

LECCIÓN III: SISTEMAS INTEGRABLES

GUILLERMO GALLEGO SÁNCHEZ

1. TEOREMA DE ARNOLD-LIOUVILLE

Definición 1.1. Un hamiltoniano H en una variedad simpléctica M de dimensión n se dice **completamente integrable** si admite n integrales primeras $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ **en involución** ($\{F_i, F_j\} = 0$ para cualesquiera $i, j = 1, \dots, n$) y **funcionalmente independientes** ($\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_n(x)$ linealmente independientes en casi todo punto $x \in M$).

Ejercicio 1.2. Probar que los siguientes sistemas hamiltonianos son completamente integrables:

1. Cualquier sistema con un grado de libertad.
2. Cualquier sistema con dos grados de libertad y una integral primera independiente de H .
3. El péndulo esférico. (Pista: Es invariante bajo rotaciones en el eje vertical).
4. El potencial central en \mathbb{R}^3 , cuyo hamiltoniano es

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r),$$

con $r = |\mathbf{q}|$. (Pista: Las integrales primeras necesarias son H, \mathbf{L}^2 y L_z .)

5. El trompo simétrico, de hamiltoniano

$$H(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi) = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta,$$

donde g es la aceleración gravitatoria, M la masa del trompo, ℓ la distancia de la punta al centro de masas, (θ, ϕ, ψ) los ángulos de Euler, $(p_\theta, p_\phi, p_\psi)$ sus momentos canónicos conjugados e I_1 e I_3 los momentos de inercia. □

Teorema 1.3 (Arnold-Liouville). *Sea un sistema hamiltoniano completamente integrable con las integrales en involución $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ y sea la función $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Fijamos $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Entonces*

1. El conjunto de nivel $M_{\mathbf{a}} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{a})$ es una subvariedad regular de M invariante bajo el flujo φ^H . Es decir, las órbitas de los puntos de $M_{\mathbf{a}}$ permanecen en $M_{\mathbf{a}}$.
2. Si $M_{\mathbf{a}}$ es compacta y conexa, entonces es difeomorfa al **toro n -dimensional**

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \overset{(n)}{\dots} \times \mathbb{S}^1.$$

En tal caso decimos que $M_{\mathbf{a}}$ es un **toro de Liouville**.

3. Si $M_{\mathbf{a}}$ es un toro de Liouville, podemos dar unas coordenadas $\boldsymbol{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ en $M_{\mathbf{a}}$ de tal manera que hay unas frecuencias constantes $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ tales que $\dot{\phi}^j(t) = \omega_j$.

Como consecuencia en $M_{\mathbf{a}}$ el flujo hamiltoniano se reduce a

$$\exp(\boldsymbol{\phi}(t)) = \exp(\boldsymbol{\phi}(0) + \boldsymbol{\omega}t),$$

con \exp una aplicación

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \overset{(n)}{\dots} \times \mathbb{S}^1 \\ \boldsymbol{\phi} &\longmapsto \exp(\boldsymbol{\phi}) = (e^{i\phi^1}, \dots, e^{i\phi^n}). \end{aligned}$$

Este tipo de flujo en el toro se llama **movimiento condicionalmente periódico**.

Demostración.

1. Como F_1, \dots, F_n son funcionalmente independientes, \mathbf{F} tiene rango máximo y, por el teorema de la función implícita $M_{\mathbf{a}} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{a}) \subset M$ es una subvariedad regular de M . Además, como $\{F_i, F_j\} = 0$, los campos conmutan, $[X^{F_i}, X^{F_j}] = 0$, y $\omega(X^{F_i}, X^{F_j}) = 0$, lo que implica que $dF_j(X^{F_i}) = 0$, o lo que es lo mismo, $\nabla F_j \cdot X^{F_i} = 0$, de modo que los campos X^{F_i} son tangentes a $M_{\mathbf{a}}$. En particular, X^H será tangente a $M_{\mathbf{a}}$, luego $M_{\mathbf{a}}$ es invariante bajo el flujo φ^H .

2. La demostración de esta parte consiste en aplicar el siguiente lema con $N = M_{\mathbf{a}}$ y $X_i = X^{F_i}$.

Lema 1. *Sea N una variedad diferenciable de dimensión n conexa y compacta tal que existen unos campos X_1, \dots, X_n linealmente independientes tales que, para cualesquiera $i, j = 1, \dots, n$, $[X_i, X_j] = 0$. Entonces N es difeomorfa al toro n -dimensional.*

Demostración. Sea g_i el flujo de cada X_i . Como $[X_i, X_j] = 0$ para cualesquiera i, j , los flujos conmutan, es decir, para cualesquiera i, j ,

$$g_{i,t} \circ g_{j,s} = g_{j,s} \circ g_{i,t},$$

para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$. Como los flujos conmutan, fijo $x_0 \in N$, puedo definir la acción

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$$

$$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \longmapsto g_{\mathbf{t}}(x_0) = g_{1,t_1} \circ \dots \circ g_{n,t_n}(x_0).$$

Como los campos son linealmente independientes, la diferencial $d_{\mathbf{t}}g$ es un isomorfismo lineal y, por el teorema de la función inversa, g es un difeomorfismo local.

