

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA EN VARIEDADES

GUILLERMO GALLEGO

1. TEORÍA DE CATEGORÍAS

Definición 1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste en

- una clase $\text{Obj}(\mathcal{C})$, cuyos elementos se llaman los **objetos** de $\mathcal{C}$,
- para cada par de objetos A y B de $\mathcal{C}$, una clase $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \text{Hom}(A, B)$, cuyos elementos f se denominan **morfismos de A a B** y se denotan como flechas $f : A \rightarrow B$,

y una **ley de composición**, para cada terna (A, B, C) de objetos de $\mathcal{C}$

$$\circ_{\mathcal{C}} = \circ : \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C), (f, g) \mapsto g \circ f$$

que cumple la propiedad asociativa y tal que, para cada objeto A de $\mathcal{C}$, existe un morfismo $\text{id}_A : A \rightarrow A$ que actúa como la unidad para la operación de composición.

Si, para cada par de objetos (A, B) de $\mathcal{C}$, la clase $\text{Hom}(A, B)$ es un conjunto, entonces decimos que $\mathcal{C}$ es una categoría **localmente pequeña**. Si, además, la clase $\text{Obj}(\mathcal{C})$ es un conjunto, decimos que $\mathcal{C}$ es una categoría **pequeña**.

Definición 1.2. Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo en una categoría $\mathcal{C}$. Decimos que f es

- un **monomorfismo** si, para cualquier otro objeto C de $\mathcal{C}$ y cualesquiera dos morfismos $g_1, g_2 : C \rightarrow A$, se tiene que si $f \circ g_1 = f \circ g_2$, entonces $g_1 = g_2$;
- un **epimorfismo** si, para cualquier otro objeto C de $\mathcal{C}$ y cualesquiera dos morfismos $g_1, g_2 : B \rightarrow C$, se tiene que si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, entonces $g_1 = g_2$;
- un **isomorfismo** si existe otro morfismo $f^{-1} : B \rightarrow A$ de modo que $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ y $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$.

Observación 1.3. Nótese que un isomorfismo no siempre es lo mismo que un morfismo que es un monomorfismo y un epimorfismo. Por ejemplo, una aplicación biyectiva y continua no es necesariamente un homeomorfismo.

Definición 1.4. Un **functor** (o **functor covariante**) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, asigna, a cada objeto A de $\mathcal{C}$, un objeto $F(A)$ de $\mathcal{D}$ y, a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ en $\mathcal{C}$, un morfismo $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$, de forma que $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

1.5. Dada una categoría $\mathcal{C}$, podemos definir su **categoría opuesta** $\mathcal{C}^{\text{op}}$ como la categoría cuyos objetos son los objetos de $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos cumplen

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$$

y de modo que $g \circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} f = f \circ_{\mathcal{C}} g$. Un **functor contravariante** de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ se define como un functor $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$.

Proposición 1.6. *Dado un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, para todo isomorfismo $f : A \rightarrow B$ en $\mathcal{C}$, el morfismo $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$, con $F(f)^{-1} = f^{-1}$.*

1.7. Es claro que los funtores se pueden componer, y que en cada categoría $\mathcal{C}$ se puede definir su funtor identidad $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, que envía cada objeto y cada morfismo en sí mismo. Esto permitiría a priori definir una categoría Cat cuyos objetos son las categorías y cuyos morfismos son los funtores entre ellas. En principio esto puede dar lugar a paradojas lógicas de tipo Russell (¿es Cat un objeto de sí misma?), que se pueden evitar limitando el tamaño de las mismas. Por ejemplo, podemos considerar la categoría CatLP de las categorías localmente pequeñas, que a su vez no será localmente pequeña. En cualquier caso, existe una noción natural de “isomorfismo de categorías”, aunque normalmente nos interesará una condición menos restrictiva, la noción de “equivalencia”. Para definirla, vamos a introducir una noción de “morfismos de funtores”.

Definición 1.8. Sean $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dos funtores. Una **transformación natural** o **morfismo de funtores** $\alpha : F \rightarrow G$ asigna, a cada objeto A de $\mathcal{C}$, un morfismo

$$\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$$

de modo que, para cada morfismo $f : A \rightarrow B$ en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \downarrow \alpha_A & & \downarrow \alpha_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B). \end{array}$$

Si α_A es un isomorfismo para todo objeto A de $\mathcal{C}$, entonces se dice que α es un **isomorfismo de funtores**.

Definición 1.9. Una **equivalencia de categorías** es un par de funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ de forma que $G \circ F$ es isomorfo a $\text{id}_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G$ es isomorfo a $\text{id}_{\mathcal{D}}$.

Un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre categorías localmente pequeñas se dice **plenamente fiel** si, para cada par de objetos (A, B) de $\mathcal{C}$, se tiene que la aplicación

$$F : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(F(A), F(B))$$

es biyectiva.

Un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ se dice **esencialmente sobreyectivo** si, para cada objeto X de $\mathcal{D}$, existe un objeto A de $\mathcal{C}$ tal que $F(A)$ es isomorfo a X .

Proposición 1.10. *Si (F, G) determina una equivalencia de categorías, entonces los funtores F y G son plenamente fieles y esencialmente sobreyectivos. Recíprocamente, si F es un funtor plenamente fiel y esencialmente sobreyectivo, entonces existe otro funtor $G = F^{-1}$ tal que (F, F^{-1}) es una equivalencia de categorías.*

Otra forma de definir equivalencias de categorías es en términos de adjunciones.

Definición 1.11. Una **adjunción** $G \dashv F$ entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es un par de funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ junto con dos transformaciones naturales $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ y $\varepsilon : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$, llamadas la **unidad** y la **counidad**, respectivamente, de modo que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\eta \circ G} & G \circ F \circ G \\
 & \searrow \text{id}_G & \downarrow G \circ \varepsilon \\
 & & G,
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{F \circ \eta} & F \circ G \circ F \\
 & \searrow \text{id}_F & \downarrow \varepsilon \circ F \\
 & & F.
 \end{array}$$

Decimos que G es el **funtor adjunto por la izquierda de F** y que F es el **funtor adjunto por la derecha de G** .

1.12. Nótese que una equivalencia de categorías es una adjunción en la que la unidad y la counidad son isomorfismos. Por otra parte, dada una adjunción (F, G) podemos definir, para cada par de objetos A en $\mathbf{C}$ y X en $\mathbf{D}$, una biyección

$$\varphi_{A,X} : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, G(X)), \quad f \mapsto G(f) \circ \eta_A,$$

que es natural en el sentido de que, si tomamos otro par (B, Y) , con morfismos $f : B \rightarrow A$ y $g : X \rightarrow Y$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), X) & \xrightarrow{g \circ - \circ F(f)} & \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(B), Y) \\
 \downarrow \varphi_{A,X} & & \downarrow \varphi_{B,Y} \\
 \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, G(X)) & \xrightarrow{G(g) \circ - \circ f} & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, G(Y)).
 \end{array}$$

Definición 1.13. Sean $\mathbf{C}$ una categoría cualquiera y $\mathbf{Set}$ la categoría de los conjuntos. Un **prehaz** en $\mathbf{C}$ es un funtor $F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Denotamos por $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ la categoría de los prehaces en $\mathbf{C}$.

Si $\mathbf{C}$ es una categoría localmente pequeña, para cada objeto X de $\mathbf{C}$ podemos definir su **funtor de puntos** como el prehaz $\underline{X} : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ definido por las fórmulas

$$\underline{X}(A) = \text{Hom}(A, X), \quad \underline{X}(f : A \rightarrow B) = - \circ f : \text{Hom}(B, X) \rightarrow \text{Hom}(A, X).$$

El funtor $y : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$, $X \mapsto \underline{X}$ se denomina la **inmersión de Yoneda**.

Teorema 1.14 (Lema de Yoneda). *La inmersión de Yoneda $y : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ es plenamente fiel.*

Definición 1.15. Sean J y $\mathbf{C}$ dos categorías, con J pequeña, y sea $D : J \rightarrow \mathbf{C}$ un funtor.

Se define un **cono** sobre D como un par (N, ψ) formado por un objeto N de $\mathbf{C}$ y una familia de morfismos $\psi = \{\psi_i : N \rightarrow D(i), i \in \text{Obj}(J)\}$, de modo que, para cada morfismo $a : i \rightarrow j$ en J , tenemos $D(a) \circ \psi_i = \psi_j$. Se define un **límite** de D como un cono (L, ϕ) tal que, para cada cono (N, ψ) sobre D existe un único morfismo $u : N \rightarrow L$ tal que $\phi_i \circ u = \psi_i$ para todo $i \in J$.

Dualmente, se define un **co-cono** sobre D como un par (N, ψ) formado por un objeto N de $\mathbf{C}$ y una familia de morfismos $\psi = \{\psi_i : D(i) \rightarrow N, i \in \text{Obj}(J)\}$, de modo que, para cada morfismo $a : i \rightarrow j$ en J , tenemos $\psi_j \circ D(a) = \psi_i$. Se define un **colímite** de D como un co-cono (L, ϕ) tal que, para cada co-cono (N, ψ) sobre D existe un único morfismo $u : L \rightarrow N$ tal que $u \circ \phi_i = \psi_i$ para todo $i \in J$.

Observación 1.16. Se sigue de las propiedades universales en las definiciones los límites y los colímites, si existen, entonces son únicos. En tal caso, denotamos el límite de un funtor D como $\lim D$, y su colímite como $\text{colim } D$.

Observación 1.17. La idea de los conos y los co-conos es pensar que J es una categoría cuyos objetos indexan objetos de $\mathbf{C}$, y que el funtor D determina un diagrama conmutativo de morfismos en $\mathbf{C}$. Un cono es un objeto con una serie de flechas a cada uno de los puntos del diagrama, y el límite es el cono “más cercano” al diagrama que podemos poner.

Ejemplo 1.18. Veamos algunos ejemplos de límites y colímites:

- Si J es la categoría vacía (sin objetos y sin morfismos), entonces sólo existe un funtor de J a cualquier categoría, el funtor vacío. El límite de este funtor, si existe, es simplemente el objeto L tal que, para cualquier otro objeto N de $\mathbf{C}$, existe un único morfismo $u : N \rightarrow L$. Se dice que L es un **objeto terminal**. Dualmente, el colímite de este funtor, si existe, es el **objeto final**.
- Si J es una categoría que tiene por morfismos únicamente a la identidad de cada objeto, entonces un funtor $D : J \rightarrow \mathbf{C}$ es simplemente un conjunto de objetos de $\mathbf{C}$ indexado por $\text{Obj}(J)$. El correspondiente límite $\lim D$, si existe, se denomina el **producto** de D , y se denota como

$$\lim D = \prod_{i \in J} D(i).$$

Los morfismos $\phi_i = \text{pr}_i : \lim D \rightarrow D(i)$ son las **proyecciones**. El colímite $\text{colim } D$, si existe, se denomina el **coproducto** de D , y se denota como

$$\text{colim } D = \coprod_{i \in J} D(i).$$

Los morfismos $\phi'_j = i_j : D(j) \rightarrow \text{colim } D$ son las **inclusiones**.

- Si J es una categoría con dos objetos $\text{Obj}(J) = \{0, 1\}$ y que tiene por únicos morfismos entre ellos dos morfismos $a, b : 0 \rightarrow 1$, entonces un funtor $D : J \rightarrow \mathbf{C}$ es un par de objetos X y Y de $\mathbf{C}$ con dos morfismos $f, g : X \rightarrow Y$. El correspondiente límite, si existe, se denomina el **ecualizador** de f y g . Dualmente, si existe el colímite de un funtor $D : J^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}$, se denomina el **coecualizador** de f y g .
- Supongamos que J es una categoría con tres objetos $\text{Obj}(J) = \{0, 1, 2\}$ y que tiene por únicos morfismos entre ellos dos morfismos $a : 0 \rightarrow 2$ y $b : 1 \rightarrow 2$. Un funtor $D : J \rightarrow \mathbf{C}$ es una terna de objetos X, Y y Z de $\mathbf{C}$ con dos morfismos $f : X \rightarrow Z$ y $g : Y \rightarrow Z$. El correspondiente límite, si existe, se denomina el **producto fibrado** o “**pullback**”, y se denota por

$$\lim D = X \times_Z Y = X \times_{(Z, f, g)} Y.$$

Un funtor $D : J^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}$ es una terna de objetos X, Y y Z de $\mathbf{C}$ con dos morfismos $f : Z \rightarrow X$ y $g : Z \rightarrow Y$. El correspondiente colímite, si existe, se denomina el **coproducto fibrado**, **suma amalgamada** o “**pushout**”, y se denota por

$$\text{colim } D = X \sqcup_Z Y = X \sqcup_{(Z, f, g)} Y.$$

- Un conjunto dirigido J puede convertirse en una categoría pequeña si añadimos un morfismo $i \rightarrow j$ para cada par de elementos $i, j \in J$ con $i \leq j$. Un funtor $D : J^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}$ se denomina un **sistema inverso** y el límite de D es el correspondiente

límite inverso (también llamado **límite proyectivo**), que se denota por

$$\lim D = \varprojlim_{i \in J} D(i).$$

Un funtor $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ se denomina un **sistema directo** y el colímite de D es el correspondiente **límite directo** (también llamado **límite inductivo**), que se denota por

$$\operatorname{colim} D = \varinjlim_{i \in J} D(i).$$

1.19. Representabilidad y densidad. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ un prehaz. Una pregunta natural es si existe algún objeto $X \in \mathcal{C}^{\text{op}}$ tal que $F = \underline{X} = \text{Hom}(-, X)$. En ese caso, decimos que F es un **functor representable**. En general, no todo prehaz es un functor representable, pero sí que se puede obtener como un colímite de funtores representables. Para ello, definimos la **categoría de pares** $\int F$ cuyos objetos son los pares (A, x) con A un objeto de $\mathcal{C}$ y $x \in F(A)$, y tal que un morfismo entre dos pares $(A, x) \rightarrow (B, y)$ está dado por un morfismo $f : A \rightarrow B$ tal que $F(f)(y) = x$. Podemos entonces considerar el diagrama

$$D_F : \int F \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C}), (A, x) \mapsto \underline{A}.$$

Teorema 1.20 (Teorema de densidad).

$$F = \operatorname{colim} D_F.$$

Demostración. Basta probar que existe, para todo prehaz $G : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$, existe una biyección natural

$$\text{Hom}_{\text{PSh}(\mathcal{C})}(F, G) \cong \text{Hom}_{\text{Fun}(\int F, \text{PSh}(\mathcal{C}))}(D_F, C_G),$$

donde $C_G : (A, x) \mapsto G$ es el funtor constante en G .

