

ESCUELA DE VERANO DE LA SEMF  
FACULTAD DE FÍSICA DE LA UNIVERSITAT DE VALÈNCIA  
9-13 JULIO 2018

# Geometría Simpléctica en Mecánica Clásica

GUILLERMO GALLEGO SÁNCHEZ

---

## Resumen

En estas notas se recogen los contenidos de las tres lecciones de un curso titulado «Geometría Simpléctica en Mecánica Clásica», impartido por el autor entre el 9 y el 11 de julio de 2018. En la primera lección se introducen las nociones básicas de mecánica en variedades diferenciables, formulando los formalismos lagrangiano y hamiltoniano de la mecánica clásica para sistemas naturales y dando así una motivación para el estudio de la geometría simpléctica. En la segunda lección se introducen conceptos básicos de geometría simpléctica y su relación con la mecánica clásica: el teorema de Darboux, simplectomorfismos y transformaciones canónicas, campos simplécticos y hamiltonianos, el corchete de Poisson y el teorema de Noether. En la tercera lección se introduce la noción de sistema completamente integrable, se da una idea de la demostración del teorema de Arnold-Liouville y se dan algunas generalidades sobre movimiento condicionalmente periódico.



# LECCIÓN I: MECÁNICA EN VARIEDADES

GUILLERMO GALLEGO SÁNCHEZ

## 1. FORMALISMO NEWTONIANO

En el **formalismo newtoniano**, la posición de un sistema de  $N$  partículas viene descrita por un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$  de la forma  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ , con cada  $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3)$  describiendo la posición de la  $i$ -ésima partícula. La trayectoria del sistema vendrá dada por una aplicación

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{3N} \\ t &\longmapsto \mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

De acuerdo con la *ley de Newton*, existe una función

$$\begin{aligned}\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &\longmapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t),\end{aligned}$$

llamada *fuerza*, de modo que la trayectoria de cada partícula del sistema está sujeta a la ecuación

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t), \dot{\mathbf{x}}_i(t), t),$$

con  $m_i$  la masa de la  $i$ -ésima partícula.

En este curso sólo vamos a considerar sistemas *conservativos*, esto es, que  $\mathbf{F}$  sea independiente de las velocidades y del tiempo,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  y que sea un *campo gradiente*, es decir, que exista una función  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x^1}, \frac{\partial V}{\partial x^2}, \frac{\partial V}{\partial x^3}\right).$$

Esta  $V$  se llama *energía potencial* del sistema. Definimos la *energía cinética* de una partícula de masa  $m$  como la función

$$\begin{aligned}T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3) &\longmapsto \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^3 (v^i)^2.\end{aligned}$$

Nótese que

$$\frac{\partial T}{\partial v^i}(\mathbf{v}) = mv^i,$$

de modo que, para la partícula  $i$ -ésima del sistema

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v^j}(\dot{\mathbf{x}}_i) \right) = \frac{d}{dt} (m_i \dot{x}_i^j) = m_i \ddot{x}_i^j.$$

Así, en un sistema conservativo, la ley de Newton toma la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v^j}(\dot{\mathbf{x}}_i) \right) = -\frac{\partial V}{\partial x^j}(\mathbf{x}_i).$$

Podemos considerar ahora un sistema sujeto a *ligaduras*, que también consideraremos independientes de las velocidades y del tiempo (*holónomas* y *esclerónomas*). Estas ligaduras se pueden escribir como una función

$$f = (f_1, \dots, f_r) : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$$

con componentes independientes, es decir, tales que los vectores  $\nabla f_1, \dots, \nabla f_r$  son linealmente independientes. Estas funciones definen un subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^{3N}$  de ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_r(\mathbf{x}) = 0. \end{cases}$$

Por el teorema de la función implícita, como las  $f_i$  son independientes,  $M$  es una subvariedad regular de  $\mathbb{R}^{3N}$  de dimensión  $n = 3N - r$ . Esta  $M$  se llama *espacio de configuración* y  $n$  el número de *grados de libertad*.

**Ejemplo 1.1.** Consideremos el caso de un *péndulo esférico*: una partícula de masa  $m$  unida por una barra rígida de longitud  $R$  a un punto del espacio y sujeta a la fuerza de la gravedad

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, -mg).$$

En este caso la ligadura viene dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

de modo que podemos definir la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$  y el espacio de configuración será

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}.$$

Además,  $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$  es distinto de 0 en todo  $M$ , de modo que  $M$  es una variedad diferenciable; de hecho, es una esfera de radio  $R$ .  $\square$

## 2. EL ESPACIO TANGENTE

Diremos que una aplicación  $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  es *diferenciable* si todas sus derivadas parciales existen y son continuas<sup>1</sup>. Más generalmente, una aplicación  $\varphi : X \rightarrow Y$  entre dos subconjuntos arbitrarios  $X \subset \mathbb{R}^p$  e  $Y \subset \mathbb{R}^q$  se dice diferenciable si se extiende diferenciablemente, es decir, si existe una aplicación diferenciable  $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^q \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y. \end{array}$$

Diremos que una aplicación diferenciable  $\varphi$  es un *difeomorfismo* si es biyectiva y su inversa es diferenciable. Una *subvariedad regular* de dimensión  $n$  de un espacio euclidiano  $\mathbb{R}^m$ , para cierto  $m > n$ , es un subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^m$  *localmente difeomorfo* a  $\mathbb{R}^n$ , esto es, que para cada  $x \in M$  existan una bola  $B \subset \mathbb{R}^m$  centrada en  $x$ , y un difeomorfismo  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow B \cap M$ , que llamamos *parametrización* de  $M$  en  $x$ .

Si  $M$  es una subvariedad regular de  $\mathbb{R}^m$  de dimensión  $n$  con una parametrización  $\varphi$  en un punto  $x \in M$  que se extiende diferenciablemente a  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , podemos considerar la diferencial de  $\Phi$  en  $a = \varphi^{-1}(x)$ ,  $d_a\Phi$ , y definimos el *espacio tangente a  $M$  en  $x$*  como  $T_xM = \text{im}(d_a\Phi)$ . Podemos considerar entonces la base *holónoma* de  $T_xM$ , definida por las imágenes de los vectores de la base canónica: si  $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$  son unas coordenadas en  $\mathbb{R}^n$  y  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  denota la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , los vectores de la base holónoma son

$$d_a\Phi(\mathbf{e}_i) = \frac{\partial \Phi}{\partial q^i}(a) = \partial_i \Phi(a) = \partial_i \varphi(a).$$

Las definición de la base holónoma no depende de  $\varphi$ , ya que si  $\psi$  es otra parametrización, entonces el cambio  $h = \psi^{-1} \circ \varphi$  es un difeomorfismo, luego  $d_a h$  es un isomorfismo lineal. Por la regla de la cadena,  $d_{\psi^{-1}(x)}\psi \circ d_a h = d_a \varphi$  y, como  $d_a h$  es un isomorfismo lineal,  $d_{\psi^{-1}(x)}\psi$  y

<sup>1</sup>Realmente esto quiere decir que es de clase  $\mathcal{C}^\infty$

$d_a\varphi$  tienen la misma imagen. Además, si cambiamos la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  de acuerdo con el isomorfismo  $d_a h$ , la base holónoma tampoco depende de la parametrización, de forma que en general podemos escribir los vectores de esta base como  $\{\partial_1|_x, \dots, \partial_n|_x\}$ .

**Ejercicio 2.1.** Supongamos que nuestra variedad  $M$  está definida, igual que antes, por unas funciones  $f = (f_1, \dots, f_r) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$ , de acuerdo con el teorema de la función implícita, es decir,  $M = \{x \in \mathbb{R}^m | f(x) = 0\}$ . Probar entonces que el espacio tangente a  $M$  en un punto  $x$  es precisamente  $T_x M = \ker(d_x f)$ .  $\square$

Consideremos ahora una curva en  $M$ , esto es, una aplicación diferenciable, que en coordenadas  $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$  podemos escribir como

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma(t) = \varphi(q^1(t), \dots, q^n(t)). \end{aligned}$$

Podemos ver entonces la velocidad  $\dot{\gamma}$ , aplicando la regla de la cadena, como

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{dt}\varphi(q^1(t), \dots, q^n(t)) = \partial_1\varphi(\mathbf{q})\dot{q}^1(t) + \dots + \partial_n\varphi(\mathbf{q})\dot{q}^n(t).$$

Podemos considerar el **fibrado tangente** que es esencialmente la «colección de los espacios tangentes», concretamente, el conjunto

$$TM = \{(x, v_x) | x \in M, v_x \in T_x M\}.$$

De modo que la velocidad puede verse como una aplicación

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} : \mathbb{R} &\longrightarrow TM \\ t &\longmapsto (\dot{q}^1(t)\partial_1 + \dots + \dot{q}^n(t)\partial_n)|_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M. \end{aligned}$$

Un **campo tangente** a una variedad  $M$  será entonces una aplicación  $X : M \rightarrow TM$  de la forma  $x \mapsto (x, X_x)$ , con  $X_x \in T_x M$ . Localmente, un campo puede expresarse en la forma

$$X = X^1\partial_1 + \dots + X^n\partial_n,$$

con las  $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  unas funciones. Un campo tiene asociadas unas **curvas integrales**, que son curvas  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  tales que

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}.$$

Nótese que esta igualdad es, de hecho, una ecuación diferencial de primer orden para la curva  $\gamma$ ; en coordenadas  $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$  tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{q}^1(t) = X^1(\mathbf{q}(t)), \\ \vdots \\ \dot{q}^n(t) = X^n(\mathbf{q}(t)). \end{cases}$$

Juntando las curvas integrales obtenemos el **flujo** de  $X$ , que es la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, x) &\longmapsto \varphi_t(x), \end{aligned}$$

que cumple

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(x) = X_x.$$

Es decir,  $\varphi_t(x_0) = \gamma(t)$ , con  $\gamma$  la curva integral de  $X$  de condición inicial  $\gamma(0) = x_0$ .