Ejercicio 1.4. Probar que g es sobreyectiva. □

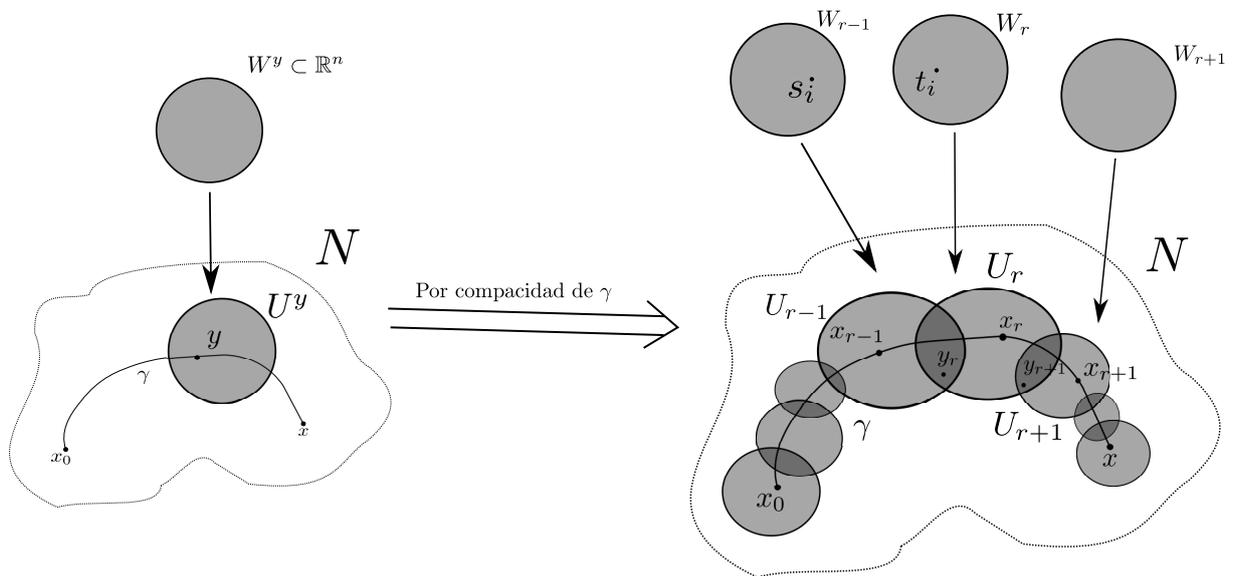


FIGURA 1. Idea de que g es sobreyectiva

Por tanto, g es un difeomorfismo local sobreyectivo, luego es un cociente. Sea

$$\Gamma = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \mid g_{\mathbf{t}}(x_0) = x_0\}.$$

Ejercicio 1.5. Probar que Γ es un subgrupo cerrado de $(\mathbb{R}^n, +)$. □

Por tanto, la aplicación \tilde{g} inducida por el siguiente diagrama es un difeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & N \\ \downarrow \pi & \nearrow \tilde{g} & \\ \mathbb{R}^n/\Gamma & & \end{array}$$

donde π denota la proyección canónica al cociente.

Ahora, si $\Gamma = \{0\}$, entonces $g : \mathbb{R}^n \rightarrow N$ es un difeomorfismo, pero esto no puede ser porque N es compacta. De modo que $\Gamma \neq \{0\}$. Como g es un difeomorfismo local, existe un entorno $V \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tal que $\Gamma \cap V = \{0\}$, que se puede trasladar a cualquier $\mathbf{t} \in \Gamma$. Es decir, en torno a cada $\mathbf{t} \in \Gamma$, existe un entorno $V + \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma \cap (V + \mathbf{t}) = \{\mathbf{t}\}$. Luego Γ es un grupo discreto.