Supongamos entonces que $\alpha : D_F \rightarrow C_G$ es un morfismo. Éste está dado por una colección de morfismos $\alpha_{A,x} : \underline{A} \rightarrow G$, para cada par (A, x) , de modo que para cada morfismo de pares $f : (A, x) \rightarrow (B, y)$, se tiene que $\alpha_{B,y} \circ f^* = \alpha_{A,x}$. El lema de Yoneda dice que hay una biyección natural $G(A) \cong \text{Hom}(\underline{A}, G)$. Por tanto, cada morfismo $\alpha_{A,x}$ corresponde a un elemento $g_{A,x} \in G(A)$ de modo que $(Gf)(g_{B,y}) = g_{A,x}$. Definimos ahora las aplicaciones

$$\theta_A : F(A) \rightarrow G(A), x \mapsto g_{A,x},$$

que determinan una transformación natural $\theta : F \rightarrow G$. Esta construcción es claramente reversible, y permite recuperar $\alpha : D_F \rightarrow C_G$ partiendo de θ , por lo que tenemos la biyección que buscábamos. $\square$

2. ÁLGEBRA HOMOLÓGICA 1: CATEGORÍAS ABELIANAS

Definición 2.1. Una **categoría aditiva** $\mathcal{A}$ es una categoría con las siguientes propiedades:

1. Para cualesquiera dos objetos A y B de $\mathcal{A}$, la clase $\text{Hom}(A, B)$ es un grupo abeliano y, para cualesquiera tres objetos A , B y C , la aplicación de composición $\circ : \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$ es un homomorfismo de grupos.

2. Existe un objeto 0 de A cuya identidad es el elemento neutro, es decir, tal que $\text{id}_0 = 0 \in \text{Hom}(0, 0)$.
3. Para cualesquiera dos objetos A y B de A , existe su producto, que se denota por $A \oplus B$ y se denomina la **suma directa** de A y B .

Observación 2.2. Algunos comentarios:

1. El objeto 0 es único y además es un objeto inicial y un objeto final de A .
2. Al existir el producto $A \oplus B = A \times B$, también existe el coproducto $A \sqcup B$, que además es isomorfo a $A \oplus B$.

Definición 2.3. Si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo en una categoría aditiva A , definimos su **núcleo** $\ker f \rightarrow A$ como el ecualizador de f y el morfismo $0 : A \rightarrow B$. Dualmente, definimos su **conúcleo** $B \rightarrow \text{coker } f$ como el coecualizador de f y $0 : A \rightarrow B$. Se define la **coimagen** $\text{coim } f$ como el conúcleo del morfismo $\ker f \rightarrow A$, y la **imagen** $\text{im } f$ como el núcleo del morfismo $B \rightarrow \text{coker } f$.

Nótese que si un morfismo f tiene núcleo, conúcleo, imagen y coimagen, entonces factoriza de manera única como $A \rightarrow \text{coim } f \rightarrow \text{im } f \rightarrow B$.

Definición 2.4. Una **categoría abeliana** A es una categoría con las siguientes propiedades:

1. A es aditiva.
2. Existe el núcleo y el conúcleo de todos los morfismos de A y,
3. (**Teorema de isomorfía**) Para todo morfismo f de A , el morfismo natural $\text{coim } f \rightarrow \text{im } f$ es un isomorfismo.

Observación 2.5. Comentemos algunas propiedades de las categorías abelianas.

1. En una categoría abeliana, un morfismo es un monomorfismo si y sólo si su núcleo es 0 y un epimorfismo si y sólo si su conúcleo es 0 .
2. Hay una noción de cociente: dado un monomorfismo $i : A \rightarrow B$, se define el **cociente** $B \rightarrow B/A$ como el conúcleo $B \rightarrow B/A = \text{coker } i$.
3. En cualquier categoría abeliana se puede definir la noción de complejo de cocadenas: una sucesión de morfismos

$$A^\bullet : \dots \xrightarrow{d^{i-2}} A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots$$

es un **complejo de cocadenas** si $d_i \circ d_{i-1} = 0$ para todo i . En un complejo de cadenas, el morfismo d_{i-1} factoriza por un monomorfismo $\text{im } d_{i-1} \hookrightarrow \ker d_i$. Decimos que $A^\bullet$ es **exacto** en A^i si este monomorfismo es un isomorfismo.

4. Un complejo de cocadenas que es exacto en todos sus puntos se denomina una **sucesión exacta**. Una **sucesión exacta corta** es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

En este caso, nótese que $A = \ker(B \rightarrow C)$ y $C = B/A$.

5. El “fallo de la exactitud” se puede medir con la **cohomología**: para cada i , se define el i -ésimo objeto de cohomología de $A^\bullet$ como el cociente

$$H^i(A^\bullet) = \ker d_i / \text{im } d_{i-1}.$$

Hay una noción natural de morfismo entre complejos de cocadenas, lo que permite definir una categoría $\text{Ch}(\mathbf{A})$ de complejos de cocadenas. Resulta que esta categoría también es abeliana. La asignación $A^\bullet \mapsto H^i(A^\bullet)$ que manda cada complejo de cocadenas a su i -ésimo objeto de cohomología es de hecho un funtor

$$H^i : \text{Ch}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{A}.$$

6. En cualquier categoría abeliana se puede probar el **lema de la serpiente** y, equivalentemente, la existencia de **sucesión exacta larga en cohomología**. Esto es, dada una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0$$

de complejos de cocadenas, existe un morfismo $\delta_i : H^i(C^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(A^\bullet)$ y una sucesión exacta

$$\dots \xrightarrow{\delta_{i-1}} H^i(A^\bullet) \longrightarrow H^i(B^\bullet) \longrightarrow H^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta_i} H^{i+1}(A^\bullet) \longrightarrow \dots$$

7. Sólo necesitaremos considerar complejos $A^\bullet$ que sean **acotados**: esto quiere decir que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $H^n(A) = 0$ para todo $n > N$ y para todo $n < -N$. Esto nos determina una subcategoría abeliana $\text{Ch}^b(\mathbf{A})$ de complejos de cocadenas acotados.

Definición 2.6. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos categorías abelianas y $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un funtor. Decimos que F es **aditivo** si induce homomorfismos de grupos entre los grupos Hom . Además, si F es aditivo, decimos que es:

- **exacto por la izquierda**, si para toda sucesión exacta corta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ en $\mathbf{A}$, la sucesión

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

es exacta;

- **exacto por la derecha**, si para toda sucesión exacta corta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ en $\mathbf{A}$, la sucesión

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

es exacta;

- **exacto** si es exacto por la izquierda y por la derecha.

Observación 2.7. Nótese que un funtor aditivo preserva sumas directas, es decir, $F(A \oplus B) = F(A) \oplus F(B)$.

2.8. Teorema de representabilidad. Sea $\mathbf{Ab}$ la categoría de los grupos abelianos, y sea $F : \mathbf{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un funtor exacto por la izquierda. Consideremos la correspondiente categoría de pares $\int F$, y recordemos que por el teorema de densidad F puede recuperarse como un colímite $F = \text{colim}(D_F : \int F \rightarrow \text{PSh}(C))$. Una pregunta natural es si puede recuperarse como un límite directo. Para ello, introducimos la noción de par minimal. Un par (A, x) se dice que es **minimal** si todo epimorfismo de pares $(A, x) \rightarrow (B, y)$ es un isomorfismo.

Teorema 2.9 (Teorema de representabilidad). *Supongamos que para todo par (A, x) existe un par minimal (B, y) y un morfismo de pares $(A, x) \rightarrow (B, y)$. Entonces existe un conjunto*

dirigido I y un sistema directo $I \rightarrow \mathbf{A}$, $i \mapsto A_i$ de modo que F se obtiene como el siguiente límite directo de funtores representables

$$F = \varinjlim_{i \in I} \underline{A}_i.$$

Además, si F cumple que, para todo sistema directo $I' \rightarrow \mathbf{A}$,

$$F(\varinjlim_{i \in I'} X_i) = \varprojlim_{i \in I'} F(X_i),$$

entonces F es representable; es decir existe un objeto A de $\mathbf{A}$ tal que

$$F = \underline{A} = \text{Hom}(-, A).$$

Demostración. Para un par minimal (A, x) y cualesquiera dos morfismos de pares $f_1, f_2 : (B, y) \rightarrow (A, x)$, se tiene que $f_1 = f_2$. En efecto, tenemos una sucesión exacta en $\mathbf{A}$

$$B \xrightarrow{f_2 - f_1} A \xrightarrow{p} \text{coker}(f_2 - f_1) \longrightarrow 0.$$

Invirtiendo el sentido de las flechas y aplicando F , obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F(\text{coker}(f_2 - f_1)) \xrightarrow{p^*} F(A) \xrightarrow{(f_2 - f_1)^*} F(B).$$

Ahora,

$$(f_2 - f_1)^*(x) = f_2^*(x) - f_1^*(x) = y - y = 0,$$

de modo que tenemos un epimorfismo de pares $p : (A, x) \rightarrow (\text{coker}(f_2 - f_1), x)$. Ahora, como (A, x) es minimal, este morfismo es un isomorfismo, y por tanto $\text{coker}(f_2 - f_1) = A$, con lo cual $f_1 = f_2$. Esto nos permite identificar la subcategoría de los pares minimales con un conjunto dirigido I . Como todo par admite un morfismo a un par minimal, para calcular el colímite de $D_F : \int F \rightarrow \text{PSh}(C)$, basta hacerlo con los pares minimales, de modo que

$$F = \text{colim } D_F = \text{colim}_{i \in I} D_F(A_i, x_i) = \text{colim}_{i \in I} \underline{A}_i = \varinjlim_{i \in I} \underline{A}_i.$$

Finalmente, nótese que la familia $x = (x_i)_{i \in I}$ es un elemento de $\varprojlim_{i \in I} F(A_i)$. Definimos entonces

$$A = \varinjlim_{i \in I} A_i.$$

Si además F envía límites inductivos a límites proyectivos, entonces

$$F(A) = F(\varinjlim_{i \in I} A_i) = \varprojlim_{i \in I} F(A_i),$$

de modo que $x \in F(A)$. Tenemos entonces un par (A, x) . Como existe un morfismo $(A, x) \rightarrow (A', x')$ a un par minimal, entonces existe un morfismo de cualquier par al par (A', x') y en particular ha de suceder que $(A', x') = (A, x)$. Concluimos que

$$F = \underline{A}' = \underline{A},$$

de modo que F es representable. □

3. ÁLGEBRA HOMOLÓGICA 2: LA CATEGORÍA DERIVADA

Definición 3.1. Un morfismo de complejos de cocadenas $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ es un **cuasi-isomorfismo** si el morfismo inducido $f_* : H^i(A^\bullet) \rightarrow H^i(B^\bullet)$ es un isomorfismo para todo i . Se define la **categoría derivada (acotada) de A** como la categoría $D^b(A)$ con la siguiente propiedad universal: existe un único funtor $\mathcal{R} : \text{Ch}^b(A) \rightarrow D^b(A)$ tal que

1. $\mathcal{R}$ envía cuasi-isomorfismos en isomorfismos,
2. para cualquier otra categoría $\mathcal{C}$ y cualquier otro funtor $F : \text{Ch}^b(A) \rightarrow \mathcal{C}$ que envíe cuasi-isomorfismos en isomorfismos, se tiene que F factoriza por $\mathcal{R}$.