## 3. FORMALISMO LAGRANGIANO

En el **formalismo lagrangiano**, la posición de un sistema con  $n$  grados de libertad viene descrita por un punto  $x \in M$ , con  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  llamada **espacio de configuración**. La trayectoria del sistema vendrá dada, en unas coordenadas  $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$  por una aplicación

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma(t).\end{aligned}$$

Se trata ahora de encontrar, entre todas las trayectorias posibles del sistema entre dos posiciones  $x_1$  a tiempo  $t_1$  y  $x_2$  a tiempo  $t_2$ , cuál será la trayectoria *real* que siga el sistema. De acuerdo con el **principio de Hamilton**, existe una función

$$\begin{aligned}L : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) &\longmapsto L(x, v),\end{aligned}$$

llamada **lagrangiano** del sistema de modo que la trayectoria *real* del sistema está sometida al **principio de mínima acción**: si el sistema está en la posición  $x_1$  a tiempo  $t_1$  y en la posición  $x_2$  a tiempo  $t_2$ , la trayectoria real del sistema entre  $x_1$  y  $x_2$  vendrá dada por la curva  $\gamma$  para la cual el valor del funcional de **acción**

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

sea extremal (máximo o mínimo). Puede probarse que este principio es formalmente equivalente a que la trayectoria  $\gamma$  sea solución de las **ecuaciones de Euler-Lagrange** que, en coordenadas  $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ , de modo que  $\gamma(t) = \mathbf{q}(t)$ , se escriben

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\mathbf{q}(t)) \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}(\mathbf{q}(t)) = 0.$$

Recordemos ahora el caso del sistema conservativo. Habíamos reducido la ley de Newton a la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v^j}(\dot{\mathbf{x}}_i) \right) = - \frac{\partial V}{\partial x^j}(\mathbf{x}_i).$$

Si lo restringimos todo a la variedad  $M$ , podemos ver esta ecuación en la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}(\dot{\mathbf{q}}) \right) = - \frac{\partial V}{\partial q^i}(\mathbf{q}),$$

de modo que, si definimos el lagrangiano

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}),$$

obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\mathbf{q}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}(\mathbf{q}(t)).$$

Nótese que al restringir el producto escalar que aparecía en la energía cinética a la variedad  $M$ , en general lo que obtendremos es una **métrica riemanniana**  $g$  en  $M$ , es decir, una colección de productos escalares

$$g_x : T_x M \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R},$$

que varía diferenciablemente con  $x$ . En general, un sistema con un lagrangiano de la forma  $L = T - V$ , donde  $T(x, v) = \frac{1}{2} m g_x(v, v)$  y  $V(x)$  es una función que depende sólo de la posición se llama un **sistema natural**.

**Ejemplo 3.1.** Volvamos al caso del péndulo esférico. Habíamos visto que el espacio de configuración  $M$  era una esfera de radio  $R$ . El espacio tangente  $T_x M$  en un punto  $\mathbf{x} \in M$  será precisamente el espacio de los vectores tangentes a la esfera en ese punto, es decir, el conjunto

$$T_x M = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0 \},$$

ya que  $\nabla f = 2\mathbf{x}$ .

Podemos parametrizar la esfera con unas *coordenadas esféricas*

$$(\phi, \theta) \mapsto \begin{cases} x = R \sin \theta \cos \phi, \\ y = R \sin \theta \sin \phi, \\ z = R \cos \theta, \end{cases}$$

y un vector  $\mathbf{v} \in T_x M$  podrá escribirse  $\mathbf{v} = v_\theta \partial_\theta|_x + v_\phi \partial_\phi|_x$ . En estas coordenadas podemos hallar los valores de la energía potencial y de la energía cinética

$$T(\dot{\phi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta),$$

$$V(\phi, \theta) = mgz = mgR \cos \theta.$$

De modo que el lagrangiano queda

$$L(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange tendrán la forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \end{cases}$$

□

**Ejercicio 3.2.** Hallar explícitamente las ecuaciones de Euler-Lagrange del péndulo esférico y resolverlas en términos de integrales. □

#### 4. FORMALISMO HAMILTONIANO I

El formalismo lagrangiano nos ha permitido formular la mecánica en variedades diferenciables, pero las ecuaciones de Euler-Lagrange siguen siendo ecuaciones de segundo orden, es decir, no se pueden pensar como campos *intrínsecos* al espacio de configuración. Para solucionar esto podemos recordar una técnica habitual en ecuaciones diferenciales para pasar de ecuaciones de segundo orden a ecuaciones de primer orden. Si tenemos una ecuación diferencial de orden 2

$$f''(x) = F(x, f, f'),$$

podemos definir  $g(x) = f'(x)$ , de modo que convertimos la ecuación diferencial original en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de orden 1

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \\ g'(x) = F(x, f, g). \end{cases}$$

En nuestro caso haremos algo parecido, pasando de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que son ecuaciones diferenciales de segundo orden definidas en el espacio de configuración  $M$ , a las ecuaciones de Hamilton, que son ecuaciones diferenciales de primer orden definidas en su fibrado tangente  $TM$ . Para ello, consideremos un sistema natural cuyo lagrangiano en coordenadas  $\mathbf{q}$  se expresa

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m g_{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}).$$

Definimos los **momentos canónicos conjugados** de las coordenadas  $\mathbf{q}$  como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left( \frac{1}{2} m g_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q) \right) = g_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}^j,$$

con  $g_{ij}(\mathbf{q}) = g_{\mathbf{q}}(\partial_{q^i}, \partial_{q^j})$ . Nótese que a partir de ahora empezamos a usar el convenio de índices repetidos, por el cual un índice repetido en una fórmula indica suma sobre éste. Como la métrica riemanniana es no degenerada, podemos considerar unas nuevas coordenadas  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  en  $TM$  con  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ . Notemos también que, para las trayectorias que cumplan las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

Por tanto, derivando el lagrangiano respecto del tiempo y aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d\dot{q}^i}{dt} = \dot{p}_i \dot{q}^i + p_i \ddot{q}^i = \dot{p}_i \dot{q}^i + \frac{d}{dt} (p_i \dot{q}^i) - \dot{p}_i \dot{q}^i = \frac{d}{dt} (p_i \dot{q}^i).$$

De modo que si, definimos el **hamiltoniano** como la función

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = p_i \dot{q}^i - L|_{\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p})},$$

tenemos que las trayectorias que cumplan las ecuaciones de Euler-Lagrange cumplirán que

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

Ahora, si  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  es una de estas trayectorias, entonces, aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0.$$

Por tanto,  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  cumplen las **ecuaciones de Hamilton**

$$\begin{cases} \dot{q}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \\ \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)). \end{cases}$$

Estas son ecuaciones de primer orden en  $TM$ , de modo que podemos asociarlas a un campo  $X^H$  de  $TM$  que se expresa

$$X^H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \partial_{q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \partial_{p_i}.$$

**Ejercicio 4.1.** En el caso del péndulo esférico, probar que los momentos canónicos conjugados son

$$\begin{aligned} p_\theta &= mR^2 \dot{\theta}, \\ p_\phi &= mR^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}, \end{aligned}$$

y que el hamiltoniano es

$$H(\phi, \theta, p_\phi, p_\theta) = \frac{1}{2mR^2} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) + mgR \cos \theta.$$

Hallar explícitamente las ecuaciones de Hamilton y resolverlas en función de integrales.  $\square$

*Observación.* Si consideramos sistemas que no sean naturales, no está garantizada la existencia de la métrica riemanniana  $g$  que nos permite hacer el cambio a las coordenadas  $\mathbf{p}$ . En general las coordenadas  $\mathbf{p}$  están definidas en el **fibrado cotangente**

$$T^*M = \{(x, \alpha_x) | x \in M, \alpha_x \in T_x M^*\},$$

donde  $T_x M^*$  denota el *espacio dual* de  $T_x M$ . Si  $\mathbf{q}$  son unas coordenadas y  $\alpha \in T^*M$  es una 1-forma (es decir, una aplicación  $\alpha : M \rightarrow T^*M$  del tipo  $x \mapsto (x, \alpha_x)$ , con  $\alpha_x \in T_x M^*$ ), se



definen los momentos canónicos conjugados  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  como las funciones  $p_i : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$p_i(\alpha) = \alpha(\partial_{q^i}).$$

La construcción del hamiltoniano a partir del lagrangiano se hace por un procedimiento más complicado, haciendo uso de la **transformada de Legendre**.

El caso natural es especialmente simple porque la métrica riemanniana  $g$  es una forma bilineal no degenerada en cada espacio tangente, que por tanto da un isomorfismo entre los fibrados tangente y cotangente, mediante una asignación del tipo

$$\begin{aligned} TM &\longrightarrow T^*M \\ (x, v_x) &\longmapsto g_x(v_x, \bullet). \end{aligned}$$

### 5. FORMAS DIFERENCIALES

Recordemos que una **forma lineal** o **1-forma** en  $\mathbb{R}^n$  es una función lineal  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Análogamente, una **forma bilineal** o **2-forma** en  $\mathbb{R}^n$  es una función  $\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  lineal en los dos argumentos. En el caso en que  $\omega$  sea antisimétrica decimos que es una 2-forma **exterior**. En general, una **k-forma exterior** es una función  $\omega : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lineal en todos sus argumentos y antisimétrica, es decir, si  $(i_1, \dots, i_k)$  es una permutación de  $(1, \dots, k)$  con paridad  $\epsilon$ , entonces

$$\omega(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = (-1)^\epsilon \omega(v_1, \dots, v_k).$$

Si  $\alpha$  es una  $k$ -forma exterior y  $\omega$  es una  $l$ -forma exterior, se define el **producto exterior** de  $\alpha$  y  $\omega$  como la  $k + l$  forma  $\alpha \wedge \omega$  tal que

$$(\alpha \wedge \omega)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum (-1)^\epsilon \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \omega(v_{j_1}, \dots, v_{j_l}),$$

donde la suma se realiza sobre todas las permutaciones  $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$  de  $(1, \dots, k + l)$  y  $\epsilon$  es la paridad de cada permutación.