Ejercicio 1.6. Probar que si Γ es un subgrupo cerrado y discreto de $(\mathbb{R}^n, +)$ entonces Γ es isomorfo a \mathbb{Z}^k para cierto $k \in \{1, \dots, n\}$. Es decir, que existen unos vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \Gamma$ tales que

$$\Gamma = \{n_1 \mathbf{u}_1 + \dots + n_k \mathbf{u}_k \mid n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}\}.$$

(Pista: Usar la idea de la figura 2 y proceder por inducción.) □

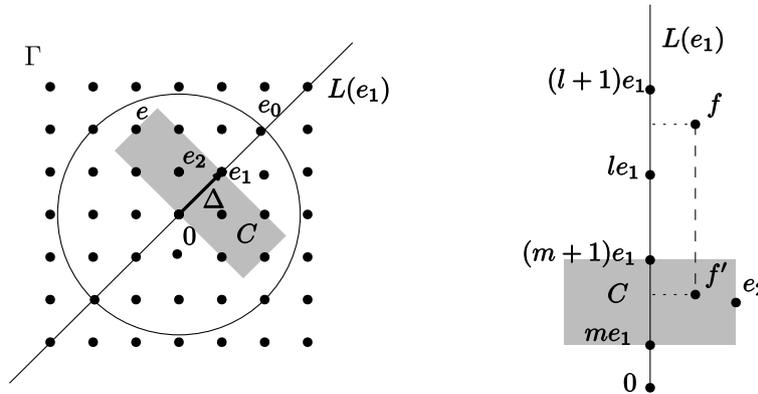


FIGURA 2. Idea de que $\Gamma \cong \mathbb{Z}^k$.

Finalmente, podemos considerar la aplicación

$$\begin{aligned} \varpi &= (\exp, \text{id}) : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ &(\phi, \mathbf{y}) \longmapsto (\exp \phi, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

y un isomorfismo lineal ζ tal que

$$\begin{aligned} \zeta : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\phi, 0) &\longmapsto \frac{\phi^1}{2\pi} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\phi^k}{2\pi} \mathbf{u}_k. \end{aligned}$$

Si llamamos

$$2\pi\mathbb{Z}^k = \{(2\pi n_1, \dots, 2\pi n_k, 0, \dots, 0) \mid n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Entonces claramente

$$\ker \varpi = \varpi^{-1}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) = 2\pi\mathbb{Z}^k.$$

De modo que puedo ver ϖ como un cociente $\varpi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^k = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Por otra parte

$$\zeta(2\pi\mathbb{Z}^k) = \Gamma.$$

Ahora, como $\Gamma = \ker \pi$, con $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$, tenemos que

$$\zeta(\ker \varpi) = \ker \pi.$$

Por tanto el isomorfismo ζ desciende a los cocientes y la aplicación $\tilde{\zeta}$ dada por el siguiente diagrama es un difeomorfismo

$$\begin{array}{ccccc}
2\pi\mathbb{Z}^k & \xrightarrow{\zeta|} & \Gamma & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{R}^n & & \\
\downarrow \varpi=(\exp, \text{id}) & & \downarrow \pi & \searrow g & \\
\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^k & \xrightarrow{\tilde{\zeta}} & \mathbb{R}^n/\Gamma & \xrightarrow{\tilde{g}} & N.
\end{array}$$

Por tanto, la aplicación $\tilde{g} \circ \tilde{\zeta} : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow N$ es un difeomorfismo. Ahora, como habíamos dicho que N es compacta, k debe ser igual a n , de modo que N es difeomorfa a \mathbb{T}^n . Esto prueba el **Lema 1**. \square

3. Fijo un punto $x_0 \in M_a$ consideremos el diagrama de la demostración del lema, con $g = \varphi_{\bullet}^{\mathbf{F}}(x_0)$ la aplicación

$$\begin{aligned}
\varphi_{\bullet}^{\mathbf{F}}(x_0) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow M_a \\
\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto \varphi_{\mathbf{t}}^{\mathbf{F}}(x_0) = \varphi_{t_1}^{F_1} \circ \dots \circ \varphi_{t_n}^{F_n}(x_0).
\end{aligned}$$

y tomemos la parametrización ψ dada por

$$\begin{array}{ccccc}
& & & \psi & \\
& & & \curvearrowright & \\
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{R}^n & & \\
\downarrow \exp & & \downarrow \pi & \searrow \varphi_{\bullet}^{\mathbf{F}}(x_0) & \\
\mathbb{T}^n & \xrightarrow{\tilde{\zeta}} & \mathbb{R}^n/\Gamma & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{\bullet}^{\mathbf{F}}(x_0)} & M_a.
\end{array}$$

Es decir,

$$\psi(\phi) = \varphi_{\zeta(\phi)}^{\mathbf{F}}(\psi(0)).$$

Ahora, sea ω tal que $\zeta(\omega) = (1, 0, \dots, 0)$. Entonces

$$\psi(\omega t) = \varphi_{\zeta(\omega t)}^{\mathbf{F}}(\psi(0)) = \varphi_{(t, 0, \dots, 0)}^{\mathbf{F}}(\psi(0)) = \varphi_t^{F_1}(\psi(0)) = \varphi_t^H(\psi(0)).$$