La construcción de la categoría derivada se hace por un procedimiento estándar llamado “localización”, pero que no vamos a explicar aquí. En cualquier caso, nos aproximaremos a dar una descripción de la categoría derivada. El primer paso es introducir la noción de homotopía.

Definición 3.2. Sean $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ dos morfismos de complejos de cocadenas. Una **homotopía** h entre f y g es una sucesión de morfismos $h_i : A^i \rightarrow B^{i-1}$ de forma que

$$h_{i+1} \circ d_A + d_B \circ h_i = f_i - g_i.$$

3.3. La homotopía determina una relación en los morfismos de $\text{Ch}^b(A)$. Esto nos permite cocientar por esta relación, y definir la categoría $K^b(A)$ cuyos objetos son los mismos que los de $\text{Ch}^b(A)$, pero ahora

$$\text{Hom}_{K^b(A)}(A^\bullet, B^\bullet) = \text{Hom}_{\text{Ch}^b(A)}(A^\bullet, B^\bullet) / \text{homotopía}.$$

Se ve inmediatamente de la definición de homotopía que dos morfismos homotópicos definen el mismo morfismo en las cohomologías, de modo que los funtores $H^i : \text{Ch}^b(A) \rightarrow A$ descienden a funtores $H^i : K^b(A) \rightarrow A$. Una **equivalencia de homotopía** es un morfismo en $\text{Ch}^b(A)$ que determina un isomorfismo en $K^b(A)$. Decimos que dos complejos de cocadenas son **homotópicamente equivalentes** si son isomorfos en $K^b(A)$. Es claro entonces que dos complejos homotópicamente equivalentes son cuasi-isomorfos; por tanto, el funtor $\mathcal{R} : \text{Ch}^b(A) \rightarrow D^b(A)$ desciende a un funtor $K^b(A) \rightarrow D^b(A)$.

3.4. Un complejo de cocadenas $A^\bullet$ se dice **contractible** si existe una homotopía entre la identidad $\text{id}_{A^\bullet}$ y 0. En otras palabras, $A^\bullet$ es contractible si existe un morfismo de complejos $h : A^\bullet \rightarrow A^{\bullet-1}$ tal que

$$h \circ d + d \circ h = \text{id}_{A^\bullet}.$$

3.5. Dado un morfismo $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ de complejos de cadenas, se define su **cono** como el complejo $\text{Cono}(f)^\bullet$ con

$$\text{Cono}(f)^i = B^i \oplus A^{i+1}$$

y donde el morfismo $d^i : \text{Cono}(f)^i \rightarrow \text{Cono}(f)^{i+1}$ está dado por la matriz

$$d^i = \begin{pmatrix} d_B^i & f \\ 0 & -d_A^{i+1} \end{pmatrix}.$$

Nótese que hay una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow \text{Cono}(f)^\bullet \longrightarrow A^{\bullet+1} \longrightarrow 0$$

que induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$\dots \xrightarrow{\delta_{i-1}} H^i(B^\bullet) \longrightarrow H^i(\text{Cono}(f)^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(A^\bullet) \xrightarrow{\delta_i} H^{i+1}(B^\bullet) \longrightarrow \dots$$

Por tanto, si f es un cuasi-isomorfismo, entonces $\text{Cono}(f)^\bullet$ es cuasi-isomorfo a 0.

Proposición 3.6. *Si $\text{Cono}(f)^\bullet$ es contractible, entonces f es una equivalencia de homotopía.*

Demostración. Sea $h : \text{Cono}(f)^\bullet \rightarrow \text{Cono}(f)^{\bullet-1}$ una homotopía entre $\text{id}_{\text{Cono}(f)^\bullet}$ y 0, que podemos escribir como una matriz

$$h = \begin{pmatrix} u & w \\ g & v \end{pmatrix},$$

con $u : B^\bullet \rightarrow B^{\bullet-1}$, $w : A^{\bullet+1} \rightarrow B^{\bullet-1}$, $g : B^\bullet \rightarrow A^\bullet$, $v : A^{\bullet+1} \rightarrow A^\bullet$. Tomando las componentes diagonales de la ecuación $hd + dh = \text{id}_{\text{Cono}(f)^\bullet}$ obtenemos

$$\begin{aligned} ud_B + d_B u &= \text{id}_B - fg \\ (-v)d_A + d_A(-v) &= \text{id}_A - gf. \end{aligned}$$

Por tanto, g es la inversa de f en $K^+(A)$. $\square$

3.7. Nótese que a priori puede haber complejos que no sean homotópicamente equivalentes, pero que sí sean cuasi-isomorfos, de modo que la categoría derivada no los distingue. Si queremos hallar unos representantes adecuados, debemos buscar complejos que sean isomorfos en $K^b(A)$ si y sólo si son cuasi-isomorfos. Para ello introducimos los objetos inyectivos.

Definición 3.8. Un objeto I en una categoría es **inyectivo** si, para todo monomorfismo $i : X \rightarrow Y$ y para todo morfismo $f : X \rightarrow I$, existe un morfismo $g : Y \rightarrow I$ tal que $g \circ i = f$. Llamamos **complejo inyectivo** a un complejo cuyos objetos son inyectivos.

Dualmente, un objeto P en una categoría es **proyectivo** si, para todo epimorfismo $p : X \rightarrow Y$ y para todo morfismo $f : P \rightarrow Y$, existe un morfismo $g : P \rightarrow X$ tal que $p \circ g = f$. Llamamos **complejo proyectivo** a un complejo cuyos objetos son proyectivos.

Proposición 3.9. *Sea $I^\bullet$ un complejo de cocadenas inyectivo acotado. Si $I^\bullet$ es cuasi-isomorfo a 0, entonces es contractible.*

Dualmente, si $P^\bullet$ es un complejo de cocadenas proyectivo acotado, entonces si $P^\bullet$ es cuasi-isomorfo a 0 es contractible.

Demostración. Hacemos la demostración para inyectivos, y la demostración para proyectivos es completamente análoga. Como $I^\bullet$ está acotado inferiormente, existe un N tal que $I^n = 0$ para todo $n < N$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $N = 0$. Tenemos entonces que $I^0 = \ker(d : I^1 \rightarrow I^2)$. Definimos $K^1 = I^1/I^0 = \ker(d : I^2 \rightarrow I^3)$ y obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow K^1 \longrightarrow 0.$$

Ahora, como I^0 es inyectivo, aplicando la condición al monomorfismo $I^0 \rightarrow I^1$ y a la identidad id_{I^0} , tenemos un morfismo $I^1 \rightarrow I^0$ que escinde la sucesión exacta corta, y da

un isomorfismo $I^1 = I^0 \oplus K^1$. Esto implica que K^1 también es inyectivo. Tomamos ahora $K^2 = I^2/K^1 = \ker(d : I^3 \rightarrow I^4)$, y obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow K^2 \longrightarrow 0.$$

Iterando este proceso, obtenemos sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow K^{i-1} \longrightarrow I^i \longrightarrow K^i \longrightarrow 0,$$

para cada $i > 0$, cada una de las cuales escinde como $I^i = K^{i-1} \oplus K^i$, ya que todos los K^i son inyectivos. Así visto, el morfismo $d_i : I^i \rightarrow I^{i+1}$ puede escribirse como la matriz

$$d_i = \begin{pmatrix} 0 & \text{id}_{K^i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto basta considerar la familia de morfismos $h_i : I^i \rightarrow I^{i-1}$ dados por las matrices

$$h_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \text{id}_{K^{i-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

y tenemos que $dh + hd = \text{id}_{I^\bullet}$. □

Proposición 3.10. Sean $I^\bullet$ y $J^\bullet$ complejos de cocadenas de objetos inyectivos. Todo cuasi-isomorfismo $f : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$ es una equivalencia de homotopía.

Dualmente, si $P^\bullet$ y $Q^\bullet$ son complejos de cocadenas de objetos proyectivos, entonces todo cuasi-isomorfismo $f : P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ es una equivalencia de homotopía.

Demostración. Basta ver que, si f es un cuasi-isomorfismo, entonces $\text{Cono}(f)^\bullet$ es contractible. Pero, como $\text{Cono}(f)^\bullet$ es cuasi-isomorfo a 0 y sus términos son inyectivos (ya que son suma directa de inyectivos), lo que se quiere probar se sigue de lo anterior. □

3.11. Hemos visto entonces que dos complejos inyectivos (o proyectivos) son cuasi-isomorfos si y sólo si son homotópicamente equivalentes o, lo que es lo mismo, que son isomorfos en $K^b(A)$ si y sólo si lo son en $D^b(A)$. Resulta que es posible demostrar algo aún más fuerte: la restricción del funtor $\mathcal{R} : \text{Ch}^b(A) \rightarrow D^b(A)$ a la subcategoría $\text{Ch}^b(\text{Inj } A)$ formada por los complejos inyectivos acotados desciende a un funtor plenamente fiel

$$K^b(\text{Inj } A) \longrightarrow D^b(A).$$

Dualmente, la restricción a la categoría $\text{Ch}^b(\text{Proj } A)$ de los complejos proyectivos acotados desciende a un funtor plenamente fiel

$$K^b(\text{Proj } A) \longrightarrow D^b(A).$$

La pregunta natural entonces es si estos funtores son esencialmente sobreyectivos.

Definición 3.12. Se dice que una categoría abeliana A *tiene suficientes inyectivos* si, para todo objeto A de A existe un monomorfismo $A \hookrightarrow I$, con I un objeto inyectivo.

Se dice que una categoría abeliana A *tiene suficientes proyectivos* si, para todo objeto A de A existe un epimorfismo $P \rightarrow A$, con P un objeto proyectivo.

Proposición 3.13. *Si $\mathbf{A}$ es una categoría con suficientes inyectivos, entonces todo complejo de cocadenas acotado en $\mathbf{A}$ es cuasi-isomorfo a un complejo inyectivo. En tal caso, el funtor $K^b(\text{Inj } \mathbf{A}) \rightarrow D^b(\mathbf{A})$ es una equivalencia de categorías.*

Dualmente, si $\mathbf{A}$ es una categoría con suficientes proyectivos, entonces todo complejo de cocadenas acotado en $\mathbf{A}$ es cuasi-isomorfo a un complejo proyectivo. En tal caso, el funtor $K^b(\text{Proj } \mathbf{A}) \rightarrow D^b(\mathbf{A})$ es una equivalencia de categorías.

Observación 3.14. Dado un complejo $A^\bullet$ acotado, se denomina una **resolución inyectiva** a un complejo inyectivo $I^\bullet$ junto con un cuasi-isomorfismo $\eta : A^\bullet \rightarrow I^\bullet$. Si existe tal resolución, entonces es única salvo homotopía. En tal caso, podemos identificar la imagen $\mathcal{R}(A^\bullet) = \mathcal{R}(I^\bullet) \in D^b(\mathbf{A})$ simplemente como la clase de homotopía del complejo inyectivo $I^\bullet$, a través de la equivalencia de categorías anterior. Análogamente, podemos definir la noción de **resolución proyectiva** $P^\bullet \rightarrow A^\bullet$ e identificar $\mathcal{R}(A^\bullet) = \mathcal{R}(P^\bullet) \in D^b(\mathbf{A})$ como la clase de homotopía de una resolución proyectiva $P^\bullet$.

Demostración. Hacemos la demostración en el caso inyectivo (el proyectivo es análogo) y para un complejo concentrado en grado 0; la prueba general es tediosa, pero rutinaria. Dado un objeto A de $\mathbf{A}$, se trata de construir una resolución inyectiva de A . Comenzamos por considerar un objeto inyectivo I^0 con un monomorfismo $A \hookrightarrow I^0$, y tomamos el cociente A/I^0 . Tomamos entonces otro objeto inyectivo I^1 junto con un monomorfismo $A/I^0 \hookrightarrow I^1$. Tenemos una sucesión exacta $0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow I^1$. Procediendo inductivamente, obtenemos una sucesión exacta $0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots$, y en consecuencia un cuasi-isomorfismo $A \rightarrow I^\bullet$. $\square$

Además, tomar resoluciones es funtorial.