Una **k-forma diferencial**  $\omega_x$  en un punto  $x$  de una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$  es una  $k$ -forma exterior en el espacio tangente  $T_x M$ . Más generalmente, una **k-forma diferencial**  $\omega$  en  $M$  es una aplicación  $x \mapsto (x, \omega_x)$ , con  $\omega_x$  una  $k$ -forma diferencial en  $x$ . Recordemos que en el espacio tangente definíamos la base holónoma  $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$  asociada a unas coordenadas  $(q^1, \dots, q^n)$ . Podemos considerar entonces su **base dual**, que denotaremos  $dq^1, \dots, dq^n$ , es decir,

$$dq^i(\partial_j) = \delta_{ij}.$$

Por tanto, toda 1-forma diferencial en  $M$  puede escribirse<sup>2</sup>

$$\alpha = \alpha_i dq^i,$$

con  $\alpha_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  unas funciones. En general, una  $k$ -forma diferencial en  $M$  se escribe

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_k},$$

con  $\omega_{i_1, \dots, i_k} : M \rightarrow \mathbb{R}$  funciones.

Finalmente, definimos la **diferencial exterior** como la función

$$d : \{k\text{-formas}\} \rightarrow \{(k + 1)\text{-formas}\}$$

que a cada función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  le asigna la forma  $df$  tal que  $(df)_x = d_x f$ , esto es

$$df = \partial_i f dq^i,$$

<sup>2</sup>Nótese que aquí seguimos usando el convenio de índices repetidos.

y a cada  $k$ -forma  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_k}$  le asigna la forma

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_j \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k} dq^j \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_k}.$$

**Ejercicio 5.1.** Probar que

$$d \circ d = 0$$

y que

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta,$$

siendo  $r$  el grado de  $\alpha$ . □

Una exposición detallada de la teoría de formas diferenciales puede leerse en el capítulo 7 de [1].

## 6. FORMALISMO HAMILTONIANO II

Cabe preguntarse ahora si existe alguna estructura geométrica, intrínseca a la variedad  $TM$ , que nos permita asociarle a cada función  $H : TM \rightarrow \mathbb{R}$  un campo  $X^H$  en  $TM$ . La clave está en considerar las siguientes formas diferenciales

$$\begin{aligned} \alpha &= p_i dq^i, \\ \omega &= d\alpha = dp_i \wedge dq^i. \end{aligned}$$

Podemos calcular

$$\begin{aligned} \omega(\partial_{q^i}, \bullet) &= dp_i \wedge dq^i (\partial_{q^i}, \bullet) = -dp_i \wedge dq^i(\bullet, \partial_{q^i}) = -dp_i, \\ \omega(\partial_{p_i}, \bullet) &= dp_i \wedge dq^i (\partial_{p_i}, \bullet) = dq^i. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\omega(X^H, \bullet) = \omega \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \partial_{q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \partial_{p_i}, \bullet \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \omega(\partial_{q^i}, \bullet) - \frac{\partial H}{\partial q^i} \omega(\partial_{p_i}, \bullet) = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i = -dH.$$

El elemento clave en esta construcción es entonces la forma  $\omega$ , que tiene las siguientes propiedades:

1. Es no degenerada, es decir, para cada  $x \in M$  y para cada  $v \in T_x M$  hay un  $w \in T_x M$  tal que  $\omega_x(v, w) \neq 0$ .
2. Es cerrada, es decir,  $d\omega = 0$ .

**Definición 6.1.** Una *variedad simpléctica* es un par  $(M, \omega)$ , donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $\omega$  es una 2-forma diferencial en  $M$  no degenerada y cerrada.

En el **formalismo hamiltoniano**, el estado de un sistema con  $n$  grados de libertad viene descrito por un punto  $x \in M$ , con  $M$  una variedad simpléctica de dimensión  $2n$  llamada **espacio de fases**. El comportamiento del sistema estará gobernado por una función  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  llamada **hamiltoniano** del sistema. Los estados del sistema evolucionarán según las curvas integrales del campo  $X^H$  tal que  $\omega(X^H, \bullet) = -dH$ . Es decir, la evolución temporal viene dada por un flujo  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  sujeto a las **ecuaciones de Hamilton**

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(x) = X_x^H.$$

## REFERENCIAS

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [2] H. Goldstein, C.P. Poole, and J.L. Safko. *Classical Mechanics*. Pearson Education India, 2011.
- [3] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Curso de física teórica (vol. 1): Mecánica*. Reverté, 1985.
- [4] Michael Spivak. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Publish or Perish, 2010.

## LECCIÓN II: GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA

GUILLERMO GALLEGO SÁNCHEZ

### 1. VARIEDADES SIMPLÉCTICAS

**Definición 1.1.** Una *variedad simpléctica* es un par  $(M, \omega)$  donde  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $2n$  y  $\omega$  es una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada.

Hay algunas restricciones para lo que puede ser y no ser una variedad simpléctica:

1. En cada punto  $x \in M$ ,  $\omega_x$  es una forma bilineal antisimétrica y no degenerada, luego puede diagonalizarse (**Ejercicio:** Probar que esto es así) a una forma con matriz asociada

$$\mathbb{J}_n = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

De modo que toda variedad simpléctica debe tener dimensión par.

2. Toda variedad simpléctica es orientable:  $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$  es una forma de volumen («volumen de Liouville»).
3. Si  $M$  es compacta y sin borde  $\omega$  no es exacta. De ser así,  $\omega = d\alpha$ , entonces  $\omega^n = d(\alpha \wedge \omega^{n-1})$ . Ahora, el volumen de Liouville de  $M$  es, por el teorema de Stokes,

$$\text{Vol}(M) = \int_M \omega^n = \int_M d(\alpha \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M = \emptyset} \alpha \wedge \omega^{n-1} = 0,$$

y esto es absurdo; el volumen de  $M$  no puede ser 0. En particular, hemos visto que el segundo grupo de cohomología de de Rham de  $M$ ,  $H_{dR}^2(M) \neq 0$ .

#### Ejercicio 1.2.

1. Dotar a la esfera  $\mathbb{S}^2$  de la estructura de variedad simpléctica.
2. ¿Cuáles de las siguientes variedades admiten una estructura simpléctica?

$$\mathbb{R}^3, \mathbb{C}\mathbb{P}^3, \mathbb{R}\mathbb{P}^2, \mathbb{S}^4, \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}\mathbb{P}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

□

Antes hemos comentado que  $\omega$  puede diagonalizarse *infinitesimalmente* a una forma con matriz asociada  $\mathbb{J}_n$ . El teorema de Darboux afirma un hecho sorprendente: también puede diagonalizarse *localmente*. Esto en particular implica que una variedad simpléctica no tiene invariantes locales.

**Teorema 1.3 (Darboux).** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $\omega$  una 2-forma cerrada y no degenerada en  $M$ . Entonces para cada  $x \in M$  existen un entorno  $U \subset M$  de  $x$  y una parametrización  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  tal que  $\varphi^*\omega$  tiene coeficientes constantes.

**Corolario 1.4.** En torno a cada punto  $x \in M$  podemos dar unas coordenadas  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  en las que  $\omega$  se escribe

$$\omega = dp_i \wedge dq^i.$$

Estas coordenadas se llaman *coordenadas canónicas o de Darboux*.

## 2. SIMPLECTOMORFISMOS

Podemos entender los simplectomorfismos como cambios de coordenadas que «preservan» la estructura simpléctica.

**Definición 2.1.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo. Se dice que  $f$  es un *simplectomorfismo* si  $f^*\omega = \omega$ .

**Proposición 2.2.** Una difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  es un simplectomorfismo si y sólo si, si  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  son coordenadas canónicas en un entorno  $U$  de un punto  $x \in M$ , entonces  $(\mathbf{q} \circ f, \mathbf{p} \circ f)$  son coordenadas canónicas en  $f^{-1}(U)$ .

*Demostración.* Basta darse cuenta de que

$$d(p_i \circ f) \wedge d(q^i \circ f) = f^*(dp_i \wedge dq^i) = f^*\omega,$$

que es igual a  $\omega$  si y sólo si  $f$  es un simplectomorfismo.  $\square$

**Ejercicio 2.3** (El grupo simpléctico real). Se define el *n-ésimo grupo simpléctico real*  $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$  como el conjunto de las matrices  $A \in \mathcal{M}^{2n \times 2n}$  tales que

$$A^t \mathbb{J}_n A = \mathbb{J}_n.$$

Probar:

1. Si  $f : M \rightarrow M$  es un simplectomorfismo entonces, para todo punto  $x \in M$ , su matriz jacobiana  $J_x f \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ .
2. Si  $A \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$  entonces  $\det(A) = 1$  o  $\det(A) = -1$ .
3. Si  $A \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$  entonces  $\det(A) = 1$ .
4.  $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$  es una subvariedad regular de  $\mathbb{R}^{4n^2}$ .

$\square$

## 3. CAMPOS SIMPLÉCTICOS Y HAMILTONIANOS

Nótese que en cada punto  $x$  de una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  tenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} T_x M &\longrightarrow (T_x M)^* \\ v &\longmapsto \omega_x(\bullet, v). \end{aligned}$$

En general, a cada campo  $X$  en  $M$  le podemos asociar la forma  $\omega(\bullet, X) = -i_X \omega$ .

Si consideramos una familia uniparamétrica de simplectomorfismos  $f_t$  generada por un campo  $X$ , entonces

$$\mathcal{L}_X \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_t^* \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega = 0.$$

Recíprocamente, si  $X$  es un campo tal que  $\mathcal{L}_X \omega = 0$  y  $\varphi_t$  es su flujo, entonces

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (\varphi_t^* \omega) = \varphi_{t_0}^* \left[ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \varphi_{t-t_0}^* \omega \right] = \varphi_{t_0}^* \left[ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \omega \right] = \varphi_{t_0}^* (\mathcal{L}_X \omega) = \varphi_{t_0}^* (0) = 0.$$

Es decir, los campos con  $\mathcal{L}_X \omega = 0$  «preservan» la forma simpléctica. Estos campos se llaman *campos simplécticos*.

Si aplicamos la fórmula de Cartan, tenemos que

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X(d\omega) + d(i_X \omega) = d(i_X \omega).$$

Por tanto, un campo es simpléctico si y sólo si  $i_X \omega$  es cerrada. En el caso en que  $i_X \omega$  sea exacta se dice que  $X$  es un *campo hamiltoniano*. Si  $X$  es un campo hamiltoniano entonces existe una función  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $i_X \omega = -dH$ . En tal caso decimos que  $H$  es el *hamiltoniano* de  $X$  y denotamos  $X = X^H$ . Como un campo hamiltoniano es en particular simpléctico, el *flujo*

**hamiltoniano de  $H$** , que es el flujo generado por  $X^H$  y se denota por  $\varphi^H$ , preserva la forma  $\omega$  y, en particular, el volumen  $\omega^n$ . Este resultado es análogo al clásico **teorema de Liouville**.