Finalmente, observamos que, como la elección de $\psi(0)$ es arbitraria, podemos ver el flujo hamiltoniano en el toro como

$$\exp(\phi(t)) = \exp(\phi(0) + \omega t).$$

Esto concluye la demostración del teorema de Arnold-Liouville. \square

2. OSCILADORES ARMÓNICOS

Consideremos el oscilador armónico en una dimensión, descrito por el hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2.$$

En este caso la integral primera será el propio hamiltoniano, y los toros de Liouville con $H(q, p) = E$ vendrán dados por la ecuación

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/m\omega^2} = 1.$$

Es decir, los toros de Liouville serán elipses con semiejes $\sqrt{2mE}$ y $\sqrt{2E/m}/\omega$.

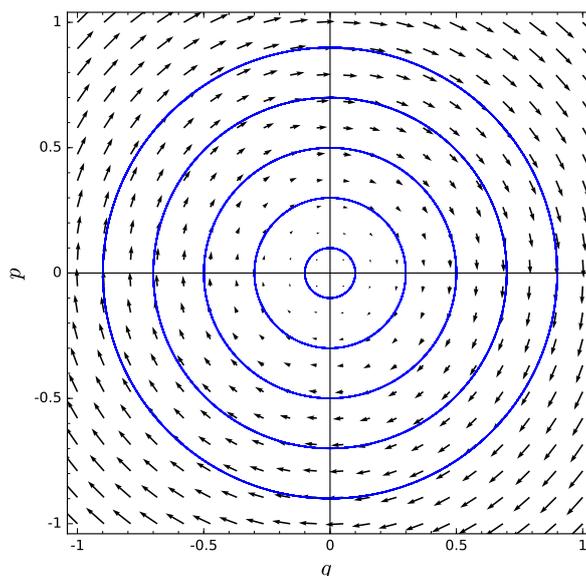


FIGURA 3. Espacio de fases del oscilador armónico (con $m = \omega = 1$).

Cabría considerar ahora unas coordenadas «polares» (ϕ, E) , con E constante en cada elipse y ϕ el ángulo polar en estas elipses. Nos preguntamos entonces si en estas coordenadas podremos expresar las ecuaciones de Hamilton en su forma usual, es decir, si son coordenadas canónicas, o lo que es lo mismo, si la transformación $(q, p) \mapsto (\phi, E)$ es canónica. Para ello, escribamos explícitamente la transformación y hallemos la expresión de la forma simpléctica:

$$\begin{cases} q(\phi, E) = \frac{\sqrt{2E/m}}{\omega} \cos \phi \\ p(\phi, E) = \sqrt{2mE} \sin \phi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} dq = \frac{1}{\omega\sqrt{2mE}} \cos \phi dE - \frac{\sqrt{2E/m}}{\omega} \sin \phi d\phi \\ dp = \sqrt{\frac{m}{2E}} \sin \phi dE + \sqrt{2mE} \cos \phi d\phi, \end{cases}$$

$$dp \wedge dq = -\frac{1}{\omega} \sin^2 \phi dE \wedge d\phi + \frac{1}{\omega} \cos^2 \phi d\phi \wedge dE = -\frac{1}{\omega} dE \wedge d\phi.$$

De modo que en general las variables (ϕ, E) no son canónicas, pero podemos definir la **variable de acción**

$$J = -\frac{E}{\omega},$$

de manera que

$$dp \wedge dq = dJ \wedge d\phi,$$

y (ϕ, J) son unas variables canónicas.

Podemos dotar de sentido geométrico a la variable de acción si nos damos cuenta de que el área encerrada por la elipse $H(q, p) = E$ es precisamente

$$A_E = \pi\sqrt{2mE} \frac{\sqrt{2E/m}}{\omega} = 2\pi \frac{E}{\omega} = -2\pi J.$$

Por otra parte, si llamamos M_E a la elipse $H(q, p) = E$ y S_E a la superficie que encierra podemos aplicar el teorema de Stokes y mostrar

$$A_E = \int_{S_E} dp \wedge dq = \int_{M_E} pdq.$$

Por tanto,

$$J = -\frac{1}{2\pi} \int_{M_E} p dq.$$

Más generalmente podemos considerar un sistema de n osciladores armónicos, con espacio de fases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y hamiltoniano

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{p_i^2}{m_i} + m_i \omega_i^2 (q^i)^2 \right) = \sum_{i=1}^n H_i.$$