Proposición 3.15. *Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo en una categoría abeliana $\mathbf{A}$. Si $A \rightarrow I_A^\bullet$ es una resolución inyectiva y $B \rightarrow C_B^\bullet$ es un cuasi-isomorfismo, entonces existe un único (salvo homotopía) morfismo de complejos $f^\bullet : I_A^\bullet \rightarrow C_B^\bullet$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & I_A^\bullet \\ \downarrow f & & \downarrow f^\bullet \\ B & \longrightarrow & C_B^\bullet \end{array}$$

Dualmente, si $C_A^\bullet \rightarrow A$ es un cuasi-isomorfismo y $P_B^\bullet \rightarrow B$ es una resolución proyectiva, entonces existe un único (salvo homotopía) morfismo de complejos $f^\bullet : C_A^\bullet \rightarrow P_B^\bullet$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} C_A^\bullet & \longrightarrow & A \\ \downarrow f^\bullet & & \downarrow f \\ P_B^\bullet & \longrightarrow & B \end{array}$$

Demostración. Se ve fácilmente componiendo y usando la propiedad de ser inyectivo/proyectivo para extender. $\square$

Definición 3.16. Sea $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un funtor aditivo exacto por la izquierda y supongamos que $\mathbf{A}$ tiene suficientes inyectivos. Definimos el **functor derivado por la derecha** de F

como el funtor

$$RF : D^b(A) \simeq K^b(\text{Inj } A) \rightarrow D(B) : [I^\bullet] \mapsto \mathcal{R}(F(I^\bullet)).$$

Además, para cada $i \in \mathbb{Z}$, definimos el *i -ésimo funtor derivado por la derecha de F* como el funtor

$$R^i F : A \rightarrow B : A \mapsto H^i(RF(A)),$$

donde vemos A como un complejo concentrado en grado 0.

Sea $F : A \rightarrow B$ un funtor aditivo exacto por la derecha y supongamos que A tiene suficientes proyectivos. Definimos el *funtor derivado por la izquierda de F* como el funtor

$$LF : D^b(A) \simeq K^b(\text{Proj } A) \rightarrow D(B) : [P^\bullet] \mapsto \mathcal{R}(F(P^\bullet)).$$

Además, para cada $i \in \mathbb{Z}$, definimos el *i -ésimo funtor derivado por la izquierda de F* como el funtor

$$L_i F : A \rightarrow B : A \mapsto H^{-i}(LF(A)),$$

donde vemos A como un complejo concentrado en grado 0.

Observación 3.17. Nótese que, si F es un funtor exacto por la izquierda, entonces

$$R^i F(A) = H^i(F(I^\bullet)),$$

donde $A \rightarrow I^\bullet$ es una resolución inyectiva. En particular, $R^0 F(A) = F(A)$. Similarmente, para F exacto por la derecha y una resolución proyectiva $P^\bullet \rightarrow A$. Los funtores derivados nos permiten “continuar” las sucesiones exactas por el lado por el cual el funtor original no es exacto.

Proposición 3.18. *Si $F : A \rightarrow B$ es un funtor aditivo exacto por la izquierda y A tiene suficientes inyectivos entonces, dada una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

se tiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow R^1 F(A) \rightarrow R^1 F(B) \rightarrow R^1 F(C) \rightarrow R^2 F(A) \rightarrow \dots$$

Si $F : A \rightarrow B$ es un funtor aditivo exacto por la derecha y A tiene suficientes proyectivos entonces, dada una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

se tiene una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow L_2 F(C) \rightarrow L_1 F(A) \rightarrow L_1 F(B) \rightarrow L_1 F(C) \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0.$$

Demostración. Probamos el caso exacto por la izquierda y el otro se prueba igual. Tomemos resoluciones inyectivas $A \rightarrow I_A^\bullet$, $B \rightarrow I_B^\bullet$ y $C \rightarrow I_C^\bullet$. Por la funtorialidad de las resoluciones inyectivas, obtenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow I_A^\bullet \longrightarrow I_B^\bullet \longrightarrow I_C^\bullet \longrightarrow 0.$$

Pero además, como todos estos complejos son inyectivos, tenemos que $I_B^\bullet = I_A^\bullet \oplus I_C^\bullet$. Ahora, un funtor aditivo preserva sumas directas, de modo que

$$F(I_B^\bullet) = F(I_A^\bullet) \oplus F(I_C^\bullet).$$

Por tanto, tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow F(I_A^\bullet) \longrightarrow F(I_B^\bullet) \longrightarrow F(I_C^\bullet) \longrightarrow 0.$$

Tomando la sucesión exacta larga en cohomología, se tiene lo que se quería probar. $\square$

3.19. Las resoluciones inyectivas (o proyectivas) a veces son complicadas de manejar o de describir explícitamente. En la práctica lo habitual es trabajar con resoluciones acíclicas, que aunque no sean inyectivas o proyectivas, bastan para calcular los funtores derivados.

Definición 3.20. Sea F un funtor exacto por la izquierda (resp. exacto por la derecha). Un objeto Ω de $\mathbf{A}$ es F -**acíclico** si $R^i F(\Omega) = 0$ (resp. $L_i F(\Omega) = 0$) para todo $i \neq 0$. Un **complejo acíclico** $\Omega^\bullet$ es un complejo cuyos términos son todos acíclicos. Una resolución F -acíclica de un complejo $A^\bullet$ en $\mathbf{A}$ es un cuasi-isomorfismo $A^\bullet \rightarrow \Omega^\bullet$ (resp. $\Omega^\bullet \rightarrow A^\bullet$) con $\Omega^\bullet$ acíclico.

Proposición 3.21 (Teorema de de Rham abstracto). *Sea F un funtor exacto por la izquierda (resp. exacto por la derecha), $A^\bullet$ un complejo de cadenas en $\mathbf{A}$, y $A^\bullet \rightarrow \Omega^\bullet$ (resp. $\Omega^\bullet \rightarrow A^\bullet$) una resolución F -acíclica. Entonces existe un isomorfismo*

$$RF(\mathcal{R}(A^\bullet)) \cong \mathcal{R}(F(\Omega^\bullet))$$

(resp. $LF(\mathcal{R}(A^\bullet)) \cong \mathcal{R}(F(\Omega^\bullet))$). En particular, dado un objeto A de $\mathbf{A}$,

$$R^i F(A) \cong H^i(F(\Omega^\bullet))$$

(resp. $L_i F(A) \cong H^{-i}(F(\Omega^\bullet))$).

Demostración. Lo probamos para el caso exacto por la izquierda, y el otro es igual. Sea $A \rightarrow I^\bullet$ una resolución inyectiva y $f : I^\bullet \rightarrow \Omega^\bullet$ un morfismo de complejos tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & I^\bullet \\ \downarrow \text{id}_A & & \downarrow f \\ A & \longrightarrow & \Omega^\bullet \end{array}$$

(sabemos que este complejo existe por (TO DO: REF)). Tanto la identidad como las dos aplicaciones horizontales son cuasi-isomorfismos, y por tanto f también lo es. Tenemos entonces que el complejo $\text{Cono}(f)^\bullet$ es cuasi-isomorfo a 0. Recordemos además que existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I^\bullet \longrightarrow \text{Cono}(f)^\bullet \longrightarrow \Omega^{\bullet+1} \longrightarrow 0.$$

Ahora, como $\Omega^\bullet$ es acíclico, tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow F(I^\bullet) \longrightarrow F(\text{Cono}(f)^\bullet) \longrightarrow F(\Omega^{\bullet+1}) \longrightarrow 0.$$

Tomando la correspondiente sucesión exacta larga en cohomología, tenemos

$$\cdots \rightarrow H^i(F(\Omega^\bullet)) \rightarrow R^i F(A) \rightarrow H^i(F(\text{Cono}(f)^\bullet)) \rightarrow H^{i+1}(F(\Omega^\bullet)) \rightarrow \cdots.$$

Ahora, como $\text{Cono}(f)^\bullet$ es F -acíclico y cuasi-isomorfo a 0, entonces $H^i(F(\text{Cono}(f)^\bullet)) = 0$ para todo i , de modo que obtenemos isomorfismos $H^i(F(\Omega^\bullet)) \cong R^i F(A)$ para todo i . $\square$

4. TEORÍA DE HACES EN VARIEDADES

4.1. Para definir la teoría de haces en variedades, vamos a definirla en una clase de espacios ligeramente más general, que incluye también a subespacios cerrados de variedades diferenciables que podrían no ser subvariedades regulares. Denotamos entonces por $\mathbf{Var}$ la subcategoría de la categoría de espacios topológicos cuyos objetos son espacios topológicos homeomorfos a algún subespacio topológico de algún $\mathbb{R}^n$. Esta categoría incluye a todas las variedades diferenciables, pero también a todos sus subespacios cerrados. Se pueden definir haces de módulos sobre cualquier anillos, o sobre cualquier haz de anillos, más generalmente, pero nosotros sólo vamos a trabajar con haces de espacios vectoriales reales. Denotamos por $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ la categoría de los $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales.

Definición 4.2. Sea X un objeto de $\mathbf{Var}$ y denotemos por $\mathbf{Op}(X)$ la categoría cuyos objetos son los subconjuntos abiertos de X y sus morfismos son las inclusiones entre ellos. Un *haz (de $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales)* sobre X es un funtor

$$\mathcal{F} : \mathbf{Op}(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$$

que satisface la siguiente propiedad:

- Para todo subconjunto abierto $U \subset X$, para todo recubrimiento por abiertos $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de U y para toda colección de elementos $\{s_i \in \mathcal{F}(U_i) : i \in I\}$ de modo que, $\forall i, j \in I$

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$$

existe un único elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ de modo que $s_i = s|_{U_i}$ para todo $i \in I$.

Observación 4.3. Hacemos algunos comentarios:

1. De la definición se sigue directamente que $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$, ya que debe ser un conjunto final. También se sigue que, si $U, V \subset X$ son subconjuntos abiertos disjuntos, entonces

$$\mathcal{F}(U \cap V) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{F}(V).$$

2. Un ejemplo sencillo de haz en una variedad M es el haz C_M^∞ que envía cada abierto $U \subset M$ al espacio $C^\infty(U, \mathbb{R})$ de las aplicaciones diferenciables $U \rightarrow \mathbb{R}$. Otro haz que será muy importante para nosotros es el *haz constante* $\mathbb{R}_X$, que asigna a cada abierto el espacio $\mathbb{R}_X(U)$ de las aplicaciones localmente constantes $U \rightarrow \mathbb{R}$.
3. Un morfismo de haces será simplemente una transformación natural entre ellos (en tanto que son funtores). Así, podemos considerar una categoría $\mathbf{Sh}_{\mathbb{R}}(X)$ cuyos objetos son los haces (de $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales) en X .
4. Dado un haz $\mathcal{F}$ en X y un punto $x \in X$ definimos su *espiga* en x como el colímite

$$\mathcal{F}_x = \mathrm{colim}_{x \in U} \mathcal{F}(U) = \{(U, s) : x \in U, s \in \mathcal{F}(U)\} / \sim,$$

donde $(U, s) \sim (U', s')$ si existe un abierto $U'' \subset U \cap U'$ con $x \in U''$ y $s|_{U''} = s'|_{U''}$.

Definición 4.4. Una *sucesión exacta de haces* es una sucesión de morfismos de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

tal que la sucesión inducida en las espigas

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \longrightarrow 0,$$

es una sucesión exacta en $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.

Observación 4.5. Algunos comentarios:

- La definición de suma directa $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ de dos haces es obvia, y es fácil comprobar que los morfismos de haces forman un grupo abeliano (de hecho, un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial), de modo que $\mathbf{Sh}_{\mathbb{R}}(X)$ es una categoría aditiva. Además, con esta noción de sucesión exacta de haces, tenemos nociones de núcleo y de conúcleo y no es difícil comprobar que entonces la categoría $\mathbf{Sh}_{\mathbb{R}}(X)$ es una categoría abeliana.
- El núcleo $\ker f$ de un morfismo de haces $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ cumple que

$$\ker f(U) = \ker(f(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)),$$

para todo $U \subset X$. Sin embargo, no se da la misma situación con el haz coker f , es decir, en general

$$\mathrm{coker} f(U) \neq \mathrm{coker}(f(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)).$$

Se pueden hallar muchas apariciones de este fenómeno: por ejemplo, el logaritmo de una función de variable compleja está bien definido localmente, pero no globalmente.

- Podemos considerar el **funtor de secciones globales**

$$\Gamma : \mathbf{Sh}_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}, \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X).$$

De lo que acabamos de comentar, se sigue que Γ es un funtor exacto por la izquierda, pero que no es exacto por la derecha. Su funtor derivado será precisamente el que da la **cohomología de haces**.

4.6. El haz de Godement. Para poder construir los funtores derivados, vamos a ver que, en efecto, la categoría $\mathbf{Sh}_{\mathbb{R}}(X)$ tiene suficientes inyectivos. Dado un haz $\mathcal{F}$, se define el correspondiente **haz de Godement** $\mathcal{G}(\mathcal{F})$

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}) : U \mapsto \left\{ s : U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x : s(x) \in \mathcal{F}_x \right\}.$$

Nótese que todo elemento de $\mathcal{F}(U)$ es naturalmente un elemento de $\mathcal{G}(\mathcal{F})(U)$, pero no necesariamente al revés. Por tanto, tenemos un monomorfismo $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F})$. Además, el haz $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ es claramente inyectivo, porque cualquier morfismo a él puede trivialmente extenderse por 0.

