ &= \frac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda})\tilde{U}_1 + \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})\tilde{U}_2 = \beta\tilde{U}_1 + \alpha\tilde{U}_2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$AP = (\alpha\tilde{U}_1 - \beta\tilde{U}_2 \quad \beta\tilde{U}_1 + \alpha\tilde{U}_2) = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

como queríamos probar. \square

6. RESUMEN PRÁCTICO

Resumimos entonces la estrategia práctica para resolver un sistema de EDOs de la forma

$$X'(t) = AX(t).$$

6.1. Paso 1. Cálculo de los autovalores. En primer lugar, se considera el polinomio característico

$$p_A(T) = \det(A - T\mathbb{I})$$

y se hallan sus raíces, que son los autovalores λ y μ . A estas alturas ya podemos determinar si estamos en uno de los **Casos I, II** o **III**.

6.2. Paso 2. Cálculo de los autovectores. Si $\lambda \neq \mu$ (ya sean reales o complejos), calculamos los autovectores U_1 y U_2 resolviendo las ecuaciones

$$AU_1 = \lambda U_1 \quad \text{y} \quad AU_2 = \mu U_2.$$

Nótese que, como las matrices $(A - \lambda\mathbb{I})$ y $(A - \mu\mathbb{I})$ tienen rango < 2 , estos sistemas no tienen solución única, sino una recta de soluciones. Es decir, los autovectores U_1 y U_2 están determinados salvo por una constante. Si λ y μ son complejos, entonces $U_2 = \bar{U}_1$ y tomamos $\tilde{U}_1 = \operatorname{Re}(U_1)$ y $\tilde{U}_2 = \operatorname{Im}(U_1)$.

Si $\lambda = \mu$, entonces, o bien $A = \lambda\mathbb{I}$, en cuyo caso tenemos $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, o bien $A \neq \lambda\mathbb{I}$. En este caso obtenemos el autovector U_1 resolviendo la ecuación

$$AU_1 = \lambda U_1$$

y el vector U_2 resolviendo la ecuación

$$(A - \lambda\mathbb{I})U_2 = U_1.$$

6.3. Paso 3. Expresión de la solución general.

- Si λ y μ son reales y $\lambda \neq \mu$, o $A = \lambda\mathbb{I}$, entonces la solución general es

$$\boxed{X(t) = C_1 e^{\lambda t} U_1 + C_2 e^{\mu t} U_2}.$$

- Si $\lambda = \mu$ y $A \neq \lambda\mathbb{I}$, entonces la solución general es

$$\boxed{X(t) = C_1 e^{\lambda t} U_1 + C_2 e^{\lambda t} (tU_1 + U_2)}.$$

- Si $\lambda = \alpha + i\beta$ y $\mu = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ son complejos, entonces la solución general es

$$\boxed{X(t) = C_1 e^{\alpha t} (\cos(\beta t)\tilde{U}_1 - \sin(\beta t)\tilde{U}_2) + C_2 e^{\alpha t} (\sin(\beta t)\tilde{U}_1 + \cos(\beta t)\tilde{U}_2)}.$$

7. EJEMPLOS

7.1. Ejemplo 1. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t). \end{cases}$$

En este caso, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$p_A(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 3 \\ 2 & 1-T \end{vmatrix} = (2-T)(1-T) - 6 = T^2 - 3T - 4.$$

Obtenemos los autovalores

$$\lambda = 4, \mu = -1.$$

Estamos por tanto en el **Caso I**; la matriz canónica es

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$A - 4\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para hallar los autovectores $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ y $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$, resolvemos las ecuaciones

$$\begin{cases} -2u_1 + 3v_1 = 0 \\ 2u_1 - 3v_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3u_2 + 3v_2 = 0 \\ 2u_2 + 2v_2 = 0. \end{cases}$$

Obtenemos $U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (o cualquier múltiplo de estos vectores).