Ejercicio 2.1. Probar que H_1, \dots, H_n están en involución. \square

Los toros de Liouville con $(H_1, \dots, H_n) = \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ vendrán dados entonces por productos cartesianos de elipses de ecuaciones

$$\frac{p_i^2}{m_i} + m_i \omega_i^2 (q^i)^2 = 2a_i,$$

con $i = 1, \dots, n$. Si tomamos $\boldsymbol{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ variables angulares en estas elipses, con $\gamma_{\mathbf{a},i}$ sus curvas paramétricas, podemos construir las variables de acción $\mathbf{J} = (J_1, \dots, J_n)$ como

$$J_i = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_{\mathbf{a},i}} p_i dq^i = -\frac{a_i}{\omega_i}.$$

De modo que las *variables de acción-ángulo* $(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{J})$ son coordenadas canónicas y por tanto cumplen las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{\phi}^i = \frac{\partial H}{\partial J_i} \\ \dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \phi^i}. \end{cases}$$

Ahora, como las J_i son constantes en cada toro de Liouville, las $\frac{\partial H}{\partial \phi^i} = 0$, luego H sólo depende de las variables de acción, $H = H(\mathbf{J})$. En este caso concreto, $H = \sum_i \omega_i J_i$. Como H sólo depende de \mathbf{J} , las $\dot{\phi}^i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$ son constantes en cada toro invariante. En este caso $\dot{\phi}^i = \omega_i$. Por tanto, el sistema queda resuelto en la forma

$$\begin{cases} \mathbf{J}(t) = \mathbf{J}(0) \\ \boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\phi}(0) + \boldsymbol{\omega}t. \end{cases}$$

3. MOVIMIENTO CONDICIONALMENTE PERIÓDICO

Definición 3.1. Sea \mathbb{T}^n el toro n -dimensional con unas coordenadas angulares $\boldsymbol{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^n)$. Se llama un *movimiento condicionalmente periódico* a un flujo en el toro de la forma

$$\exp(\boldsymbol{\phi}(t)) = \exp(\boldsymbol{\phi}(0) + \boldsymbol{\omega}t),$$

con $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ unas frecuencias constantes en el toro. Decimos que las frecuencias $\boldsymbol{\omega}$ son *conmesurables* si existe $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ tal que

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} = k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n = 0.$$

En caso contrario decimos que las frecuencias son *inconmesurables*.

Ejemplo 3.2. Consideremos el toro 2-dimensional $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ con el flujo

$$\exp(\boldsymbol{\phi}(t)) = \exp(\omega_1 t, \omega_2 t).$$

Si las frecuencias ω_1, ω_2 son conmesurables, entonces existen números $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $\omega_1/\omega_2 = m/n$. En tal caso,

$$\exp\left(\boldsymbol{\phi}\left(\frac{2\pi n}{\omega_2}\right)\right) = \exp\left(\omega_1 \frac{2\pi n}{\omega_2}, \omega_2 \frac{2\pi n}{\omega_2}\right) = \exp(2\pi m, 2\pi n) = \exp(0, 0) = \exp(\boldsymbol{\phi}(0)).$$

Ahora, si las frecuencias son inconmensurables, entonces ω_1/ω_2 es irracional. Ahora, dado un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$, llamamos $T = \alpha/\omega_1$ y tomamos la sucesión $T_n = T + 2\pi n/\omega_1$, para $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos entonces

$$\exp(\phi(T_n)) = \exp(\omega_1 T_n, \omega_2 T_n) = \exp\left(\alpha + 2\pi n, \omega_2 T + 2\pi n \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \exp\left(\alpha, \alpha \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2\pi n \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

Esta familia $\{\exp(\phi(T_n))\}_{n \in \mathbb{Z}}$ consiste en iteraciones de rotaciones de ángulo un múltiplo irracional de 2π y, por el teorema de equidistribución (que probaremos a continuación) es densa en la circunferencia $\{e^{i\alpha}\} \times \mathbb{S}^1$. Como esto es válido para cualquier α , el flujo es denso en

$$\mathbb{T}^2 = \bigcup_{\alpha} (\{e^{i\alpha}\} \times \mathbb{S}^1).$$

Estas ideas se visualizan fácilmente con las *figuras de Lissajous*

$$L_{\omega} = \{(\cos t, \cos \omega t) | t \in \mathbb{R}\},$$

(ver figura 4).

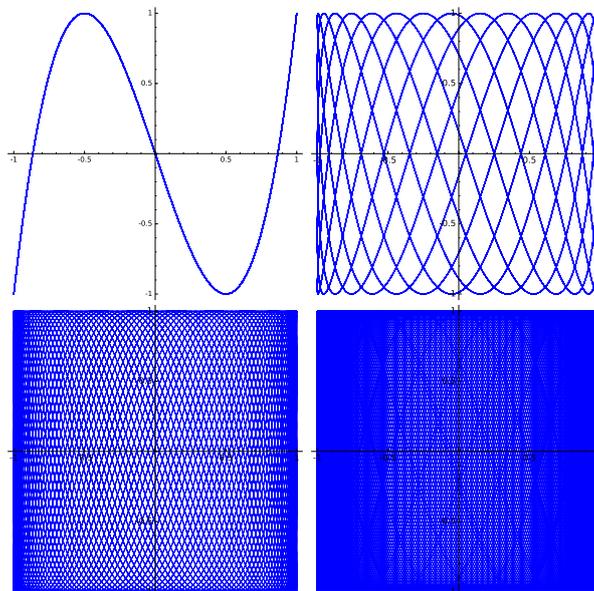


FIGURA 4. Figuras de Lissajous con $\omega = 3, 3.1, 3.14, 3.1416$.