Como ya vimos, el hecho de que haya suficientes inyectivos implica la existencia de resoluciones inyectivas. Si aplicamos el mismo argumento aquí, pero en vez de tomar una resolución inyectiva arbitraria cada vez, tomamos la resolución de Godement, obtenemos una resolución inyectiva canónica asociada a todo haz $\mathcal{F}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}^0(\mathcal{F}) = \mathcal{G}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{G}^1(\mathcal{F}) \longrightarrow \dots,$$

denominada la **resolución de Godement**.

Definición 4.7. Dado un objeto $\mathcal{F}$ de $\text{Sh}_{\mathbb{R}}(X)$ y un número entero $k \in \mathbb{Z}$, definimos el *k-ésimo grupo de cohomología de haces de $\mathcal{F}$* como el espacio vectorial

$$H^k(\mathcal{F}) = R^k\Gamma(\mathcal{F}).$$

Trabajar directamente con el haz de Godement es complicado, y en la práctica los funtores derivados suelen calcularse empleando otras resoluciones acíclicas diferentes. Algunas de las más útiles son las resoluciones por haces finos, que son aquellos que admiten particiones de la unidad.

Definición 4.8. Un haz $\mathcal{F}$ en X es *fino* si para cualquier recubrimiento localmente finito $X = \bigcup_i U_i$ de X existe una familia de morfismos de haces $\{\rho_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}\}$ (llamados *particiones de la unidad*) tal que

1. $\sum_i \rho_i = 1$,
2. $\rho_i(\mathcal{F}_x) = 0$ para todo x en algún entorno del complemento de U_i .

(TO DO: Ejemplo: PDUs)

Proposición 4.9. *Todo haz fino es Γ -acíclico.*

Demostración. En primer lugar, veamos que si $\mathcal{F}$ es un haz fino, entonces se tiene que $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. En efecto, si

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta y $h \in \mathcal{H}(X)$ es una sección, podemos tomar un recubrimiento localmente finito $X = \bigcup_i U_i$ de forma que las restricciones $h|_{U_i}$ levantan a secciones $g_i \in \mathcal{G}(U_i)$ y, para i, j con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, tenemos secciones $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ con $g_i - g_j = \alpha(f_{ij})$. Podemos tomar entonces una partición de la unidad ρ_i y definir $f_i = \sum_j \rho_j(f_{ij})$, de modo que las secciones locales $g'_i = g_i - \alpha(f_i)$ cumplen

$$g'_i - g'_j = g_i - g_j - \alpha\left(\sum_k \rho_k(f_{ik} - f_{jk})\right) = g_i - g_j - \alpha(f_{ij}) = 0$$

y por tanto pegan a una sección global $g' \in \mathcal{G}(X)$ con $\beta(g') = h$.

Consideremos ahora el haz de Godement $\mathcal{G}(\mathcal{F})$, y tomemos el cociente $\mathcal{K}^1 := \mathcal{G}(\mathcal{F})/\mathcal{F}$. Los morfismos ρ_i levantan naturalmente a morfismos $\tilde{\rho}_i : \mathcal{G}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F})$, que a su vez descienden a morfismos $\bar{\rho}_i : \mathcal{K}^1 \rightarrow \mathcal{K}^1$. Por construcción, estos $\bar{\rho}_i$ son particiones de la unidad. Por tanto $\mathcal{K}^1$ también es un haz fino. Iterando este proceso, podemos descomponer la resolución inyectiva $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{K}^\bullet)$ en sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^i \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{K}^i) \longrightarrow \mathcal{K}^{i+1} \longrightarrow 0.$$

Como cada uno de los $\mathcal{K}^i$ son finos, el funtor Γ preserva estas sucesiones exactas y obtenemos que el complejo $\Gamma(\mathcal{G}(\mathcal{K}^\bullet))$ es exacto. Por tanto, sus grupos de cohomología son nulos, lo que quiere decir que $R\Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{R}(\Gamma(\mathcal{G}(\mathcal{K}^\bullet))) = 0$. $\square$

4.10. Imágenes directas. Podemos introducir una versión relativa del funtor de secciones globales. Dados un haz $\mathcal{F}$ en X y una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$, definimos el *haz imagen directa de $\mathcal{F}$ por f* como el haz sobre Y

$$f_*\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(U)).$$

Esto determina un funtor

$$f_* : \text{Sh}_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow \text{Sh}_{\mathbb{R}}(Y), \mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}.$$

Nótese que el funtor de secciones Γ en X es igual al funtor $a_{X,*}$, donde $a_X : X \rightarrow \text{pt}$ es el morfismo terminal al punto. El funtor f_* es exacto por la izquierda, de forma que podemos definir su funtor derivado

$$Rf_* : D^b(X) \rightarrow D^b(Y).$$

Resulta que el funtor f_* tiene un adjunto por la izquierda, el **functor imagen inversa**

$$f^{-1} : \text{Sh}_{\mathbb{R}}(Y) \rightarrow \text{Sh}_{\mathbb{R}}(X), \mathcal{F} \mapsto f^{-1}\mathcal{F}$$

definido como la hacificación $f^{-1} = (f^p)^{\#}$ del prehaz

$$f^p\mathcal{F}(U) = \text{colim}_{f(U) \subset V} \mathcal{F}(V).$$

Además, el funtor f^{-1} es exacto, de modo que define directamente un funtor entre las categorías derivadas

$$f^{-1} : D^b(Y) \rightarrow D^b(X),$$

que es el adjunto por la izquierda de Rf_* .

4.11. Soportes compactos. A parte del funtor de secciones Γ , también es interesante considerar el **functor de secciones con soporte compacto**

$$\Gamma_c : \text{Sh}_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{R}}, \mathcal{F} \mapsto \Gamma_c(\mathcal{F}) = \{s \in \mathcal{F}(X) : \text{sop}(s) \subset K, K \subset X \text{ compacto}\},$$

donde $\text{sop}(s) = \{x \in X : s(x) \neq 0\}$. Este funtor también es exacto por la izquierda, y su funtor derivado da los **grupos de cohomología con soporte compacto**

$$H_c^k(\mathcal{F}) = R^k\Gamma_c(\mathcal{F}).$$

También es posible considerar una versión relativa: asociada a cada aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ se define un funtor

$$f_! : \text{Sh}_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow \text{Sh}_{\mathbb{R}}(Y),$$

la imagen directa con soporte compacto, que asocia cada haz $\mathcal{F}$ en X al haz $f_!\mathcal{F}$ con

$$f_!\mathcal{F}(U) = \{s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U)) : f|_{\text{sop}(s)} : \text{sop}(s) \rightarrow U \text{ es propia}\}.$$

Nótese que hay una transformación natural $f_! \rightarrow f_*$, que es un isomorfismo cuando f es propia. De nuevo, el funtor $f_!$ es exacto por la izquierda, de modo que podemos considerar su funtor derivado por la derecha

$$Rf_! : D^b(X) \rightarrow D^b(Y).$$

Vimos que el funtor f_* tiene un adjunto por la izquierda, el funtor imagen inversa f^{-1} . Una pregunta natural sería entonces si el funtor $f_!$ también tiene un adjunto. En el caso que f es propia, entonces $f_* = f_!$, cuyo adjunto por la izquierda es f^{-1} . Por otra parte, el funtor $f_!$ en general no tiene un funtor adjunto por la derecha, pero el funtor $Rf_!$ sí que lo tiene: la **imagen inversa excepcional**

$$f^! : D^b(Y) \rightarrow D^b(X).$$

No probaremos la existencia de $f^!$ en total generalidad, pero podemos hacer el caso particular en que $f = a_M$ es el morfismo terminal $a_M : M \rightarrow *$.

Teorema 4.12 (Dualidad de Verdier). *Para toda variedad diferenciable M , existe un objeto $\mathcal{D}_M = a_M^! \mathbb{R}$ de $D^b(M)$ que cumple que, para todo haz $\mathcal{F}$ en M ,*

$$\mathrm{Hom}_{D^b(M)}(\mathcal{F}, \mathcal{D}_M) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}})}(R\Gamma_c(\mathcal{F}), \mathbb{R}).$$

Este objeto $\mathcal{D}_M$ se denomina el **complejo dualizante** de M .

Demostración. Comenzamos tomando la resolución de Godement $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^\bullet(\mathcal{F})$. Si existe, el objeto $\mathcal{D}_M$ está caracterizado por la propiedad de que

$$\mathrm{Hom}_{D^b(M)}(\mathcal{F}, \mathcal{D}_M) = \mathrm{Hom}_{K^b(\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}})}(\Gamma_c(\mathcal{G}^\bullet(\mathcal{F})), \mathbb{R}).$$

Si representamos $\mathcal{D}_M$ por un complejo inyectivo $\mathcal{D}_M^\bullet$, entonces, para cada $k \in \mathbb{Z}$, la k -ésima entrada de este complejo está caracterizada por la igualdad

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\mathbb{R}}(M)}(\mathcal{F}, \mathcal{D}_M^{-k}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}}(\Gamma_c(\mathcal{G}^k(\mathcal{F})), \mathbb{R}) = \Gamma_c(\mathcal{G}^k(\mathcal{F}))^*.$$

Finalmente, la existencia de $\mathcal{D}_M^{-k}$ se sigue del teorema de representabilidad aplicado al funtor

$$F^k : \mathrm{Sh}_{\mathbb{R}}(M)^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}, \quad \mathcal{F} \mapsto \Gamma_c(\mathcal{G}^k(\mathcal{F}))^*,$$

de modo que $F^k = \underline{\mathcal{D}_M^{-k}}$. □

5. COHOMOLOGÍA EN VARIEDADES

Definición 5.1. Sea X una objeto de Var . Para cada $k \in \mathbb{Z}$, se define el **k -ésimo grupo de cohomología de X** (con coeficientes en $\mathbb{R}$) como el grupo de cohomología de haces

$$H^k(X, \mathbb{R}) := H^k(\underline{\mathbb{R}}_X),$$

donde $\underline{\mathbb{R}}_X$ es el haz constante $\mathbb{R}$ en X .

Más generalmente, si (X, A) es un par formado por un objeto X de Var y un subespacio $A \subset X$, entonces se define el **k -ésimo grupo de cohomología relativa de (X, A)** (con coeficientes en $\mathbb{R}$) como el grupo de cohomología de haces

$$H^k(X, A; \mathbb{R}) := H^k(j_! \underline{\mathbb{R}}_U),$$

donde $j : U \rightarrow X$ es la inclusión del complemento $U = X \setminus A$.

Observación 5.2. Nótese que $H^k(X, \mathbb{R}) = H^k(X, \emptyset; \mathbb{R})$.

5.3. Axiomas de Eilenberg–Steenrod. Los grupos de cohomología se pueden definir de manera axiomática como una colección de funtores contravariantes H^k , para $k \in \mathbb{Z}$, de

la categoría de pares (X, A) a la categoría de grupos abelianos que cumplen las propiedades que enunciamos a continuación. De ahora en adelante, si f es una aplicación continua entre pares, denotamos $f^* = H^k(f)$ para cualquier k .

5.3.1. Axioma de escisión. Dado un par (X, A) y un subconjunto $Z \subset A$ cuya adherencia está totalmente contenida en el interior de A , entonces la inclusión $i : (X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X, A)$ determina un isomorfismo

$$i^* : H^k(X, A; \mathbb{R}) \longrightarrow H^k(X \setminus Z, A \setminus Z; \mathbb{R})$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.

5.3.2. Axioma de dimensión. $H^0(*) = \mathbb{R}$ y $H^k(*) = 0$ para todo $k \neq 0$.

5.3.3. Axioma de aditividad. Si $X = \coprod_i X_i$ es una unión disjunta, entonces $H^k(X, \mathbb{R}) = \bigoplus_i H^k(X_i, \mathbb{R})$.

5.3.4. Axioma de exactitud. Todo par (X, A) determina una sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \rightarrow H^k(X, A; \mathbb{R}) \xrightarrow{j^*} H^k(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{i^*} H^k(A, \mathbb{R}) \rightarrow H^{k+1}(X, A; \mathbb{R}) \rightarrow \cdots,$$

donde $i : A \rightarrow X$ y $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ son las inclusiones naturales.

5.3.5. Axioma de homotopía. Si $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son dos aplicaciones relativamente homotópicas, entonces $f^* = g^*$.