Localmente, en unas coordenadas canónicas  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , un campo hamiltoniano  $X^H$  se escribirá

$$X^H = a_i \partial_{q^i} + b_i \partial_{p_i}.$$

Ahora,

$$-i_{X^H} \omega = -dp_i \wedge dq^i (a_i \partial_{q^i} + b_i \partial_{p_i}, \bullet) = -b_i dq^i + a_i dp_i,$$

y

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i,$$

luego

$$X^H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \partial_{q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \partial_{p_i}.$$

De modo que las curvas integrales  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  de  $X^H$  seguirán las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Cabe preguntarse ahora cuándo coincidirán los campos simplécticos y los hamiltonianos. Para ello observemos que la siguiente sucesión

$$\mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{X^\bullet} \text{Simp}(M) \xrightarrow{[i_\bullet \omega]} H^1(M)$$

(donde  $\text{Simp}(M)$  denota el espacio de los campos simplécticos) es exacta y, de hecho

$$\text{Ham}(M) := \ker([i_\bullet \omega]) = \text{im}(X^\bullet)$$

es precisamente el espacio de los campos hamiltonianos. Nótese entonces que si  $H^1(M) = 0$  entonces todo campo simpléctico en  $M$  es hamiltoniano. Nótese también por esto mismo que todo campo simpléctico es localmente hamiltoniano.

**Ejercicio 3.1.** Encontrar un campo simpléctico que no sea hamiltoniano. □

#### 4. CORCHETE DE POISSON

**Definición 4.1.** Sean dos funciones  $H, K : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Se define el **corchete de Poisson** de  $H$  y  $K$  como la función

$$\{H, K\} = X^H K.$$

**Ejercicio 4.2.** Probar las siguientes identidades

1.  $\{H, K\} = dK(X^H) = \omega(X^H, X^K)$
2.  $[X^H, X^K] = X^{\{H, K\}}$
3. (**Ecuación de Liouville**)

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} K(\varphi_t^H(x)) = \{H, K\}(\varphi_{t_0}^H(x)).$$

□

Localmente, en coordenadas canónicas  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ,

$$\{H, K\} = dK(X^H) = \left( \frac{\partial K}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial K}{\partial p_i} dp_i \right) \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \partial_{q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \partial_{p_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial K}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial K}{\partial p_i}.$$

Con el corchete de Poisson, las ecuaciones de Hamilton tienen un aspecto muy sencillo

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \{H, q^i\} \\ \dot{p}_i = \{H, p_i\}. \end{cases}$$

También se cumplen las **relaciones de conmutación canónicas**

$$\{p_j, q^i\} = \delta_{ij}.$$

**Ejercicio 4.3.** Probar que unas coordenadas  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  son canónicas si y sólo si cumplen las relaciones de conmutación canónicas.  $\square$

**Ejercicio 4.4.** Probar que  $f$  es un symplectomorfismo si y sólo si deja invariante el corchete de Poisson, esto es, si para cada  $H, K : M \rightarrow M$ ,

$$\{H, K\} \circ f = \{H \circ f, K \circ f\}.$$

$\square$

**Ejercicio 4.5.** Probar que el corchete de Poisson dota a  $\mathcal{C}^\infty$  de la estructura de **álgebra de Lie**, esto es, que

1. es bilineal
2. es antisimétrico
3. y cumple la **identidad de Jacobi**

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0.$$

Probar también que cumple la **regla de Leibniz**

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}.$$

Pista: basta probar que, si  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $X^F : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  cumple la regla de Leibniz.  $\square$

## 5. SIMETRÍAS Y LEYES DE CONSERVACIÓN

**Definición 5.1.** Sea  $M$  una variedad simpléctica y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  un hamiltoniano. Una función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una **integral primera** o **cantidad conservada** de  $H$  si

$$F(\varphi_t^H(x)) = F(x)$$

para todo  $t \geq 0$  y para todo  $x \in M$ .

**Ejercicio 5.2.** Usar la ecuación de Liouville para probar que  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una integral primera de  $H$  si y sólo si  $\{H, F\} \equiv 0$ .  $\square$

**Ejercicio 5.3.** Usar la identidad de Jacobi para probar que si  $F_1$  y  $F_2$  son integrales primeras de  $H$ , entonces  $\{F_1, F_2\}$  también es una integral primera de  $H$ .  $\square$

**Proposición 5.4** (Teorema de Noether). *Si un hamiltoniano  $H$  es constante a lo largo de un flujo hamiltoniano  $\varphi^F$ , entonces  $F$  es una integral primera de  $H$ .*

*Demostración.* Si  $H$  es constante a lo largo de  $\varphi^F$  entonces  $H$  es una integral primera de  $F$ , luego  $\{F, H\} = 0$ , pero, como el corchete de Poisson es antisimétrico, también  $\{H, F\} = 0$ , luego  $F$  es una integral primera de  $H$ .  $\square$

**Definición 5.5.** Sean  $M$  es una variedad simpléctica,  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  un hamiltoniano y  $G$  un grupo. Supongamos que  $\text{Diff}(M)$  denota el grupo de difeomorfismos de  $M$ . Una  **$G$ -simetría** de  $H$  es una acción

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \text{Diff}(M) \\ g &\longmapsto \varphi_g \end{aligned}$$

tal que  $H \circ \varphi_g = H$  para todo  $g \in G$ .

Supongamos que  $g_t$  denota un grupo diferenciable uniparamétrico que actúa mediante una  $g_t$ -simetría sobre una variedad simpléctica  $M$  con un hamiltoniano  $H$ , causando por tanto un flujo  $\varphi_t = \varphi_{g_t}$  tal que  $H \circ \varphi_t = H$ . Supongamos que  $\varphi_t$  está generado por un hamiltoniano  $F$ ,  $\varphi_t = \varphi_t^F$ . Entonces, por el teorema de Noether,  $F$  es una cantidad conservada de  $H$ .

**Ejemplo 5.6** (Conservación del momento lineal).

Sea  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n$  y consideremos la *acción de traslaciones sobre  $\mathbf{u}$*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (t, (\mathbf{q}, \mathbf{p})) &\longmapsto (\mathbf{q} + t\mathbf{u}, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Supongamos un hamiltoniano  $H$  invariante bajo esta acción. Entonces ha de haber una integral primera  $F$  de  $H$  asociada a esta simetría; vamos a hallarla.

En primer lugar, busquemos el generador infinitesimal del flujo  $\varphi_t(\mathbf{q}, \mathbf{p})$

$$X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{u}, 0) = u^i \partial_{q_i}.$$

Ahora, busquemos  $F$  la función que genera este campo hamiltoniano

$$dF = -i_X(dp_i \wedge dq^i) = (dp_i \wedge dq^i)(\bullet, u_i \partial_{q_i}) = u_i dp_i = d(u_i p_i) = d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}).$$

De modo que la integral primera asociada a la invariancia bajo traslaciones sobre  $\mathbf{u}$  es precisamente  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$ , el momento lineal en la dirección de  $\mathbf{u}$ .  $\square$

**Ejemplo 5.7** (Conservación del momento angular).

Consideremos el grupo de la circunferencia, que podemos realizar como el conjunto  $SO(2)$  de las rotaciones del plano y se puede representar matricialmente por

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Tomemos ahora el espacio de fases  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  de una partícula moviéndose en el plano y la *acción de rotaciones del plano*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\phi, (x, y, p_x, p_y)) &\longmapsto (A_\phi(x, y), A_\phi(p_x, p_y)). \end{aligned}$$

Compruébese que el generador infinitesimal de  $\varphi_\phi$  vendrá dado por

$$X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\phi=0} \varphi_\phi(x, y, p_x, p_y) = -y\partial_x + x\partial_y - p_y\partial_{p_x} + p_x\partial_{p_y}.$$

Ahora, la función  $F$  asociada a este campo hamiltoniano cumplirá

$$dF = -i_X(dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy) = -ydp_x + xdp_y + p_y dx - p_x dy.$$

Sea la función *momento angular*  $L(x, y, p_x, p_y) = xp_y - yp_x$ , entonces  $dL = dF$ . Por tanto, la cantidad conservada asociada a la invariancia bajo rotaciones del plano es el momento angular  $L$ .  $\square$

Podemos hacer una formulación más general de la relación entre simetrías e integrales primeras. Para ello, consideremos un grupo de Lie  $G$ , con  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie y  $\mathfrak{g}^*$  el dual de su álgebra de Lie. Supongamos que  $G$  actúa sobre una variedad simpléctica  $M$

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \text{Diff}(M) \\ g &\longmapsto \varphi_g. \end{aligned}$$

Si  $\xi \in \mathfrak{g}$  denota un elemento del álgebra de Lie, podemos considerar el grupo uniparamétrico que genera en  $G$ ,  $\exp(\xi t)$  y el flujo inducido por la acción  $\varphi_t = \varphi_{\exp(\xi t)}$ , cuyo generador infinitesimal

denotamos por  $\xi_M$ . Supongamos que existe una función  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  de manera que a cada  $\xi \in \mathfrak{g}$  le podemos asociar una función

$$\begin{aligned} \hat{J}(\xi) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto J(x) \cdot \xi \end{aligned}$$

tal que  $d\hat{J}(\xi) = -i_{\xi_M}\omega$ . Decimos entonces que  $J$  es la **aplicación momento** de la acción  $\varphi$ . Es sencillo entonces probar la siguiente generalización del teorema de Noether:

**Proposición 5.8** (Teorema de Noether). *Si  $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$  es una acción de un grupo de Lie  $G$  sobre una variedad simpléctica  $M$  tal que es una  $G$ -simetría de un hamiltoniano  $H$ , entonces la aplicación momento  $J$  asociada a  $\varphi$  es una integral primera de  $H$ .*