□

Teorema 3.3 (Teorema de equidistribución). *Sea la aplicación*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ e^{i\phi} &\longmapsto e^{i(\phi+2\pi q)}, \end{aligned}$$

con q un número irracional. Entonces, para todo $e^{i\phi} \in \mathbb{S}^1$, el conjunto

$$\{g^k(e^{i\phi}) | k \in \mathbb{N}\}$$

es denso en \mathbb{S}^1 .

Demostración. Sean $e^{i\phi}, e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $U = (\phi - \varepsilon, \phi + \varepsilon)$. Consideremos el conjunto $\{g^n(\exp(U)) | n \in \mathbb{N}\}$. Como cada uno de estos $g^n(\exp(U))$ tiene una medida > 0 , si ninguno de ellos se cortara con ningún otro, la unión de familia tendría medida infinita, pero esto es absurdo

porque esta familia está contenida en la circunferencia, que tiene medida finita. Por tanto, existen $k, l \in \mathbb{N}$, supongamos $k > l$, tales que

$$g^k(\exp(U)) \cap g^l(\exp(U)) \neq \emptyset.$$

Pero si definimos $A = g^{k-l}(\exp(U)) \cap \exp(U)$, entonces $g^l(A) \neq \emptyset$, luego $A \neq \emptyset$. Por tanto, existen $\psi, \psi' \in U$ tales que $g^{k-l}(e^{i\psi'}) = e^{i\psi}$. Es decir

$$e^{i(\psi'+2\pi q(k-l))} = e^{i\psi}.$$

Multiplicando a ambos lados por $e^{i(\phi-\psi')}$ tenemos

$$g^{k-l}(e^{i\phi}) = e^{i(\phi+2\pi(k-l)q)} = e^{i(\phi+\psi-\psi')} = e^{i(\phi+\delta)}.$$

Donde hemos definido $\delta = \psi - \psi'$. Nótese que $|\delta| < \varepsilon$.

Finalmente, sea $s = \left[\frac{\theta-\phi}{\delta} \right]$, donde $[\bullet]$ denota la función parte entera. Entonces

$$\left| \frac{\theta-\phi}{\delta} - s \right| = \left| \frac{\theta-\phi}{\delta} - \left[\frac{\theta-\phi}{\delta} \right] \right| \leq 1,$$

luego

$$|\theta - \phi - \delta s| \leq |\delta| < \varepsilon.$$

Y además,

$$g^{s(k-l)}(e^{i\phi}) = e^{i(\phi+2\pi qs(k-l))} = e^{i(\phi+\delta s)}$$

mientras que

$$e^{i\theta} = e^{i\phi+(\theta-\phi)}.$$

De modo que para cada $\varepsilon > 0$ y para cada θ , hemos encontrado un $n = s(k-l) \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(e^{i\phi})$ «dista» de $e^{i\theta}$ menos de ε . Por tanto, $\{g^k(e^{i\phi}) | k \in \mathbb{N}\}$ es denso en \mathbb{S}^1 . \square

Definición 3.4. Sea el toro n -dimensional \mathbb{T}^n y un movimiento condicionalmente periódico

$$\exp(\phi(t)) = \exp(\phi(0) + \omega t).$$

Sea una función $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos el **promedio espacial** de f como el número

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\phi) d^n \phi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(\phi^1, \dots, \phi^n) d\phi^1 \cdots d\phi^n.$$

Se define el **promedio temporal** de f como la función

$$f^*(\phi_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi_0 + \omega t) dt.$$

Teorema 3.5 (Mi primer teorema ergódico). *Si las ω son inconmesurables, entonces*

$$f^*(\phi_0) = \bar{f},$$

para todo ϕ_0 .

Demostración. Como la función $f(\phi)$ es una función 2π -periódica se puede expandir en un desarrollo de Fourier, en la forma

$$f(\phi_1, \dots, \phi_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}} f_{k_1, \dots, k_n} e^{i(k_1 \phi^1 + \cdots + k_n \phi^n)} = f_0 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \phi}.$$

Podemos calcular entonces el promedio espacial como

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f_0 d^n \phi + \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^n \int_0^{2\pi} e^{ik_j \phi^j} d\phi^j = f_0.$$

Ya que $\int_{\mathbb{T}^n} f_0 d^n \phi = f_0 \int_{\mathbb{T}^n} d^n \phi = (2\pi)^n f_0$, mientras que $\int_0^{2\pi} e^{ik_j \phi^j} d\phi^j = 0$ por ser una integral de senos y cosenos a períodos completos.