La solución general es

$$X(t) = C_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

que podemos reescribir como

$$\begin{cases} x(t) = 3C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t} \\ y(t) = 2C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t} \end{cases}.$$

7.2. Ejemplo 2. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t). \end{cases}$$

En este caso, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$p_A(T) = \begin{vmatrix} 4-T & -1 \\ 1 & 2-T \end{vmatrix} = (4-T)(2-T) + 1 = T^2 - 6T + 9 = (T-3)^2.$$

Obtenemos los autovalores

$$\lambda = \mu = 3.$$

Como $A \neq 3\mathbb{I}$, estamos en el **Caso II**; la matriz canónica es

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$A - 3\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El único (salvo constante) autovector U_1 se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} u_1 - v_1 = 0 \\ u_1 - v_1 = 0. \end{cases}$$

Tenemos $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (o cualquier múltiplo suyo). El vector U_2 se obtiene ahora resolviendo el sistema

$$\begin{cases} u_1 - v_1 = 1 \\ u_1 - v_1 = 1. \end{cases}$$

De nuevo, tenemos una recta de soluciones; podemos tomar simplemente $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La solución general es

$$X(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

que podemos reescribir como

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 (t e^{3t} + e^{3t}) \\ y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} \end{cases}.$$

7.3. Ejemplo 3. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t). \end{cases}$$

En este caso, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$p_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -2 \\ 1 & 3-T \end{vmatrix} = (1-T)(3-T) + 2 = T^2 - 4T + 5.$$

Obtenemos los autovalores

$$\lambda = 2 + i, \quad \mu = \bar{\lambda} = 2 - i.$$

Por tanto, $\alpha = 2$ y $\beta = 1$. Estamos en el **Caso III**; la matriz canónica es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$A - (2 + i)\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 - i & -2 \\ 1 & 1 - i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A - (2 - i)\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 + i & -2 \\ 1 & 1 + i \end{pmatrix}.$$

Para hallar los autovectores $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ y $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$, resolvemos las ecuaciones

$$\begin{cases} -(1 + i)u_1 - 2v_1 = 0 \\ u_1 + (1 - i)v_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1 + i)u_2 - 2v_2 = 0 \\ u_2 + (1 + i)v_2 = 0. \end{cases}$$

Obtenemos $U_1 = \begin{pmatrix} -1 + i \\ 1 \end{pmatrix}$ y $U_2 = \begin{pmatrix} -1 - i \\ 1 \end{pmatrix}$ (o cualquier múltiplo de estos vectores). Nótese que basta calcular U_1 ya que sabemos que U_2 es su conjugado. Ahora,

$$\tilde{U}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución general es

$$X(t) = C_1 e^{2t} \left[\cos t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + C_2 e^{2t} \left[\sin t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

que podemos reescribir como

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{2t} (\cos t + \sin t) + C_2 e^{2t} (-\sin t + \cos t) \\ y(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t \end{cases}.$$

8. DIAGRAMA DE FASES. ESTUDIO CUALITATIVO DE LAS SOLUCIONES

8.1. Interpretación geométrica del sistema. Si pensamos que el vector $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ describe la posición de una partícula en el plano, entonces $X'(t)$ describe su velocidad, y el sistema de EDOs

$$X'(t) = AX(t)$$

puede interpretarse como una ecuación para la velocidad de la partícula.

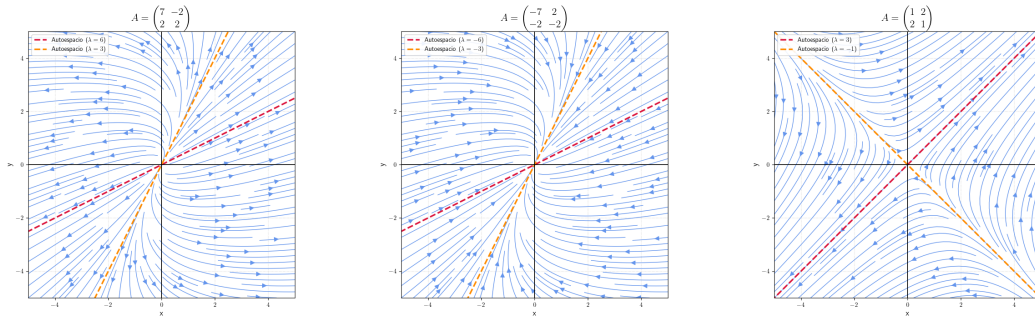
Así, podemos pensar que la ecuación $X'(t) = AX(t)$ nos da un *campo de velocidades* en el plano, y que las soluciones $X(t)$ describen las trayectorias de las partículas en ese campo, lo que se denomina el *flujo* asociado al campo. Este campo se puede representar gráficamente: en cada punto (x, y) del plano, dibujamos el vector (x', y') dado por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