**Ejemplo 5.9** (Conservación del momento angular). Consideremos el grupo de rotaciones  $\text{SO}(3)$  actuando de forma simpléctica sobre el espacio de fases  $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  en la forma

$$\begin{aligned} \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (R, (\mathbf{q}, \mathbf{p})) &\longmapsto (R\mathbf{q}, R\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Los elementos de su álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  son los generadores infinitesimales de las rotaciones, que pueden asociarse con operadores de la forma  $J_{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \times \bullet$ , con  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  un vector cuya dirección es la del eje de la rotación y su norma la velocidad angular del giro. Así, a cada  $J_{\mathbf{u}} \in \mathfrak{so}(3)$  podemos asociarle el campo en  $\mathbb{R}^6$  de la forma  $\mathbf{u}_{\mathbb{R}^6} = (\mathbf{u} \times \mathbf{q}, \mathbf{u} \times \mathbf{p})$ , que en coordenadas se escribe

$$\mathbf{u}_{\mathbb{R}^6} = \epsilon_{ijk}u_k(q_i\partial_{q_j} + p_i\partial_{p_j}).$$

Ahora, consideramos el momento angular  $\mathbf{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ , que en coordenadas se expresa  $L_k(q_i, p_j) = \epsilon_{ijk}q_i p_j$ , de modo que  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = \epsilon_{ijk}u_k q_i p_j$  y

$$d(\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}) = \epsilon_{ijk}u_k(q_i dp_j + p_j dq_i) = \epsilon_{ijk}u_k(q_i dp_j - p_i dq_j) = -i_{\mathbf{u}_{\mathbb{R}^6}}\omega.$$

Por tanto, si consideramos la aplicación  $L : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$  que a cada  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  le asigna

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathfrak{so}(3) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ J_{\mathbf{u}} &\longmapsto \mathbf{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}, \end{aligned}$$

tenemos que  $L$  es una aplicación momento de la acción de  $\text{SO}(3)$ . Por el teorema de Noether, si consideramos un hamiltoniano  $H$  en  $\mathbb{R}^6$  que sea invariante bajo rotaciones, tenemos que la aplicación momento  $L$  es una integral primera del sistema hamiltoniano dado por  $H$ . Como consecuencia, el momento angular  $\mathbf{L}$  es una cantidad conservada del sistema.  $\square$

#### REFERENCIAS

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [2] Michael Spivak. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Publish or Perish, 2010.



## LECCIÓN III: SISTEMAS INTEGRABLES

GUILLERMO GALLEGO SÁNCHEZ

### 1. TEOREMA DE ARNOLD-LIOUVILLE

**Definición 1.1.** Un hamiltoniano  $H$  en una variedad simpléctica  $M$  de dimensión  $n$  se dice **completamente integrable** si admite  $n$  integrales primeras  $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$  **en involución** ( $\{F_i, F_j\} = 0$  para cualesquiera  $i, j = 1, \dots, n$ ) y **funcionalmente independientes** ( $\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_n(x)$  linealmente independientes en casi todo punto  $x \in M$ ).

**Ejercicio 1.2.** Probar que los siguientes sistemas hamiltonianos son completamente integrables:

1. Cualquier sistema con un grado de libertad.
2. Cualquier sistema con dos grados de libertad y una integral primera independiente de  $H$ .
3. El péndulo esférico. (Pista: Es invariante bajo rotaciones en el eje vertical).
4. El potencial central en  $\mathbb{R}^3$ , cuyo hamiltoniano es

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r),$$

con  $r = |\mathbf{q}|$ . (Pista: Las integrales primeras necesarias son  $H, \mathbf{L}^2$  y  $L_z$ .)

5. El trompo simétrico, de hamiltoniano

$$H(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi) = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta,$$

donde  $g$  es la aceleración gravitatoria,  $M$  la masa del trompo,  $\ell$  la distancia de la punta al centro de masas,  $(\theta, \phi, \psi)$  los ángulos de Euler,  $(p_\theta, p_\phi, p_\psi)$  sus momentos canónicos conjugados e  $I_1$  e  $I_3$  los momentos de inercia. □

**Teorema 1.3** (Arnold-Liouville). *Sea un sistema hamiltoniano completamente integrable con las integrales en involución  $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$  y sea la función  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Fijamos  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . Entonces*

1. *El conjunto de nivel  $M_{\mathbf{a}} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{a})$  es una subvariedad regular de  $M$  invariante bajo el flujo  $\varphi^H$ . Es decir, las órbitas de los puntos de  $M_{\mathbf{a}}$  permanecen en  $M_{\mathbf{a}}$ .*
2. *Si  $M_{\mathbf{a}}$  es compacta y conexa, entonces es difeomorfa al toro  $n$ -dimensional*

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \overset{(n)}{\dots} \times \mathbb{S}^1.$$

*En tal caso decimos que  $M_{\mathbf{a}}$  es un toro de Liouville.*

3. *Si  $M_{\mathbf{a}}$  es un toro de Liouville, podemos dar unas coordenadas  $\boldsymbol{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^n)$  en  $M_{\mathbf{a}}$  de tal manera que hay unas frecuencias constantes  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  tales que  $\dot{\phi}^j(t) = \omega_j$ .*

Como consecuencia en  $M_{\mathbf{a}}$  el flujo hamiltoniano se reduce a

$$\exp(\boldsymbol{\phi}(t)) = \exp(\boldsymbol{\phi}(0) + \boldsymbol{\omega}t),$$

con  $\exp$  una aplicación

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \overset{(n)}{\dots} \times \mathbb{S}^1 \\ \boldsymbol{\phi} &\longmapsto \exp(\boldsymbol{\phi}) = (e^{i\phi^1}, \dots, e^{i\phi^n}). \end{aligned}$$

Este tipo de flujo en el toro se llama **movimiento condicionalmente periódico**.

*Demostración.*

1. Como  $F_1, \dots, F_n$  son funcionalmente independientes,  $\mathbf{F}$  tiene rango máximo y, por el teorema de la función implícita  $M_{\mathbf{a}} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{a}) \subset M$  es una subvariedad regular de  $M$ . Además, como  $\{F_i, F_j\} = 0$ , los campos conmutan,  $[X^{F_i}, X^{F_j}] = 0$ , y  $\omega(X^{F_i}, X^{F_j}) = 0$ , lo que implica que  $dF_j(X^{F_i}) = 0$ , o lo que es lo mismo,  $\nabla F_j \cdot X^{F_i} = 0$ , de modo que los campos  $X^{F_i}$  son tangentes a  $M_{\mathbf{a}}$ . En particular,  $X^H$  será tangente a  $M_{\mathbf{a}}$ , luego  $M_{\mathbf{a}}$  es invariante bajo el flujo  $\varphi^H$ .

2. La demostración de esta parte consiste en aplicar el siguiente lema con  $N = M_{\mathbf{a}}$  y  $X_i = X^{F_i}$ .

**Lema 1.** *Sea  $N$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  conexa y compacta tal que existen unos campos  $X_1, \dots, X_n$  linealmente independientes tales que, para cualesquiera  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $[X_i, X_j] = 0$ . Entonces  $N$  es difeomorfa al toro  $n$ -dimensional.*

*Demostración.* Sea  $g_i$  el flujo de cada  $X_i$ . Como  $[X_i, X_j] = 0$  para cualesquiera  $i, j$ , los flujos conmutan, es decir, para cualesquiera  $i, j$ ,

$$g_{i,t} \circ g_{j,s} = g_{j,s} \circ g_{i,t},$$

para cualesquiera  $t, s \in \mathbb{R}$ . Como los flujos conmutan, fijo  $x_0 \in N$ , puedo definir la acción

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$$

$$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \longmapsto g_{\mathbf{t}}(x_0) = g_{1,t_1} \circ \dots \circ g_{n,t_n}(x_0).$$

Como los campos son linealmente independientes, la diferencial  $d_{\mathbf{t}}g$  es un isomorfismo lineal y, por el teorema de la función inversa,  $g$  es un difeomorfismo local.

**Ejercicio 1.4.** Probar que  $g$  es sobreyectiva. □

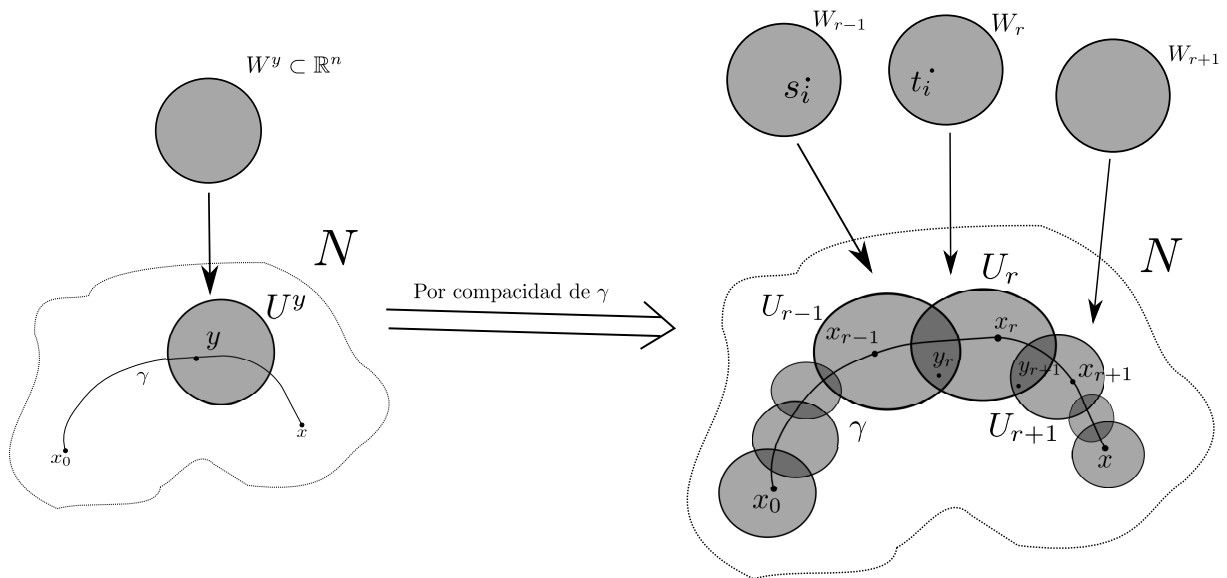


FIGURA 1. Idea de que  $g$  es sobreyectiva

Por tanto,  $g$  es un difeomorfismo local sobreyectivo, luego es un cociente. Sea

$$\Gamma = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \mid g_{\mathbf{t}}(x_0) = x_0\}.$$

**Ejercicio 1.5.** Probar que  $\Gamma$  es un subgrupo cerrado de  $(\mathbb{R}^n, +)$ . □

Por tanto, la aplicación  $\tilde{g}$  inducida por el siguiente diagrama es un difeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & N \\ \downarrow \pi & \nearrow \tilde{g} & \\ \mathbb{R}^n/\Gamma & & \end{array}$$

donde  $\pi$  denota la proyección canónica al cociente.