Por otra parte, el promedio temporal queda

$$f^*(\phi_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T f_0 dt + \int_0^T \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \phi_0} e^{i\mathbf{k} \cdot \omega t} dt \right).$$

Como $\mathbf{k} \cdot \omega \neq 0$ para cualquier $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, tenemos que

$$\int_0^T e^{i\mathbf{k} \cdot \omega t} dt = \frac{e^{iT\mathbf{k} \cdot \omega} - 1}{iT\mathbf{k} \cdot \omega} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Luego

$$f^*(\phi_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(T f_0 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \phi_0} \frac{e^{iT\mathbf{k} \cdot \omega} - 1}{iT\mathbf{k} \cdot \omega} \right) = f_0.$$

Por tanto, $\bar{f} = f^*(\phi_0) = f_0$. □

Corolario 3.6. Para cada $\exp(\phi_0) \in \mathbb{T}^n$, la órbita

$$\{\exp(\phi(t)) = \phi_0 + \omega t \mid t \in \mathbb{R}\},$$

es densa en \mathbb{T}^n .

Demostración. En caso contrario, tomemos $D \in \mathbb{T}^n$ un abierto que no contenga a ningún $\exp(\phi(t))$ y definamos la función

$$f(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi \notin D, \\ \frac{(2\pi)^n}{\int_D d^n \phi} & \text{si } \phi \in D. \end{cases}$$

Entonces

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_D \frac{(2\pi)^n}{\int_D d^n \phi} d^n \phi = \frac{\int_D d^n \phi}{\int_D d^n \phi} = 1$$

y

$$f^*(\phi_0 + \omega t) = 0,$$

lo que contradice el teorema. □

Corolario 3.7. Sean $D \in \mathbb{T}^n$,

$$A_D = \{t \in \mathbb{R} \mid \phi(t) \in D\},$$

y¹

$$\tau_D(T) = \int_0^T \chi_{A_D}(t) dt.$$

Entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_D(T)}{T} = \frac{\text{Vol}(D)}{(2\pi)^n}.$$

Demostración. Aplicamos el teorema a χ_D . Claramente $\bar{\chi}_D = \text{Vol}(D)/(2\pi)^n$, mientras que

$$\chi_D^*(\phi(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_D(\phi(t)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{A_D}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \tau_D(T).$$

□

¹Aquí χ_A denota la función característica de un conjunto A ,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Ejemplo 3.8. Vamos a ver un ejemplo de aplicación de estos resultados a un problema que a primera vista no tiene mucho que ver con la mecánica clásica. Consideremos la sucesión de las potencias de 2

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots$$

Y tomemos la sucesión de sus primeros dígitos

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, \dots$$

Cabe preguntarse ahora con qué frecuencia aparece cada dígito del 1 al 9 en esta sucesión. En particular, podemos preguntarnos cuál será la relación entre la cantidad de setes y la de ochos.

Tomemos entonces una potencia de 2, 2^n , y demos su expresión decimal

$$2^n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_0,$$

para un cierto $k \in \mathbb{N}$ y unos ciertos $a_0, \dots, a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Sacando factor común

$$2^n = 10^k (a_k + a_{k-1} 10^{-1} + \dots + a_0 10^{-k}) = 10^k a,$$

con

$$a = a_k + a_{k-1} 10^{-1} + \dots + a_0 10^{-k} \in (a_k, a_k + 1).$$

Tomando logaritmos decimales

$$n \log_{10} 2 = \log_{10} a + k.$$

Luego

$$e^{i2\pi n \log_{10} 2} = e^{i2\pi \log_{10} a}.$$

La pregunta original: «¿con qué frecuencia es x el primer dígito de 2^n ?», se traduce entonces a una nueva pregunta: «¿con qué frecuencia es

$$e^{i2\pi n \log_{10} 2} = e^{i2\pi \log_{10} a}$$

para algún $a \in (x, x + 1)$?». O lo que es lo mismo, si definimos el conjunto

$$D_x = \left\{ e^{i2\pi \log_{10} a} \mid a \in (x, x + 1) \right\},$$

queremos hallar el valor de

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left(\left\{ n < N \mid e^{i2\pi n \log_{10} 2} \in D_x \right\} \right).$$