Teorema 5.4. *Los grupos de cohomología que hemos definido cumplen los axiomas de Eilenberg–Steenrod.*

Demostración. El axioma de dimensión es inmediato, mientras que el de aditividad se sigue de el hecho de que $\mathbb{R}_X$ es un haz. Para ver la propiedad de escisión, observamos que si $Z \subset A$ es un subconjunto cuya adherencia está contenida en el interior de A , entonces $U = X \setminus A = (X \setminus Z) \setminus (A \setminus Z)$, por lo que tenemos un triángulo de inclusiones

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j'} & X \setminus Z \\ & \searrow j & \downarrow i \\ & & X. \end{array}$$

Por functorialidad, tenemos $j_! \mathbb{R}_U = (i_* \circ (j')_!)(\mathbb{R}_U)$, mientras que por la adjunción $i_* \dashv i^{-1}$ tenemos un isomorfismo

$$i^* : R\Gamma(j_! \mathbb{R}_U) \longrightarrow R\Gamma((j')_! \mathbb{R}_U).$$

El axioma de exactitud se sigue de la sucesión exacta de haces

$$0 \longrightarrow j_! \mathbb{R}_U \longrightarrow \mathbb{R}_X \longrightarrow i_* \mathbb{R}_A \longrightarrow 0,$$

donde $i : A \rightarrow X$ es la inclusión. Para demostrar el axioma de homotopía, necesitaremos comparar la cohomología de haces con otra teoría de cohomología que lo satisfaga de forma natural. Esto lo haremos a continuación. $\square$

Definición 5.5. Se define el **complejo de de Rham** $\Omega^\bullet(M)$ asociado a una variedad diferenciable M como el complejo de cadenas

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Dado $k \in \mathbb{Z}$, se define el *k -ésimo grupo de cohomología de de Rham* de M como el grupo de cohomología

$$H_{\text{dR}}^k(M) = H^k(\Omega^\bullet(M)) = \frac{\ker(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))}{d(\Omega^{k-1}(M))}.$$

5.6. Nótese la funtorialidad de las construcciones. Para cada aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ tenemos una aplicación inducida $f^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ que envía cada forma diferenciable a su pull-back. Veamos que, además, la cohomología de de Rham es invariante por homotopía. Puesto que toda aplicación continua se puede aproximar por aplicaciones diferenciables, bastará considerar homotopías diferenciables entre aplicaciones diferenciables.

Proposición 5.7. Sean M y N dos variedades diferenciables, $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ dos aplicaciones diferenciables y $f : M \times [0, 1] \rightarrow N$ una homotopía diferenciable entre f_0 y f_1 . Entonces existe una homotopía h entre los morfismos de complejos $f_0^*, f_1^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$.

Demostración. Basta demostrar que existe una homotopía h_0 entre los morfismos de complejos $i_0^*, i_1^* : \Omega^\bullet(M \times [0, 1]) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$, donde $i_0, i_1 : M \rightarrow M \times [0, 1]$ son las inclusiones $i_0(x) = (x, 0)$ e $i_1(x) = (x, 1)$. En efecto, como $f_0 = f \circ i_0$ y $f_1 = f \circ i_1$, si tomamos $h = h_0 \circ f^*$ tenemos que, para toda forma diferencial α ,

$$h(d\alpha) + d(h\alpha) = h_0(f^*d\alpha) + d(h_0f^*\alpha) = (h_0d + dh_0)(f^*\alpha) = (i_1^* - i_0^*)(f^*\alpha) = (g^* - f^*)(\alpha).$$

Finalmente, la homotopía h_0 puede construirse como la colección de aplicaciones

$$h_0 : \Omega^k(M \times [0, 1]) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

$$\alpha \longmapsto \int_0^1 i_{\partial_t} \omega dt,$$

donde t es la coordenada en $[0, 1]$. En efecto, para ver que $h_0d + dh_0 = i_1^* - i_0^*$ basta calcular en coordenadas locales $x^1, \dots, x^n$. Por la linealidad de h_0 , basta probarlo en los casos

1. $\alpha = \alpha(x, t) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}$
2. $\alpha = \alpha(x, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

Para el caso 1

$$\begin{aligned} d(h_0\alpha) &= d \left[\left(\int_0^1 \alpha(t, x) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \right] \\ &= \partial_j \left(\int_0^1 \alpha(t, x) dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \\ &= \left(\int_0^1 \partial_j \alpha(t, x) dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_0(d\alpha) &= h(\partial_j \alpha(t, x) dt \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}) \\
&= \int_0^1 \partial_j \alpha(t, x) i_{\partial_t}(dt \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}) dt \\
&= - \left(\int_0^1 \partial_j \alpha(t, x) dt \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}.
\end{aligned}$$

Luego $dh_0(\alpha) - h_0d(\alpha) = 0$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
(i_0^* dt)_{(x,t)} &= d(t \circ i_0)_{(x,t)} = d(0) = 0 \\
(i_1^* dt)_{(x,t)} &= d(t \circ i_1)_{(x,t)} = d(1) = 0.
\end{aligned}$$

Ahora, para el caso 2 tenemos que $i_{\partial_t} \alpha = 0$, luego $dh_0 \alpha = 0$, mientras que

$$h_0(d\alpha) = \left(\int_0^1 \partial_t \alpha(t, x) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = (\alpha(1, x) - \alpha(0, x)) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = i_1^* \alpha - i_0^* \alpha.$$

En ambos casos, concluimos que h_0 da una homotopía entre i_0^* e i_1^* . $\square$

Corolario 5.8 (Lema de Poincaré). *Los grupos de cohomología de de Rham de $\mathbb{R}^n$ son*

$$H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. Basta tomar una equivalencia homotópica entre $\mathbb{R}^n$ y un punto. $\square$

Veamos ahora que la cohomología que hemos definido de hecho coincide con la de de Rham.

Teorema 5.9. *Sea M una variedad diferenciable. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ existe un isomorfismo*

$$H^k(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M).$$

Demostración. Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que $df = 0$ si y sólo si es localmente constante. Por tanto, $\underline{\mathbb{R}}_M$ es el núcleo del homomorfismo de haces $d : \Omega_M^0 \rightarrow \Omega_M^1$, y por tanto tenemos un cuasi-isomorfismo $\underline{\mathbb{R}}_M \rightarrow \Omega_M^\bullet$. De hecho, este cuasi-isomorfismo es una resolución Γ -acíclica, ya que el complejo $\underline{\mathbb{R}}_M \rightarrow \Omega_M^\bullet$ es exacto y cada uno de los $\Omega_M^\bullet$ es un haz Γ -acíclico. En efecto, para cada punto $x \in M$ podemos tomar un entorno contractible U de x y, por la invariancia homotópica de la cohomología de de Rham, tenemos que el complejo $\underline{\mathbb{R}}_M(U) \rightarrow \Omega^\bullet(U)$ es exacto. Por otra parte, la existencia de particiones diferenciables de la unidad garantiza que los haces $\Omega_M^\bullet$ son finos, y por tanto, Γ -acíclicos. Concluimos aplicando el teorema de de Rham abstracto. $\square$

Corolario 5.10. *Los grupos $H^k(-, \mathbb{R})$ son invariantes por homotopía.*

5.11. Cohomología singular. Otra teoría de cohomología que es equivalente a $H^k(-, \mathbb{R})$ es la cohomología singular. Para definirla se consideran las cadenas singulares: recordemos que una *k -cadena singular* en X es una aplicación continua $\sigma : [0, 1]^k \rightarrow X$. Para cada k , se define el grupo $C_k(X)$ como el grupo abeliano libre generado por las k -cadenas singulares, y se define el operador de *borde*

$$\partial_k : C_{k+1}(X) \longrightarrow C_k(X)$$

como

$$\partial\sigma(t^1, \dots, t^k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} [\sigma(t^1, \dots, t^{i-1}, 1, t^i, \dots, t^k) - \sigma(t^1, \dots, t^{i-1}, 0, t^i, \dots, t^k)].$$

Se define el grupo de las k -cocadenas singulares ($\mathbb{R}$ -valoradas) como $C^k(X, \mathbb{R}) = \text{Hom}(C_k(X), \mathbb{R})$. Esto determina un complejo de cocadenas $C^\bullet(X, \mathbb{R})$, con $d_k = \partial_k^*$. Los grupos de cohomología

$$H_{\text{sing}}^i(X, \mathbb{R}) := H^i(C^\bullet(X, \mathbb{R}))$$

se denominan los **grupos de homología singular**.

Si σ es una k -cadena singular en una variedad M y $\alpha \in \Omega^k(M)$ es una k -forma, se puede definir el número

$$\int_{\sigma} \alpha \in \mathbb{R}$$

Por el teorema de Stokes, si $d\alpha = 0$, entonces el número anterior no depende de la clase de σ , de modo que obtenemos un homomorfismo en las cohomologías

$$I_{\text{dR}} : H_{\text{dR}}^k(M) \longrightarrow H_{\text{sing}}^k(M, \mathbb{R}), [\alpha] \mapsto \int_{-} \alpha.$$

Teorema 5.12 (de Rham). *Para todo $k \in \mathbb{Z}$, el homomorfismo $I_{\text{dR}} : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_{\text{sing}}^k(M, \mathbb{R})$ es un isomorfismo.*

Demostración. Comenzamos por ver que se tiene una resolución Γ -acíclica $\underline{\mathbb{R}}_M \rightarrow C^\bullet(-, \mathbb{R})$, donde cada $C^i(-, \mathbb{R})$ es el haz que asocia a cada abierto $U \subset M$ su grupo de k -cocadenas singulares $\mathbb{R}$ -valoradas. Esto es cierto por los siguientes motivos:

1. $H_{\text{sing}}^0(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{|\pi_0(X)|}$, para todo X , luego tenemos exactitud en $\underline{\mathbb{R}}_M \rightarrow C^0(-, \mathbb{R})$,
2. los grupos de cohomología singular son invariantes por homotopía cumplen el axioma de la dimensión, luego tenemos exactitud en el resto de términos,
3. los haces $C^k(-, \mathbb{R})$ son finos (por la existencia de particiones de la unidad), y por tanto Γ -acíclicos.

La aplicación I_{dR} viene de un emparejamiento entre complejos

$$I_{\text{dR}}^\bullet : \Omega^\bullet(M) \times C^\bullet(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha, \sigma) \mapsto \int_{\sigma} \alpha,$$

de modo que se tiene un diagrama de complejos

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^\bullet(M) & \xrightarrow{\text{ci}} & R\Gamma(\underline{\mathbb{R}}_M) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow I_{\text{dR}}^\bullet & \nearrow \text{ci} & \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & C^\bullet(M, \mathbb{R}), & & \end{array}$$

donde las flechas marcadas con “ci” son cuasi-isomorfismos porque las resoluciones acíclicas computan los funtores derivados. Por tanto, $I_{\text{dR}}^\bullet$ también es un cuasi-isomorfismo, que es justamente lo que queríamos probar. $\square$

5.13. Cohomología celular. La forma más efectiva en la práctica de calcular grupos de cohomología es utilizar una descomposición en celdas. Dada una variedad diferenciable M de dimensión n , una **descomposición en celdas** de M es una sucesión de espacios

topológicos

$$\emptyset = M_{-1} \subset M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k \subset M_{k+1} \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = M,$$

donde cada pieza M_k , llamada el ***k-esqueleto*** de la descomposición, se obtiene de la anterior M_{k-1} pegando una cantidad finita $\{e_1, \dots, e_{c_k}\}$ de espacios, denominados k -celdas, todos ellos homeomorfos a la bola cerrada unidad en $\mathbb{R}^k$, a lo largo de su frontera. El número

$$\chi(M) = \sum_k (-1)^k c_k$$

se denomina la ***característica de Euler*** de M .

Se tiene entonces un isomorfismo

$$H^k(M_k, M_{k-1}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{c_k},$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. Estos grupos encajan en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^k(M_{k+1}, \mathbb{R}) \cong H^k(M, \mathbb{R}) & & H^k(M_{k+1}, \mathbb{R}) = 0 & & \\ & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & H^k(M_k, \mathbb{R}) & & & & \\ & \nearrow & \nwarrow & \nearrow & \nwarrow & & \\ \cdots \rightarrow H^{k-1}(M_{k-1}, M_{k-2}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\quad} & H^k(M_k, M_{k-1}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\quad} & H^{k+1}(M_{k+1}, M_k; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\quad} & \cdots \\ & \searrow & \nearrow & & \searrow & & \\ & H^{k-1}(M_{k-1}, \mathbb{R}) & & & H^{k+1}(M_{k+1}, \mathbb{R}) & & \end{array}$$

Este diagrama nos dice que podemos considerar el ***complejo celular*** $CH^\bullet(M, \mathbb{R})$ con $CH^k(M, \mathbb{R}) = H^k(M_k, M_{k-1}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{c_k}$ y que sus grupos de cohomología coinciden con los grupos $H^\bullet(M, \mathbb{R})$. Concluimos que

$$\chi(M) = \chi(R\Gamma(\mathbb{R}_M)) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(M, \mathbb{R}).$$

Aquí, recordamos que la característica de Euler de un complejo $A^\bullet$ de espacios vectoriales se define como

$$\chi(A^\bullet) = \sum_k (-1)^k \dim A^k.$$

Esta función es aditiva, en el sentido de que, si $0 \rightarrow A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de complejos, entonces

$$\chi(B^\bullet) = \chi(A^\bullet) + \chi(C^\bullet).$$

Ejercicio 5.14. Veamos ahora algunos ejemplos.