Ahora, si  $\Gamma = \{0\}$ , entonces  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow N$  es un difeomorfismo, pero esto no puede ser porque  $N$  es compacta. De modo que  $\Gamma \neq \{0\}$ . Como  $g$  es un difeomorfismo local, existe un entorno  $V \subset \mathbb{R}^n$  de  $0$  tal que  $\Gamma \cap V = \{0\}$ , que se puede trasladar a cualquier  $\mathbf{t} \in \Gamma$ . Es decir, en torno a cada  $\mathbf{t} \in \Gamma$ , existe un entorno  $V + \mathbf{t} \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\Gamma \cap (V + \mathbf{t}) = \{\mathbf{t}\}$ . Luego  $\Gamma$  es un grupo discreto.

**Ejercicio 1.6.** Probar que si  $\Gamma$  es un subgrupo cerrado y discreto de  $(\mathbb{R}^n, +)$  entonces  $\Gamma$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}^k$  para cierto  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Es decir, que existen unos vectores  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \Gamma$  tales que

$$\Gamma = \{n_1 \mathbf{u}_1 + \dots + n_k \mathbf{u}_k \mid n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}\}.$$

(Pista: Usar la idea de la figura 2 y proceder por inducción.) □

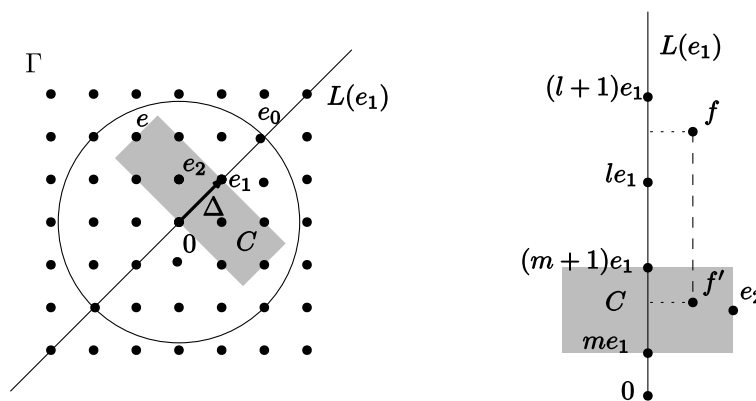


FIGURA 2. Idea de que  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^k$ .

Finalmente, podemos considerar la aplicación

$$\begin{aligned} \varpi &= (\exp, \text{id}) : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ &(\phi, \mathbf{y}) \longmapsto (\exp \phi, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

y un isomorfismo lineal  $\zeta$  tal que

$$\begin{aligned} \zeta : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\phi, 0) &\longmapsto \frac{\phi^1}{2\pi} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\phi^k}{2\pi} \mathbf{u}_k. \end{aligned}$$

Si llamamos

$$2\pi\mathbb{Z}^k = \{(2\pi n_1, \dots, 2\pi n_k, 0, \dots, 0) \mid n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Entonces claramente

$$\ker \varpi = \varpi^{-1}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) = 2\pi\mathbb{Z}^k.$$

De modo que puedo ver  $\varpi$  como un cociente  $\varpi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^k = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ . Por otra parte

$$\zeta(2\pi\mathbb{Z}^k) = \Gamma.$$

Ahora, como  $\Gamma = \ker \pi$ , con  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$ , tenemos que

$$\zeta(\ker \varpi) = \ker \pi.$$

Por tanto el isomorfismo  $\zeta$  desciende a los cocientes y la aplicación  $\tilde{\zeta}$  dada por el siguiente diagrama es un difeomorfismo

$$\begin{array}{ccccc}
2\pi\mathbb{Z}^k & \xrightarrow{\zeta|} & \Gamma & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{R}^n & & \\
\downarrow \varpi=(\exp, \text{id}) & & \downarrow \pi & \searrow g & \\
\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^k & \xrightarrow{\tilde{\zeta}} & \mathbb{R}^n/\Gamma & \xrightarrow{\tilde{g}} & N.
\end{array}$$

Por tanto, la aplicación  $\tilde{g} \circ \tilde{\zeta} : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow N$  es un difeomorfismo. Ahora, como habíamos dicho que  $N$  es compacta,  $k$  debe ser igual a  $n$ , de modo que  $N$  es difeomorfa a  $\mathbb{T}^n$ . Esto prueba el **Lema 1**.  $\square$

**3.** Fijo un punto  $x_0 \in M_a$  consideremos el diagrama de la demostración del lema, con  $g = \varphi_{\bullet}^{\mathbf{F}}(x_0)$  la aplicación

$$\begin{aligned}
\varphi_{\bullet}^{\mathbf{F}}(x_0) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow M_a \\
\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto \varphi_{\mathbf{t}}^{\mathbf{F}}(x_0) = \varphi_{t_1}^{F_1} \circ \dots \circ \varphi_{t_n}^{F_n}(x_0).
\end{aligned}$$

y tomemos la parametrización  $\psi$  dada por

$$\begin{array}{ccccc}
& & & \psi & \\
& & & \curvearrowright & \\
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{R}^n & & \\
\downarrow \exp & & \downarrow \pi & \searrow \varphi_{\bullet}^{\mathbf{F}}(x_0) & \\
\mathbb{T}^n & \xrightarrow{\tilde{\zeta}} & \mathbb{R}^n/\Gamma & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{\bullet}^{\mathbf{F}}(x_0)} & M_a.
\end{array}$$

Es decir,

$$\psi(\phi) = \varphi_{\tilde{\zeta}(\phi)}^{\mathbf{F}}(\psi(0)).$$

Ahora, sea  $\omega$  tal que  $\zeta(\omega) = (1, 0, \dots, 0)$ . Entonces

$$\psi(\omega t) = \varphi_{\tilde{\zeta}(\omega t)}^{\mathbf{F}}(\psi(0)) = \varphi_{(t, 0, \dots, 0)}^{\mathbf{F}}(\psi(0)) = \varphi_t^{F_1}(\psi(0)) = \varphi_t^H(\psi(0)).$$

Finalmente, observamos que, como la elección de  $\psi(0)$  es arbitraria, podemos ver el flujo hamiltoniano en el toro como

$$\exp(\phi(t)) = \exp(\phi(0) + \omega t).$$

Esto concluye la demostración del teorema de Arnold-Liouville.  $\square$

## 2. OSCILADORES ARMÓNICOS

Consideremos el oscilador armónico en una dimensión, descrito por el hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2.$$

En este caso la integral primera será el propio hamiltoniano, y los toros de Liouville con  $H(q, p) = E$  vendrán dados por la ecuación

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/m\omega^2} = 1.$$

Es decir, los toros de Liouville serán elipses con semiejes  $\sqrt{2mE}$  y  $\sqrt{2E/m}/\omega$ .

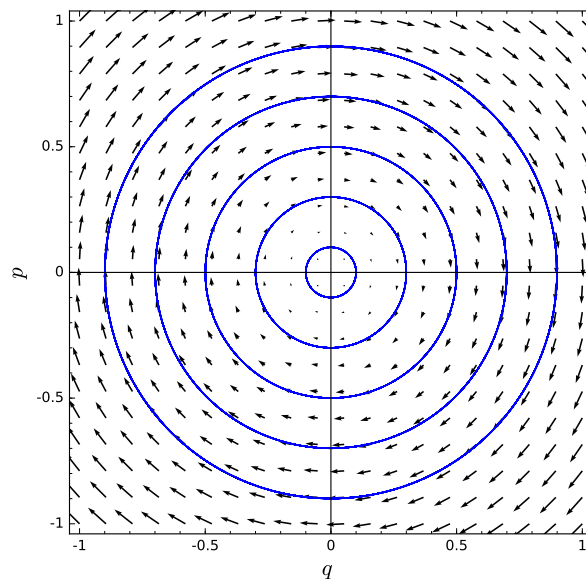


FIGURA 3. Espacio de fases del oscilador armónico (con  $m = \omega = 1$ ).

Cabría considerar ahora unas coordenadas «polares»  $(\phi, E)$ , con  $E$  constante en cada elipse y  $\phi$  el ángulo polar en estas elipses. Nos preguntamos entonces si en estas coordenadas podremos expresar las ecuaciones de Hamilton en su forma usual, es decir, si son coordenadas canónicas, o lo que es lo mismo, si la transformación  $(q, p) \mapsto (\phi, E)$  es canónica. Para ello, escribamos explícitamente la transformación y hallemos la expresión de la forma simpléctica:

$$\begin{cases} q(\phi, E) = \frac{\sqrt{2E/m}}{\omega} \cos \phi \\ p(\phi, E) = \sqrt{2mE} \sin \phi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} dq = \frac{1}{\omega\sqrt{2mE}} \cos \phi dE - \frac{\sqrt{2E/m}}{\omega} \sin \phi d\phi \\ dp = \sqrt{\frac{m}{2E}} \sin \phi dE + \sqrt{2mE} \cos \phi d\phi, \end{cases}$$

$$dp \wedge dq = -\frac{1}{\omega} \sin^2 \phi dE \wedge d\phi + \frac{1}{\omega} \cos^2 \phi d\phi \wedge dE = -\frac{1}{\omega} dE \wedge d\phi.$$

De modo que en general las variables  $(\phi, E)$  no son canónicas, pero podemos definir la **variable de acción**

$$J = -\frac{E}{\omega},$$

de manera que

$$dp \wedge dq = dJ \wedge d\phi,$$

y  $(\phi, J)$  son unas variables canónicas.