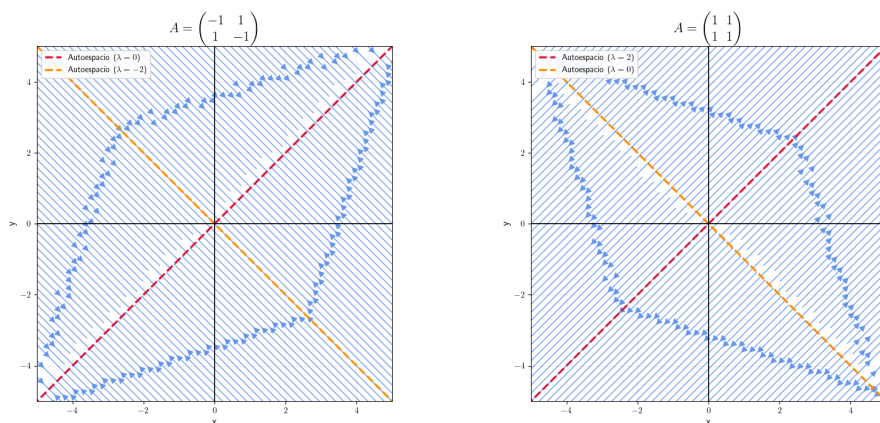
El flujo vendrá dado por las curvas que en cada punto (x, y) son tangentes al vector (x', y') . El dibujo resultante se denomina un *diagrama de fases*. Vamos a estudiar los diferentes diagramas de fases que obtenemos en cada uno de los casos estudiados.

8.2. Caso I. Autovalores reales distintos, o A diagonal. Recordemos que nos encontramos en el **Caso I** si los autovalores λ y μ son reales y $\lambda \neq \mu$. En tal caso, obtenemos dos autovectores linealmente independientes U_1 y U_2 , y denotamos por $L_1 = \{aU_1 : a \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{aU_2 : a \in \mathbb{R}\}$ las rectas del plano generadas por estos autovectores. Puesto que U_1 y U_2 son autovectores, el campo de velocidades será tangente a las líneas L_1 y L_2 , lo que quiere decir que habrá soluciones contenidas en esas líneas, que se denominan *rectas solución*. Distinguiamos ahora varios casos:

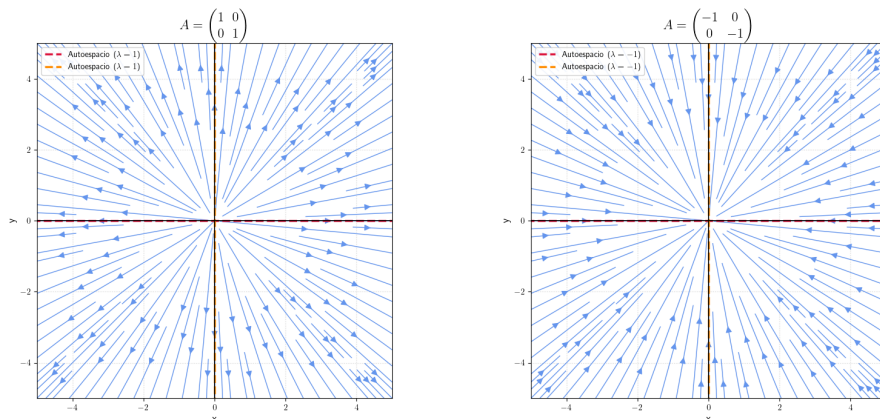
- $\lambda, \mu > 0$. En este caso, el campo a lo largo de las líneas L_1 y L_2 apunta en dirección contraria al origen $(0, 0)$. Obtenemos lo que se denomina una *fuente*. El origen en este caso es un *punto de equilibrio inestable* (si soltamos una partícula “cerca del origen”, se alejará del origen).
- $\lambda, \mu < 0$. En este caso, el campo a lo largo de las líneas L_1 y L_2 apunta hacia el origen. Obtenemos un *sumidero*. El origen en este caso es un *punto de equilibrio estable* (si soltamos una partícula “cerca del origen”, irá hacia el origen).
- $\lambda > 0, \mu < 0$ (equivalentemente, $\lambda < 0, \mu > 0$). En este caso, el campo a lo largo de la línea L_1 apunta en dirección contraria al origen y a lo largo de la línea L_2 en dirección al origen. El origen en este caso es un *punto de silla*.