1. **Esferas.** Una n -esfera S^n admite una descomposición celular con dos celdas: una 0-celda y una n -celda. Por tanto, su complejo celular $CH^\bullet(S^n, \mathbb{R})$ es

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0.$$

Por tanto,

$$H^k(S^n, \mathbb{R}) = CH^k(S^n, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2. **Superficies compactas orientables.** Una superficie compacta orientable de género g , que denotamos por Σ_g , puede verse como un polígono de $4g$ lados con una

cierta relación de pegado de los mismos. De aquí se obtiene una descomposición celular de Σ_g con una 0-celda, $2g$ 1-celdas, y 1 2-celda. El complejo celular $CH^\bullet(\Sigma_g, \mathbb{R})$ se escribe entonces como

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2g} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0,$$

y todas las aplicaciones de este complejo son 0, por las relaciones de pegado de la superficie. Por tanto,

$$H^k(\Sigma_g, \mathbb{R}) = CH^k(\Sigma_g, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 2 \\ \mathbb{R}^{2g} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En particular, recuperamos la conocida fórmula para la característica de Euler

$$\chi(M) = 2 - 2g.$$

5.15. Cohomología con soportes compactos. Hemos introducido los grupos de cohomología de X como los funtores derivados del funtor Γ aplicados al haz constante $\underline{R}_X$. Si en vez de Γ utilizamos el funtor Γ_c de secciones con soporte compacto, obtenemos los **grupos de cohomología con soporte compacto de X** (con coeficientes en $\mathbb{R}$), definidos como

$$H_c^k(X, \mathbb{R}) := H_c^k(X, \underline{R}_X) = R^k \Gamma_c(\underline{R}_X).$$

Para una variedad diferenciable M , también podemos definir los espacios de formas diferenciales con soporte compacto

$$\Omega_c^k(M) = \left\{ \alpha \in \Omega^k(M) : \text{sop}(\alpha) \subset K, K \subset M \text{ compacto} \right\} = \Gamma_c(\Omega_M^k),$$

donde $\text{sop}(\alpha) = \{x \in M : \alpha_x \neq 0\}$. La diferencial exterior de una forma con soporte compacto también tiene soporte compacto; se obtiene entonces el **complejo de de Rham con soporte compacto**

$$\Omega_c^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_c^k(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \cdots,$$

cuyos grupos de cohomología son los **grupos de cohomología de de Rham con soporte compacto**

$$H_{\text{dR},c}^k(M) = H^k(\Omega_c^\bullet(M)) = \frac{\ker(d : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M))}{d(\Omega_c^{k-1}(M))}.$$

El teorema de de Rham abstracto da automáticamente un isomorfismo

$$H_{\text{dR},c}^k(M) \cong H_c^k(M, \mathbb{R}),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Proposición 5.16 (Lema de Poincaré para soporte compacto). *Los grupos de cohomología con soporte compacto de $\mathbb{R}^n$ son*

$$H_c^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Demostración. Consideramos la esfera n -dimensional S^n y la inclusión natural $j : \mathbb{R}^n \hookrightarrow S^n$ definida por compactificación por un punto $\infty \in S^n$. Nótese que el funtor $\Gamma_c :$

$\text{Sh}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{R}}$ ahora puede descomponerse como $\Gamma_c = \Gamma \circ j_!$. Como $j_!$ es un funtor exacto, tenemos que, para todo haz $\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}^n$

$$H_c^k(\mathcal{F}) = R^k\Gamma_c(\mathcal{F}) = R^k\Gamma(j_!\mathcal{F}) = H^k(j_!\mathcal{F}).$$

En particular, podemos identificar la cohomología con soportes compactos como una cohomología relativa

$$H_c^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = H_c^k(\underline{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}^n}) = H^k(j_!\underline{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}^n}) = H^k(S^n, \infty; \mathbb{R}).$$

Por tanto, tenemos una sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow H_c^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow H^k(S^n, \mathbb{R}) \rightarrow H^k(*, \mathbb{R}) \rightarrow H_c^{k+1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \rightarrow \cdots.$$

Ahora, los grupos de cohomología de la esfera y del punto son

$$H^k(S^n, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } k = 0, n, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

$$H^k(*, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } k = 0, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Sustituyendo en la sucesión exacta, se tiene lo que se quería probar. $\square$

Corolario 5.17 (Dualidad de Poincaré local). *El emparejamiento*

$$\Omega_c^k(\mathbb{R}^n) \times \Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \wedge \beta$$

determina un isomorfismo

$$H_c^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^* \cong H^{n-k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

5.18. Cálculo del dualizante. De la dualidad de Verdier se sigue que, para toda variedad diferenciable M existe un complejo dualizante $\mathcal{D}_M$ que cumple que

$$\text{Hom}_{D^b(M)}(\underline{\mathbb{R}}_M, \mathcal{D}_M) = \text{Hom}_{D^b(\text{Vect}_{\mathbb{R}})}(R\Gamma_c(\underline{\mathbb{R}}_M), \mathbb{R}).$$

Lo que de aquí se sigue es una serie de isomorfismos

$$R^{-k}\Gamma(\mathcal{D}_M) \cong H_c^k(M, \mathbb{R})^*,$$

para $k \in \mathbb{Z}$. En particular, de la dualidad de Poincaré local se sigue que, para $M = \mathbb{R}^n$, se tiene

$$R^{-k}\Gamma(\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}) \cong H^{n-k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

con lo cual existe un isomorfismo (en $D^b(\mathbb{R}^n)$, es decir, un cuasi-isomorfismo)

$$\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n} \cong \underline{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}^n}[n],$$

donde la notación $[n]$ indica desplazar un complejo n unidades a la izquierda; es decir $C^\bullet[n] = C^{\bullet+n}$.

Globalmente, podemos tomar una variedad diferenciable M de dimensión n y recubrirla por un atlas $M = \bigcup_i U_i$. Cada U_i es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y, por tanto, si fijamos una orientación or_i en U_i , tenemos un isomorfismo $\phi_i : \mathcal{D}_{U_i} \cong \underline{\mathbb{R}}_{U_i}[n]$. Para hallar el dualizante global

$\mathcal{D}_M$ debemos ver cómo se comparan los distintos ϕ_i en cada intersección $U_i \cap U_j$. En cada una de estas intersecciones tenemos dos orientaciones or_i y or_j y dos isomorfismos $\phi_i, \phi_j : \mathcal{D}_{U_i \cap U_j} \cong \mathbb{R}[n]$, que se relacionan como

$$\phi_i = \begin{cases} \phi_j, & \text{si } \text{or}_i = \text{or}_j \\ -\phi_j, & \text{si } \text{or}_i = -\text{or}_j. \end{cases}$$

Por tanto, si podemos hallar una orientación global de M , tenemos que los isomorfismos ϕ_i pegan a un isomorfismo global $\phi : \mathcal{D}_M \cong \mathbb{R}_M[n]$. En general, $\mathcal{D}_M \cong \mathbf{or}_M[n]$, donde $\mathbf{or}_M$ es el **haz de orientaciones** de M

$$\mathbf{or}_M : U \mapsto H_c^n(U, \mathbb{R})^*.$$

Una orientación global de M determina una sección global nunca nula de $\mathbf{or}_M$, y por tanto $\mathbf{or}_M \cong \mathbb{R}_M$ para una variedad orientable. Hemos probado lo siguiente.

Teorema 5.19 (Dualidad de Poincaré (global)). *El complejo dualizante de una variedad diferenciable M es cuasi-isomorfo a $\mathbf{or}_M$. En particular, si M es orientable, el emparejamiento*

$$\Omega_c^k(M) \times \Omega^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

determina un isomorfismo

$$H_c^k(M, \mathbb{R})^* \cong H^{n-k}(M, \mathbb{R}).$$

6. TEORÍA DE MORSE Y TEORÍA DEL GRADO

6.1. Funciones de Morse. Otra forma de estudiar la topología de las variedades diferenciables es por medio de las funciones de Morse. Si M es una variedad diferenciable de dimensión n y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, se denomina un **punto crítico** de f a un punto $x \in M$ tal que $(df)_x = 0$. Se denota por $\text{Crit}(f) \subset M$ el conjunto de los puntos críticos de f . La imagen $\text{VC}(f) \subset \mathbb{R}$ de este conjunto es el conjunto de los **valores críticos**. El **hessiano** de f en un punto crítico $x \in \text{Crit}(f)$ es la forma bilineal $\text{Hess}_x(f) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\text{Hess}_x(f)(X_x, Y_x) = X_x \circ Y_x(f) = Y_x \circ X_x(f).$$

Nótese que, como x es un punto crítico, tenemos que $[X, Y](f)_x = df([X, Y])_x = 0$. Se dice que x es un punto crítico **no degenerado** si la forma bilineal $\text{Hess}_x(f)$ es no degenerada. La signatura de esta forma bilineal es en tal caso

$$(n - \lambda_x(f), \lambda_x(f)),$$

donde $\lambda_x(f)$ es un número denominado el **índice de f en x** . Se dice que la función f es una **función de Morse** si todos sus puntos críticos son no degenerados. El resultado fundamental es el siguiente.

Teorema 6.2 (Lema de Morse). *Si x es un punto crítico no degenerado de f de índice λ , entonces existe un sistema de coordenadas local $\mathbf{x}$ en torno a x en el cual la función f*

puede escribirse como

$$f = f(x) - \sum_{i=1}^{\lambda} (x^i)^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n (x^i)^2.$$

6.3. Característica de Euler via teoría de Morse. Lo interesante ahora es que el índice de una función de Morse tiene información topológica. Consideramos entonces una variedad diferenciable compacta M y una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Tomamos ahora unos valores $a_0 < \dots < a_N \in \mathbb{R} \setminus \text{VC}(f)$ de forma que $a_0 < \min f$, que $a_N > \max f$ y que cada intervalo (a_{k-1}, a_k) contiene un único valor crítico c_k .

Para cada $a \in \mathbb{R}$, denotamos $M_a = f^{-1}(a)$. Si a no es un valor crítico, entonces, por el teorema de la función implícita, el subconjunto $M_a \subset M$ es de hecho una subvariedad regular. Más generalmente, para cada $k = 0, 1, \dots, N$, definimos $M_k = f^{-1}((-\infty, a_k])$. Esto proporciona una descomposición

$$\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k \subset M_{k+1} \subset \dots \subset M_{N-1} \subset M_N = M.$$

Ahora, para cada k tenemos una sucesión exacta de haces

$$0 \longrightarrow j_! \underline{\mathbb{R}}_{U_k} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}_{M_{k+1}} \longrightarrow i_* \underline{\mathbb{R}}_{M_k} \longrightarrow 0,$$

donde $U_k = M_{k+1} \setminus M_k$ y donde $j : U_k \hookrightarrow M_{k+1}$ e $i : M_k \hookrightarrow M_{k+1}$ denotan las inclusiones. Por tanto,

$$\chi(M_{k+1}) - \chi(M_k) = \chi(j_! \underline{\mathbb{R}}_{U_k}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(M_{k+1}, M_k; \mathbb{R}).$$

Sumando en k , obtenemos

$$\chi(M) = \chi(M_N) = \sum_{k=0}^N (\chi(M_{k+1}) - \chi(M_k)) = \sum_{k=0}^N \sum_i (-1)^i \dim H^i(M_{k+1}, M_k; \mathbb{R}).$$

Basta entonces calcular las cohomologías relativas $H^i(M_{k+1}, M_k; \mathbb{R})$. Como f es una función de Morse y M es compacta, hay una cantidad finita de puntos críticos en la preimagen $f^{-1}(c_k) = \{x_1, \dots, x_m\}$. En torno a cada uno de estos puntos $x_j \in f^{-1}(c_k)$, podemos tomar unas coordenadas en las que f se escribe como

$$f = c_k - \sum_{i=1}^{\lambda_j} (x^i)^2 + \sum_{i=\lambda_j+1}^n (x^i)^2,$$

donde $\lambda_j = \lambda_{x_j}(f)$. Podemos escribir entonces, para algún $\varepsilon > 0$,

$$f^{-1}(c_k - \varepsilon) = \prod_{j=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^{\lambda_j} (x^i)^2 - \sum_{i=\lambda_j+1}^n (x^i)^2 = -\varepsilon \right\} =: \prod_{j=1}^m C_j^-$$

y

$$f^{-1}(c_k + \varepsilon) = \prod_{j=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^{\lambda_j} (x^i)^2 - \sum_{i=\lambda_j+1}^n (x^i)^2 = +\varepsilon \right\} =: \prod_{j=1}^m C_j^+.$$

Cada una de las piezas C_j^- es homeomorfa al producto $S^{\lambda_j-1} \times D^{n-\lambda_j}$ de una esfera de dimensión $\lambda_j - 1$ y de una bola cerrada $(n - \lambda_j)$ -dimensional. Por otra parte, cada una de las piezas C_j^+ es homeomorfa al producto $D^{\lambda_j} \times S^{n-\lambda_j-1}$. Tenemos entonces que el par

(M_{k+1}, M_k) es homotópicamente equivalente al par

$$\prod_{j=1}^m (D^{\lambda_j} \times D^{n-\lambda_j}, S^{\lambda_j-1}, D^{n-\lambda_j}),$$

que a su vez es homotópicamente equivalente al par

$$\prod_{j=1}^m (D^{\lambda_j}, S^{\lambda_j-1}).$$

Ahora, la cohomología relativa $H^i(D^{\lambda_j}, S^{\lambda_j-1}; \mathbb{R})$ es isomorfa a $\mathbb{R}$ si $\lambda_j = i$ y nula en caso contrario. Por tanto,

$$\dim H^i(M_{k+1}, M_k; \mathbb{R}) = \sum_{j=1}^m \delta_{i\lambda_j}.$$

Concluimos entonces que

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^N \sum_i (-1)^i \dim H^i(M_{k+1}, M_k; \mathbb{R}) = \sum_{k=0}^N \sum_i (-1)^i \sum_{j=1}^m \delta_{i\lambda_j} = \sum_{x \in \text{Crit}(f)} (-1)^{\lambda_x(f)}.$$

Hemos demostrado lo siguiente.