Podemos dotar de sentido geométrico a la variable de acción si nos damos cuenta de que el área encerrada por la elipse  $H(q, p) = E$  es precisamente

$$A_E = \pi\sqrt{2mE} \frac{\sqrt{2E/m}}{\omega} = 2\pi \frac{E}{\omega} = -2\pi J.$$

Por otra parte, si llamamos  $M_E$  a la elipse  $H(q, p) = E$  y  $S_E$  a la superficie que encierra podemos aplicar el teorema de Stokes y mostrar

$$A_E = \int_{S_E} dp \wedge dq = \int_{M_E} pdq.$$

Por tanto,

$$J = -\frac{1}{2\pi} \int_{M_E} p dq.$$

Más generalmente podemos considerar un sistema de  $n$  osciladores armónicos, con espacio de fases  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  y hamiltoniano

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{p_i^2}{m_i} + m_i \omega_i^2 (q^i)^2 \right) = \sum_{i=1}^n H_i.$$

**Ejercicio 2.1.** Probar que  $H_1, \dots, H_n$  están en involución.  $\square$

Los toros de Liouville con  $(H_1, \dots, H_n) = \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  vendrán dados entonces por productos cartesianos de elipses de ecuaciones

$$\frac{p_i^2}{m_i} + m_i \omega_i^2 (q^i)^2 = 2a_i,$$

con  $i = 1, \dots, n$ . Si tomamos  $\boldsymbol{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^n)$  variables angulares en estas elipses, con  $\gamma_{\mathbf{a},i}$  sus curvas paramétricas, podemos construir las variables de acción  $\mathbf{J} = (J_1, \dots, J_n)$  como

$$J_i = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_{\mathbf{a},i}} p_i dq^i = -\frac{a_i}{\omega_i}.$$

De modo que las *variables de acción-ángulo*  $(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{J})$  son coordenadas canónicas y por tanto cumplen las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{\phi}^i = \frac{\partial H}{\partial J_i} \\ \dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \phi^i}. \end{cases}$$

Ahora, como las  $J_i$  son constantes en cada toro de Liouville, las  $\frac{\partial H}{\partial \phi^i} = 0$ , luego  $H$  sólo depende de las variables de acción,  $H = H(\mathbf{J})$ . En este caso concreto,  $H = \sum_i \omega_i J_i$ . Como  $H$  sólo depende de  $\mathbf{J}$ , las  $\dot{\phi}^i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$  son constantes en cada toro invariante. En este caso  $\dot{\phi}^i = \omega_i$ . Por tanto, el sistema queda resuelto en la forma

$$\begin{cases} \mathbf{J}(t) = \mathbf{J}(0) \\ \boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\phi}(0) + \boldsymbol{\omega}t. \end{cases}$$

### 3. MOVIMIENTO CONDICIONALMENTE PERIÓDICO

**Definición 3.1.** Sea  $\mathbb{T}^n$  el toro  $n$ -dimensional con unas coordenadas angulares  $\boldsymbol{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ . Se llama un *movimiento condicionalmente periódico* a un flujo en el toro de la forma

$$\exp(\boldsymbol{\phi}(t)) = \exp(\boldsymbol{\phi}(0) + \boldsymbol{\omega}t),$$

con  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  unas frecuencias constantes en el toro. Decimos que las frecuencias  $\boldsymbol{\omega}$  son *conmesurables* si existe  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$  tal que

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} = k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n = 0.$$

En caso contrario decimos que las frecuencias son *inconmesurables*.

**Ejemplo 3.2.** Consideremos el toro 2-dimensional  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  con el flujo

$$\exp(\boldsymbol{\phi}(t)) = \exp(\omega_1 t, \omega_2 t).$$

Si las frecuencias  $\omega_1, \omega_2$  son conmesurables, entonces existen números  $m, n \in \mathbb{Z}$  tales que  $\omega_1/\omega_2 = m/n$ . En tal caso,

$$\exp\left(\boldsymbol{\phi}\left(\frac{2\pi n}{\omega_2}\right)\right) = \exp\left(\omega_1 \frac{2\pi n}{\omega_2}, \omega_2 \frac{2\pi n}{\omega_2}\right) = \exp(2\pi m, 2\pi n) = \exp(0, 0) = \exp(\boldsymbol{\phi}(0)).$$

Ahora, si las frecuencias son inconmensurables, entonces  $\omega_1/\omega_2$  es irracional. Ahora, dado un ángulo  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , llamamos  $T = \alpha/\omega_1$  y tomamos la sucesión  $T_n = T + 2\pi n/\omega_1$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ . Tenemos entonces

$$\exp(\phi(T_n)) = \exp(\omega_1 T_n, \omega_2 T_n) = \exp\left(\alpha + 2\pi n, \omega_2 T + 2\pi n \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \exp\left(\alpha, \alpha \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2\pi n \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

Esta familia  $\{\exp(\phi(T_n))\}_{n \in \mathbb{Z}}$  consiste en iteraciones de rotaciones de ángulo un múltiplo irracional de  $2\pi$  y, por el teorema de equidistribución (que probaremos a continuación) es densa en la circunferencia  $\{e^{i\alpha}\} \times \mathbb{S}^1$ . Como esto es válido para cualquier  $\alpha$ , el flujo es denso en

$$\mathbb{T}^2 = \bigcup_{\alpha} (\{e^{i\alpha}\} \times \mathbb{S}^1).$$

Estas ideas se visualizan fácilmente con las *figuras de Lissajous*

$$L_{\omega} = \{(\cos t, \cos \omega t) | t \in \mathbb{R}\},$$

(ver figura 4).

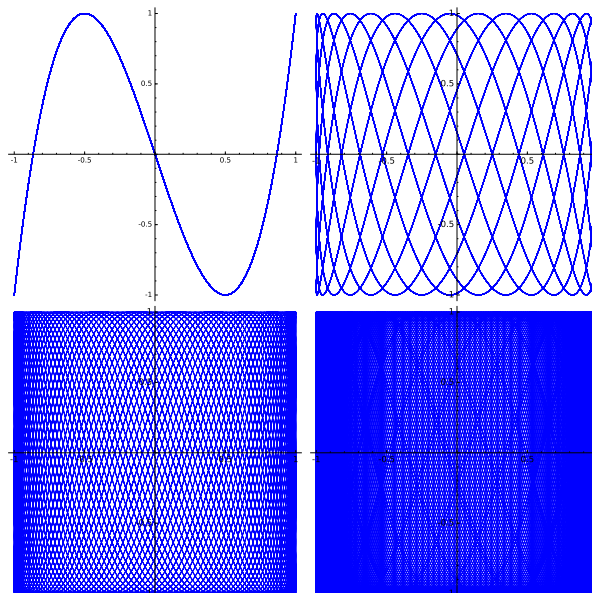


FIGURA 4. Figuras de Lissajous con  $\omega = 3, 3.1, 3.14, 3.1416$ .

□

**Teorema 3.3** (Teorema de equidistribución). *Sea la aplicación*

$$g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

$$e^{i\phi} \longmapsto e^{i(\phi+2\pi q)},$$

con  $q$  un número irracional. Entonces, para todo  $e^{i\phi} \in \mathbb{S}^1$ , el conjunto

$$\{g^k(e^{i\phi}) | k \in \mathbb{N}\}$$

es denso en  $\mathbb{S}^1$ .

*Demostración.* Sean  $e^{i\phi}, e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $U = (\phi - \varepsilon, \phi + \varepsilon)$ . Consideremos el conjunto  $\{g^n(\exp(U)) | n \in \mathbb{N}\}$ . Como cada uno de estos  $g^n(\exp(U))$  tiene una medida  $> 0$ , si ninguno de ellos se cortara con ningún otro, la unión de familia tendría medida infinita, pero esto es absurdo

porque esta familia está contenida en la circunferencia, que tiene medida finita. Por tanto, existen  $k, l \in \mathbb{N}$ , supongamos  $k > l$ , tales que

$$g^k(\exp(U)) \cap g^l(\exp(U)) \neq \emptyset.$$

Pero si definimos  $A = g^{k-l}(\exp(U)) \cap \exp(U)$ , entonces  $g^l(A) \neq \emptyset$ , luego  $A \neq \emptyset$ . Por tanto, existen  $\psi, \psi' \in U$  tales que  $g^{k-l}(e^{i\psi'}) = e^{i\psi}$ . Es decir

$$e^{i(\psi'+2\pi q(k-l))} = e^{i\psi}.$$

Multiplicando a ambos lados por  $e^{i(\phi-\psi')}$  tenemos

$$g^{k-l}(e^{i\phi}) = e^{i(\phi+2\pi(k-l)q)} = e^{i(\phi+\psi-\psi')} = e^{i(\phi+\delta)}.$$

Donde hemos definido  $\delta = \psi - \psi'$ . Nótese que  $|\delta| < \varepsilon$ .

Finalmente, sea  $s = \left[ \frac{\theta-\phi}{\delta} \right]$ , donde  $[\bullet]$  denota la función parte entera. Entonces

$$\left| \frac{\theta-\phi}{\delta} - s \right| = \left| \frac{\theta-\phi}{\delta} - \left[ \frac{\theta-\phi}{\delta} \right] \right| \leq 1,$$

luego

$$|\theta - \phi - \delta s| \leq |\delta| < \varepsilon.$$

Y además,

$$g^{s(k-l)}(e^{i\phi}) = e^{i(\phi+2\pi qs(k-l))} = e^{i(\phi+\delta s)}$$

mientras que

$$e^{i\theta} = e^{i\phi+(\theta-\phi)}.$$

De modo que para cada  $\varepsilon > 0$  y para cada  $\theta$ , hemos encontrado un  $n = s(k-l) \in \mathbb{N}$  tal que  $g^n(e^{i\phi})$  «dista» de  $e^{i\theta}$  menos de  $\varepsilon$ . Por tanto,  $\{g^k(e^{i\phi}) | k \in \mathbb{N}\}$  es denso en  $\mathbb{S}^1$ .  $\square$

**Definición 3.4.** Sea el toro  $n$ -dimensional  $\mathbb{T}^n$  y un movimiento condicionalmente periódico

$$\exp(\phi(t)) = \exp(\phi(0) + \omega t).$$

Sea una función  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos el **promedio espacial** de  $f$  como el número

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\phi) d^n \phi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(\phi^1, \dots, \phi^n) d\phi^1 \cdots d\phi^n.$$

Se define el **promedio temporal** de  $f$  como la función

$$f^*(\phi_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi_0 + \omega t) dt.$$

**Teorema 3.5** (Mi primer teorema ergódico). *Si las  $\omega$  son inconmesurables, entonces*

$$f^*(\phi_0) = \bar{f},$$

para todo  $\phi_0$ .