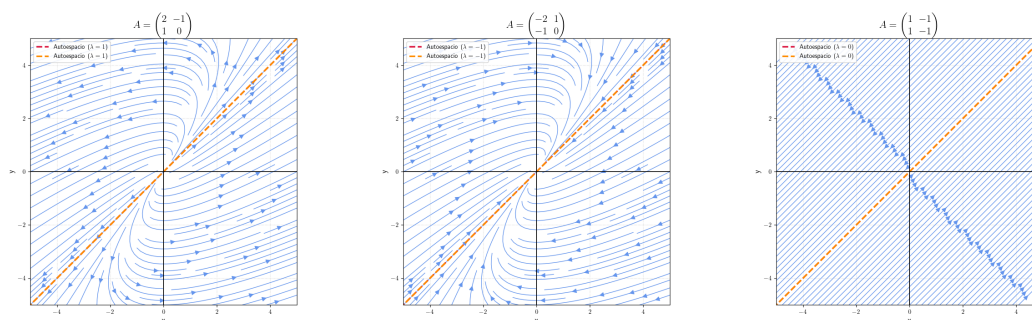
- $\lambda = 0, \mu \neq 0$ (equivalentemente $\lambda \neq 0, \mu = 0$). En este caso, la línea L_1 es una *recta de puntos fijos*. El campo apuntará hacia la línea L_1 si $\mu < 0$, en cuyo caso L_1 es una *línea estable* o en dirección opuesta a la línea L_1 si $\mu > 0$, en cuyo caso L_1 es una *línea inestable*.



- $\lambda = \mu, A = \lambda \mathbb{I}$. En este caso, el vector (x', y') siempre tiene la misma dirección que el vector (x, y) , es decir, el campo es “radial”. Si $\lambda > 0$, apunta hacia afuera, y si $\lambda < 0$, apunta hacia adentro. Todas las rectas que pasan por el origen son rectas solución. Si $\lambda < 0$, el origen es un punto de equilibrio estable, y si $\lambda > 0$, el origen es un punto de equilibrio inestable. Si $\lambda = 0$, todos los puntos son puntos fijos, y las únicas soluciones son las constantes.



8.3. Caso II. Autovalores iguales, A no diagonal. Ahora nos encontramos en el **Caso II**, donde $\lambda = \mu$, pero $A \neq \lambda I$. En tal caso obtenemos un único autovector (salvo constante) U_1 , y una única recta solución $L_1 = \{aU_1 : a \in \mathbb{R}\}$. Una excepción es el caso con $\lambda = 0$, en tal caso el campo es “rectilíneo”, en direcciones paralelas a la recta L_1 . La recta L_1 es una recta de puntos fijos, y todas las rectas paralelas a ella son rectas solución, con mayor velocidad cuanto más se alejen de L_1 .



8.4. Caso III. Autovalores complejos. Cuando tenemos autovalores complejos $\lambda = \alpha + i\beta$, $\mu = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, no existen autovectores (reales), y por tanto no hay rectas solución. Distinguiamos los siguientes casos:

- $\alpha > 0$. En tal caso, los vectores apuntan ligeramente hacia afuera del origen. Obtenemos una *fente en espiral*.
- $\alpha < 0$. Los vectores apuntan ligeramente hacia el origen. Obtenemos un *sumidero en espiral*.
- $\alpha = 0$. En este caso, el vector (x', y') es siempre perpendicular a (x, y) . Obtenemos lo que se denomina un *centro*, con órbitas concéntricas en torno al origen.

Por su parte, el valor de β nos informa de la *velocidad angular* de las soluciones. Para determinar el sentido de giro, basta ver si $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene componente vertical positiva o negativa. Dicha componente es claramente igual al término inferior izquierdo de la matriz A . Si dicha componente es positiva, el sentido de giro es antihorario, y si es negativa es horario.