Teorema 6.4. *Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse, entonces*

$$\chi(M) = \sum_{x \in \text{Crit}(f)} (-1)^{\lambda_x(f)}.$$

6.5. Teoría del grado. Una aplicación diferenciable propia $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades de la misma dimensión n induce una aplicación en las cohomologías con soporte compacto

$$f^* : H_c^n(M, \mathbb{R}) \longrightarrow H_c^n(N, \mathbb{R}).$$

Si M y N son orientables, por la dualidad de Poincaré, tenemos isomorfismos $H_c^n(M, \mathbb{R}) \cong H_c^n(N, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Si además fijamos las orientaciones en M y N , la aplicación f^* determina una aplicación lineal

$$f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \deg f x,$$

donde $\deg f$ es un número real denominado el **grado de Brouwer** de f . Más explícitamente, componiendo la dualidad de Poincaré con el teorema de de Rham, tenemos que, para cada $\omega \in \Omega_c^n(N)$, el grado se obtiene como

$$\int_M f^* \omega = \deg f \int_N \omega.$$

Proposición 6.6. *Sea $y \in N$ un valor regular de f ; es decir, $d_x f \neq 0$ para todo $x \in f^{-1}(y)$. El grado $\deg f$ puede calcularse como*

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \epsilon_f(x),$$

donde

$$\epsilon_f(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } d_x f \text{ preserva la orientación} \\ -1 & \text{si } d_x f \text{ invierte la orientación.} \end{cases}$$

En particular, $\deg f \in \mathbb{Z}$.

Observación 6.7. Nótese que, si y es un valor crítico, f es un difeomorfismo local en cada punto $x \in f^{-1}(y)$, de modo que $f^{-1}(y)$ es discreto y, como f es propia, la preimagen $f^{-1}(y)$ es finita, de modo que la suma anterior está bien definida.

Demostración. Podemos tomar un entorno conexo $V \subset N$ de y cuya preimagen por f es una unión disjunta

$$f^{-1}(V) = \coprod_{x \in f^{-1}(y)} U_x$$

de entornos U_x de cada $x \in f^{-1}(y)$ y de modo que f restringe a un difeomorfismo $f_x := f|_{U_x} : U_x \rightarrow V$ para cada x . Tomemos entonces una n -forma $\omega \in \Omega_c^n(V)$. Podemos descomponer

$$\deg f \int_N \omega = \int_M f^* \omega = \sum_{x \in f^{-1}(x)} \int_{U_x} f_x^* \omega = \sum_{x \in f^{-1}(x)} \epsilon_f(x) \int_V \omega = \sum_{x \in f^{-1}(x)} \epsilon_f(x),$$

donde hemos usado que cada f_x es un difeomorfismo. $\square$

La teoría del grado tiene numerosas aplicaciones al estudio de la topología de las variedades diferenciables. Un ejemplo clásico es el teorema del punto fijo de Brouwer. Primero probamos algo más general.

Teorema 6.8. *Sea N una variedad compacta, conexa y orientada de dimensión n y sea M una variedad compacta, conexa y orientada de dimensión $n+1$ y con borde conexo. Si $f : \partial M \rightarrow N$ es una aplicación continua tal que existe una extensión $F : M \rightarrow N$, con $F|_{\partial M} = f$, entonces $\deg f = 0$.*

Demostración. Tomamos una forma $\omega \in \Omega^n(N)$ y aplicamos el teorema de Stokes

$$\int_{\partial M} f^* \omega = \int_M F^* \omega = \int_M d(F^* \omega) = \int_M F^* d\omega = 0,$$

ya que $d\omega = 0$. $\square$

Corolario 6.9 (Teorema del punto fijo de Brouwer). *Toda aplicación continua del disco n -dimensional en sí mismo tiene algún punto fijo.*

Demostración. Supongamos que existe una función $g : D^n \rightarrow D^n$ sin punto fijo. Podemos definir entonces la función

$$F : D^n \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{x - g(x)}{\|x - g(x)\|},$$

que es una extensión de la función $f = F|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Por el teorema, $\deg f = 0$. Sin embargo, la función

$$h : S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto h(x, t) = \frac{x - tg(x)}{\|x - tg(x)\|}$$

da una homotopía entre $f = h(-, 1)$ y la identidad $\text{id}_{S^{n-1}} = h(-, 0)$. Por tanto, $\deg f = \deg \text{id}_{S^{n-1}} = 1$ y llegamos a una contradicción. $\square$

6.10. El índice de un campo vectorial. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y X un campo vectorial en M . Supongamos que $x \in M$ es un punto en el cual $X_x = 0$, y que es un punto aislado en el conjunto de los puntos con tal propiedad; decimos que x es un **cero aislado** de X . En tal caso, podemos tomar una pequeña bola cerrada D en torno a x de forma que X no se anula en ningún otro punto de D . Tomando unas coordenadas locales $\mathbf{x}$ en D , podemos definir la aplicación

$$D \setminus \{x\} \rightarrow S^{n-1}, \quad \mathbf{x} \mapsto \frac{X(\mathbf{x})}{\|X(\mathbf{x})\|},$$

que restringe a una aplicación $\bar{X} : \partial D \rightarrow S^{n-1}$. Se define el **índice de X en x** como el grado de esta aplicación

$$\text{ind}_x X = \deg \bar{X}.$$

Si X es un campo que sólo tiene ceros aislados, se define el **índice (global) de X** como la suma de sus índices locales

$$\text{ind } X = \sum_{x: X_x=0} \text{ind}_x X.$$

Resulta que, como veremos a continuación, este índice global es un invariante topológico.

Observación 6.11. Nótese que el índice global también puede definirse como el grado de una aplicación. En efecto, en torno a cada x con $X_x = 0$ tomamos una bola cerrada D_x y una aplicación $\bar{X}_x : \partial D_x \rightarrow S^{n-1}$ como antes, y definimos

$$\bar{X} : \coprod_{x: X_x=0} \partial D_x \rightarrow S^{n-1}$$

como $\bar{X}(y) = \bar{X}_x(y)$, si $y \in D_x$. Tenemos entonces que

$$\text{ind } X = \deg \bar{X}.$$

Proposición 6.12. *El índice $\text{ind } X$ no depende del campo elegido.*

Demostración. Tomemos dos campos X_0 y X_1 con ceros aislados. Como los campos forman un espacio vectorial, podemos construir una familia de campos X_t dependiente de t que los interpola

$$X_t = (1-t)X_0 + tX_1, \quad t \in [0, 1].$$

Los puntos (t, x) tales que $X_{t,x} = 0$ forman una subvariedad $Z \subset [0, 1] \times M$, y se puede construir otra subvariedad $N \subset [0, 1] \times M$ que “rodea” a Z y de forma que, para cada $t \in [0, 1]$, la intersección $N_t = N \cap \{t\} \times M$ es una unión disjunta de esferas $n-1$ -dimensionales cada una de las cuáles contiene un único cero de X_t en su interior. Podemos entonces definir una aplicación

$$\begin{aligned} \bar{X} : N &\longrightarrow [0, 1] \times S^{n-1} \\ (t, \mathbf{x}) &\longmapsto (t, X_t(\mathbf{x})/\|X_t(\mathbf{x})\|) \end{aligned}$$

y, para cada t , tenemos una aplicación $\bar{X}_t : N_t \rightarrow S^{n-1}$ que cumple que

$$\text{ind } X_t = \deg \bar{X}_t.$$

Por tanto, si $\omega \in \Omega^{n-1}(S^{n-1})$ es una forma de grado máximo con $\int_{S^{n-1}} \omega = 1$, tenemos, por el teorema de Stokes,

$$\text{ind } X_1 - \text{ind } X_0 = \deg \bar{X}_0 - \deg \bar{X}_1 = \int_{\partial N} \bar{X}^* \omega = \int_N \bar{X}^*(d\omega) = 0.$$

Por tanto $\text{ind } X_0 = \text{ind } X_1$. □

Teorema 6.13 (Poincaré–Hopf). *Para todo campo X con ceros aislados en M , se tiene que*

$$\text{ind } X = \chi(M).$$

Demostración. Supongamos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse. Consideremos el campo gradiente ∇f , que en coordenadas locales $\mathbf{x}$ se define como

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial_1 f(\mathbf{x}), \dots, \partial_n f(\mathbf{x})).$$

Como el índice no depende del campo escogido, basta probar que $\text{ind } \nabla f = \chi(M)$. Ahora bien, ∇f se anula en un punto $x \in M$ si y sólo si f tiene un punto crítico en x . Por el lema de Morse, en un cierto sistema de coordenadas local $\mathbf{x}$, la función f puede escribirse como

$$f = f(x) - \sum_{i=1}^{\lambda} (x^i)^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n (x^i)^2,$$

donde λ es el índice de f en x . Por tanto,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (-2x^1, \dots, -2x^\lambda, 2x^{\lambda+1}, \dots, 2x^n).$$

La correspondiente aplicación $\overline{\nabla f} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ está dada por la aplicación

$$\overline{\nabla f}(\mathbf{x}) = (-x^1, \dots, -x^\lambda, x^{\lambda+1}, \dots, x^n),$$

cuyo grado es igual a $(-1)^\lambda$. Por tanto, $\text{ind}_x \nabla f = (-1)^\lambda$. Globalmente, obtenemos

$$\text{ind } X = \text{ind } \nabla f = \sum_{x: (\nabla f)_x=0} (-1)^{\lambda_x(f)} = \chi(M),$$

como queríamos probar. □

Corolario 6.14 (Lema de Hopf). *Sea $M \subset \mathbb{R}^{2N+1}$ una hipersuperficie regular compacta y orientada y sea $\mathbf{n} : M \rightarrow S^{2N}$ la **aplicación de Gauss**, que asocia a cada punto $x \in M$ el **vector unitario normal** $\mathbf{n}(x) \in S^{2N}$ en el sentido compatible con la orientación. Se tiene que*

$$\deg \mathbf{n} = \frac{1}{2} \chi(M).$$

Demostración. Tomamos cualquier vector unitario $\mathbf{u} \in S^{2N} \subset \mathbb{R}^{2N+1}$ que sea un valor regular de $\mathbf{n}$ y tomamos su proyección ortogonal a cada espacio tangente $T_x M$, de modo que obtenemos un campo vectorial X en M ; detalladamente

$$X_x = \mathbf{u} - \langle \mathbf{n}(x), \mathbf{u} \rangle \mathbf{n}(x).$$

Los ceros de este campo X son aquellos $x \in M$ tales que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{n}(x) \rangle = 0$. Es decir, $X_x = 0$ si y solamente si $\mathbf{n}(x) = \pm \mathbf{u}$. Por tanto,

$$\text{ind } X = \sum_{x \in \mathbf{n}^{-1}(\pm \mathbf{u})} \text{ind}_x X.$$

Nótese que la correspondiente aplicación $\bar{X}$ invierte o preserva la orientación si y sólo si lo hace $\mathbf{n}$, luego el índice local de X en x puede calcularse como

$$\text{ind}_x X = \epsilon_{\mathbf{n}}(x).$$

Concluimos que, por el teorema de Poincaré–Hopf,

$$\begin{aligned} \chi(M) = \text{ind } X &= \sum_{x \in \mathbf{n}^{-1}(\mathbf{u})} \epsilon_{\mathbf{n}}(x) + \sum_{x \in \mathbf{n}^{-1}(-\mathbf{u})} \epsilon_{\mathbf{n}}(x) \\ &= \deg \mathbf{n} + \deg(-\mathbf{n}) = \deg \mathbf{n} + (-1)^{2N} \deg \mathbf{n} = 2 \deg \mathbf{n}, \end{aligned}$$

luego $\deg \mathbf{n} = \frac{1}{2} \chi(M)$. □