*Demostración.* Como la función  $f(\phi)$  es una función  $2\pi$ -periódica se puede expandir en un desarrollo de Fourier, en la forma

$$f(\phi_1, \dots, \phi_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}} f_{k_1, \dots, k_n} e^{i(k_1 \phi^1 + \cdots + k_n \phi^n)} = f_0 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \phi}.$$

Podemos calcular entonces el promedio espacial como

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f_0 d^n \phi + \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^n \int_0^{2\pi} e^{ik_j \phi^j} d\phi^j = f_0.$$

Ya que  $\int_{\mathbb{T}^n} f_0 d^n \phi = f_0 \int_{\mathbb{T}^n} d^n \phi = (2\pi)^n f_0$ , mientras que  $\int_0^{2\pi} e^{ik_j \phi^j} d\phi^j = 0$  por ser una integral de senos y cosenos a períodos completos.



Por otra parte, el promedio temporal queda

$$f^*(\phi_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( \int_0^T f_0 dt + \int_0^T \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \phi_0} e^{i\mathbf{k} \cdot \omega t} dt \right).$$

Como  $\mathbf{k} \cdot \omega \neq 0$  para cualquier  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ , tenemos que

$$\int_0^T e^{i\mathbf{k} \cdot \omega t} dt = \frac{e^{iT\mathbf{k} \cdot \omega} - 1}{iT\mathbf{k} \cdot \omega} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Luego

$$f^*(\phi_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left( T f_0 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \phi_0} \frac{e^{iT\mathbf{k} \cdot \omega} - 1}{iT\mathbf{k} \cdot \omega} \right) = f_0.$$

Por tanto,  $\bar{f} = f^*(\phi_0) = f_0$ . □

**Corolario 3.6.** Para cada  $\exp(\phi_0) \in \mathbb{T}^n$ , la órbita

$$\{\exp(\phi(t)) = \phi_0 + \omega t \mid t \in \mathbb{R}\},$$

es densa en  $\mathbb{T}^n$ .

*Demostración.* En caso contrario, tomemos  $D \in \mathbb{T}^n$  un abierto que no contenga a ningún  $\exp(\phi(t))$  y definamos la función

$$f(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi \notin D, \\ \frac{(2\pi)^n}{\int_D d^n \phi} & \text{si } \phi \in D. \end{cases}$$

Entonces

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_D \frac{(2\pi)^n}{\int_D d^n \phi} d^n \phi = \frac{\int_D d^n \phi}{\int_D d^n \phi} = 1$$

y

$$f^*(\phi_0 + \omega t) = 0,$$

lo que contradice el teorema. □

**Corolario 3.7.** Sean  $D \in \mathbb{T}^n$ ,

$$A_D = \{t \in \mathbb{R} \mid \phi(t) \in D\},$$

y<sup>1</sup>

$$\tau_D(T) = \int_0^T \chi_{A_D}(t) dt.$$

Entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_D(T)}{T} = \frac{\text{Vol}(D)}{(2\pi)^n}.$$

*Demostración.* Aplicamos el teorema a  $\chi_D$ . Claramente  $\bar{\chi}_D = \text{Vol}(D)/(2\pi)^n$ , mientras que

$$\chi_D^*(\phi(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_D(\phi(t)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{A_D}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \tau_D(T).$$

□

<sup>1</sup>Aquí  $\chi_A$  denota la función característica de un conjunto  $A$ ,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

**Ejemplo 3.8.** Vamos a ver un ejemplo de aplicación de estos resultados a un problema que a primera vista no tiene mucho que ver con la mecánica clásica. Consideremos la sucesión de las potencias de 2

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots$$

Y tomemos la sucesión de sus primeros dígitos

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, \dots$$

Cabe preguntarse ahora con qué frecuencia aparece cada dígito del 1 al 9 en esta sucesión. En particular, podemos preguntarnos cual será la relación entre la cantidad de setes y la de ochos.

Tomemos entonces una potencia de 2,  $2^n$ , y demos su expresión decimal

$$2^n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_0,$$

para un cierto  $k \in \mathbb{N}$  y unos ciertos  $a_0, \dots, a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Sacando factor común

$$2^n = 10^k (a_k + a_{k-1} 10^{-1} + \dots + a_0 10^{-k}) = 10^k a,$$

con

$$a = a_k + a_{k-1} 10^{-1} + \dots + a_0 10^{-k} \in (a_k, a_k + 1).$$

Tomando logaritmos decimales

$$n \log_{10} 2 = \log_{10} a + k.$$

Luego

$$e^{i2\pi n \log_{10} 2} = e^{i2\pi \log_{10} a}.$$

La pregunta original: «¿con qué frecuencia es  $x$  el primer dígito de  $2^n$ ?», se traduce entonces a una nueva pregunta: «¿con qué frecuencia es

$$e^{i2\pi n \log_{10} 2} = e^{i2\pi \log_{10} a}$$

para algún  $a \in (x, x + 1)$ ?». O lo que es lo mismo, si definimos el conjunto

$$D_x = \left\{ e^{i2\pi \log_{10} a} \mid a \in (x, x + 1) \right\},$$

queremos hallar el valor de

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left( \left\{ n < N \mid e^{i2\pi n \log_{10} 2} \in D_x \right\} \right).$$

Ahora, esto mismo se puede pensar de manera continua, de forma que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left( \left\{ n < N \mid e^{i2\pi n \log_{10} 2} \in D_x \right\} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ell \left( \left\{ t \in [0, T] \mid e^{i2\pi t \log_{10} 2} \in D_x \right\} \right),$$

donde  $\ell(A)$  denota la longitud del conjunto  $A$ . Ahora, si llamamos

$$A_{D_x} = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid e^{i2\pi t \log_{10} 2} \in D_x \right\},$$

tenemos que

$$\ell \left( \left\{ t \in [0, T] \mid e^{i2\pi t \log_{10} 2} \in D_x \right\} \right) = \int_0^T \chi_{A_{D_x}}(t) dt = \tau_{D_x}(T).$$

Como  $\log_{10} 2$  es irracional, podemos aplicar el corolario 3.7 tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left( \left\{ n < N \mid e^{i2\pi n \log_{10} 2} \in D_x \right\} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_{D_x}(T)}{T} = \frac{\ell(D_x)}{2\pi} = \log_{10}(x + 1) - \log_{10}(x).$$

Ver la tabla 1 y la figura 5.

□

TABLA 1. Probabilidades de los primeros dígitos en la sucesión de las potencias de 2

$x$	Freq( $x$ )	$\approx$
1	$\log_{10}(2)$	30,1 %
2	$\log_{10}(3) - \log_{10}(2)$	17,6 %
3	$\log_{10}(4) - \log_{10}(3)$	12,5 %
4	$\log_{10}(5) - \log_{10}(4)$	9,7 %
5	$\log_{10}(6) - \log_{10}(5)$	7,9 %
6	$\log_{10}(7) - \log_{10}(6)$	6,7 %
7	$\log_{10}(8) - \log_{10}(7)$	5,8 %
8	$\log_{10}(9) - \log_{10}(8)$	5,1 %
9	$1 - \log_{10}(9)$	4,6 %

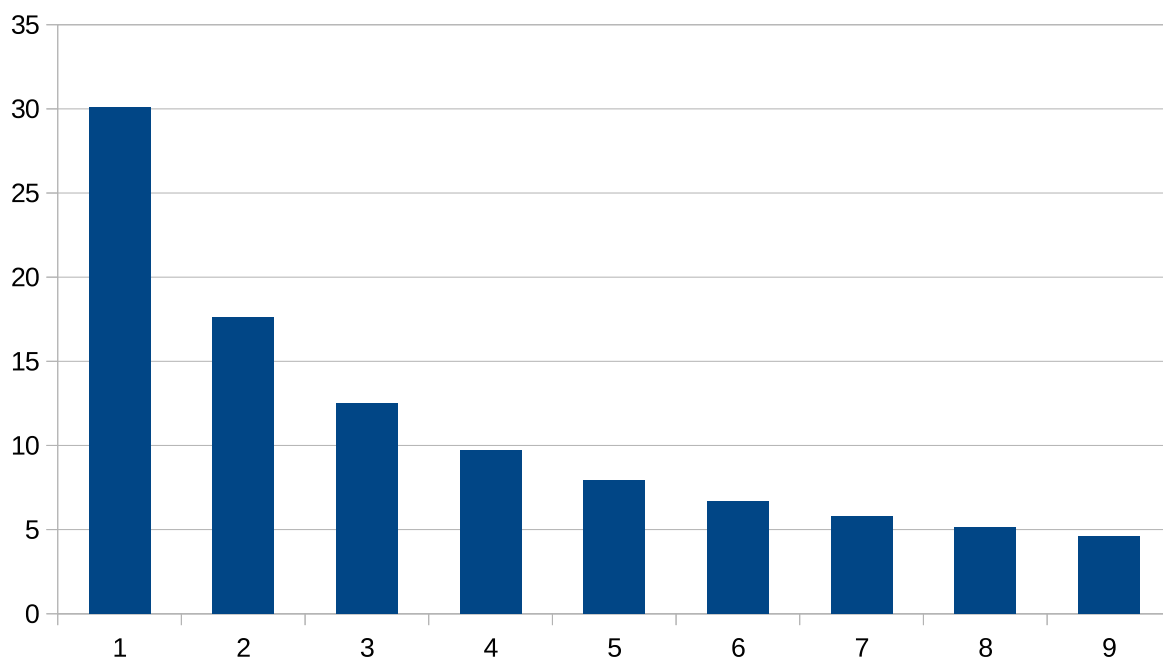


FIGURA 5. Probabilidad (en %) de los primeros dígitos en la sucesión de las potencias de 2

#### REFERENCIAS

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [2] H. Goldstein, C.P. Poole, and J.L. Safko. *Classical Mechanics*. Pearson Education India, 2011.
- [3] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Curso de física teórica (vol. 1): Mecánica*. Reverté, 1985.
- [4] Michael Spivak. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Publish or Perish, 2010.