Ahora, esto mismo se puede pensar de manera continua, de forma que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left(\left\{ n < N \mid e^{i2\pi n \log_{10} 2} \in D_x \right\} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ell \left(\left\{ t \in [0, T] \mid e^{i2\pi t \log_{10} 2} \in D_x \right\} \right),$$

donde $\ell(A)$ denota la longitud del conjunto A . Ahora, si llamamos

$$A_{D_x} = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid e^{i2\pi t \log_{10} 2} \in D_x \right\},$$

tenemos que

$$\ell \left(\left\{ t \in [0, T] \mid e^{i2\pi t \log_{10} 2} \in D_x \right\} \right) = \int_0^T \chi_{A_{D_x}}(t) dt = \tau_{D_x}(T).$$

Como $\log_{10} 2$ es irracional, podemos aplicar el corolario 3.7 tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{card} \left(\left\{ n < N \mid e^{i2\pi n \log_{10} 2} \in D_x \right\} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_{D_x}(T)}{T} = \frac{\ell(D_x)}{2\pi} = \log_{10}(x + 1) - \log_{10}(x).$$

Ver la tabla 1 y la figura 5.

□

TABLA 1. Probabilidades de los primeros dígitos en la sucesión de las potencias de 2

x	Freq(x)	\approx
1	$\log_{10}(2)$	30,1 %
2	$\log_{10}(3) - \log_{10}(2)$	17,6 %
3	$\log_{10}(4) - \log_{10}(3)$	12,5 %
4	$\log_{10}(5) - \log_{10}(4)$	9,7 %
5	$\log_{10}(6) - \log_{10}(5)$	7,9 %
6	$\log_{10}(7) - \log_{10}(6)$	6,7 %
7	$\log_{10}(8) - \log_{10}(7)$	5,8 %
8	$\log_{10}(9) - \log_{10}(8)$	5,1 %
9	$1 - \log_{10}(9)$	4,6 %

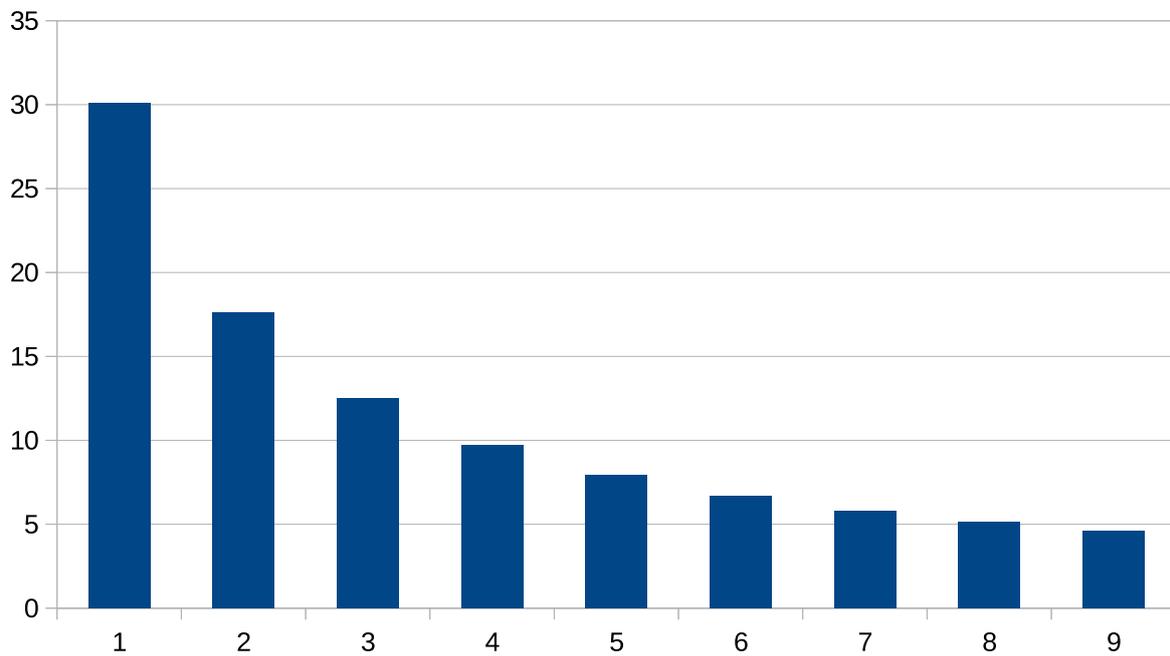


FIGURA 5. Probabilidad (en %) de los primeros dígitos en la sucesión de las potencias de 2

REFERENCIAS

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [2] H. Goldstein, C.P. Poole, and J.L. Safko. *Classical Mechanics*. Pearson Education India, 2011.
- [3] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Curso de física teórica (vol. 1): Mecánica*. Reverté, 1985.
- [4] Michael Spivak. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Publish or Perish, 2010.