LECCIÓN II: GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA

GUILLERMO GALLEGO SÁNCHEZ

1. Variedades simplécticas

Definición 1.1. Una ***variedad simpléctica*** es un par (M, ω) donde M es una variedad diferenciable de dimensión $2n$ y ω es una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada.

Hay algunas restricciones para lo que puede ser y no ser una variedad simpléctica:

1. En cada punto $x \in M$, ω_x es una forma bilineal antisimétrica y no degenerada, luego puede diagonalizarse (**Ejercicio**: Probar que esto es así) a una forma con matriz asociada
$$\mathbb{J}_n = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}.$$
De modo que toda variedad simpléctica debe tener dimensión par.
2. Toda variedad simpléctica es orientable: $\omega^n = \omega \wedge \overset{(n)}{\ldots} \wedge \omega$ es una forma de volumen («volumen de Liouville»).
3. Si M es compacta y sin borde ω no es exacta. De ser así, $\omega = \mathrm{d}\alpha$, entonces $\omega^n = \mathrm{d}(\alpha \wedge \omega^{n-1})$. Ahora, el volumen de Liouville de M es, por el teorema de Stokes,
$$\mathrm{Vol}(M) = \int_M \omega^n = \int_M \mathrm{d}(\alpha \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M = \varnothing} \alpha \wedge \omega^{n-1} = 0,$$
y esto es absurdo; el volumen de M no puede ser 0. En particular, hemos visto que el segundo grupo de cohomología de de Rham de M, $H^2_{dR}(M) \neq 0$.

Ejercicio 1.2.

1. Dotar a la esfera $\mathbb{S}^2$ de la estructura de variedad simpléctica.
2. ¿Cuáles de las siguientes variedades admiten una estructura simpléctica?
$$\mathbb{R}^3,\ \mathbb{CP}^3,\ \mathbb{RP}^2,\ \mathbb{S}^4,\ \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3,\ \mathbb{RP}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

□

Antes hemos comentado que ω puede diagonalizarse *infinitesimalmente* a una forma con matriz asociada $\mathbb{J}_n$. El teorema de Darboux afirma un hecho sorprendente: también puede diagonalizarse *localmente*. Esto en particular implica que una variedad simpléctica no tiene invariantes locales.

Teorema 1.3 (Darboux)**.** *Sean M una variedad diferenciable y ω una 2-forma cerrada y no degenerada en M. Entonces para cada $x \in M$ existen un entorno $U \subset M$ de x y una parametrización $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi^*\omega$ tiene coeficientes constantes.*

Corolario 1.4. *En torno a cada punto $x \in M$ podemos dar unas coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ en las que ω se escribe*
$$\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i.$$
Estas coordenadas se llaman ***coordenadas canónicas*** *o* ***de Darboux***.

2. Simplectomorfismos

Podemos entender los simplectomorfismos como cambios de coordenadas que «preservan» la estructura simpléctica.

Definición 2.1. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $f : M \to M$ un difeomorfismo. Se dice que f es un ***simplectomorfismo*** si $f^*\omega = \omega$.

Proposición 2.2. *Una difeomorfismo $f : M \to M$ es un simplectomorfismo si y sólo si, si $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ son coordenadas canónicas en un entorno U de un punto $x \in M$, entonces $(\mathbf{q} \circ f, \mathbf{p} \circ f)$ son coordenadas canónicas en $f^{-1}(U)$.*

Demostración. Basta darse cuenta de que

$$\mathrm{d}(p_i \circ f) \wedge \mathrm{d}(q^i \circ f) = f^*(\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i) = f^*\omega,$$

que es igual a ω si y sólo si f es un simplectomorfismo. □

Ejercicio 2.3 (El grupo simpléctico real)**.** Se define el ***n-ésimo grupo simpléctico real*** $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ como el conjunto de las matrices $A \in \mathcal{M}^{2n\times 2n}$ tales que

$$A^t \mathbb{J}_n A = \mathbb{J}_n.$$

Probar:

1. Si $f : M \to M$ es un simplectomorfismo entonces, para todo punto $x \in M$, su matriz jacobiana $J_x f \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$.
2. Si $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ entonces $\det(A) = 1$ o $\det(A) = -1$.
3. Si $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ entonces $\det(A) = 1$.
4. $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^{4n^2}$.

□

3. Campos simplécticos y hamiltonianos

Nótese que en cada punto x de una variedad simpléctica (M, ω) tenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} T_x M &\longrightarrow (T_x M)^* \\ v &\longmapsto \omega_x(\bullet, v). \end{aligned}$$

En general, a cada campo X en M le podemos asociar la forma $\omega(\bullet, X) = -i_X\omega$.

Si consideramos una familia uniparamétrica de simplectomorfismos f_t generada por un campo X, entonces

$$\mathcal{L}_X\omega = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_t^*\omega = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \omega = 0.$$

Recíprocamente, si X es un campo tal que $\mathcal{L}_X\omega = 0$ y φ_t es su flujo, entonces

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\varphi_t^*\omega) = \varphi_{t_0}^* \left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \varphi_{t-t_0}^*\omega \right] = \varphi_{t_0}^* \left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t^*\omega \right] = \varphi_{t_0}^*(\mathcal{L}_X\omega) = \varphi_{t_0}^*(0) = 0.$$

Es decir, los campos con $\mathcal{L}_X\omega = 0$ «preservan» la forma simpléctica. Estos campos se llaman ***campos simplécticos***.

Si aplicamos la fórmula de Cartan, tenemos que

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(i_X\omega) = \mathrm{d}(i_X\omega).$$

Por tanto, un campo es simpléctico si y sólo si $i_X\omega$ es cerrada. En el caso en que $i_X\omega$ sea exacta se dice que X es un ***campo hamiltoniano***. Si X es un campo hamiltoniano entonces existe una función $H : M \to \mathbb{R}$ tal que $i_X\omega = -\mathrm{d}H$. En tal caso decimos que H es el ***hamiltoniano*** de X y denotamos $X = X^H$. Como un campo hamiltoniano es en particular simpléctico, el ***flujo***

hamiltoniano de H, que es el flujo generado por X^H y se denota por φ^H, preserva la forma ω y, en particular, el volumen ω^n. Este resultado es análogo al clásico ***teorema de Liouville***.

Localmente, en unas coordenadas canónicas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, un campo hamiltoniano X^H se escribirá

$$X^H = a_i \partial_{q^i} + b_i \partial_{p_i}.$$

Ahora,

$$-i_{X^H}\omega = -\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i (a_i \partial_{q^i} + b_i \partial_{p_i}, \bullet) = -b_i \mathrm{d}q^i + a_i \mathrm{d}p_i,$$

y

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p^i,$$

luego

$$X^H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\partial_{q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\partial_{p_i}.$$

De modo que las curvas integrales $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ de X^H seguirán las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Cabe preguntarse ahora cuándo coincidirán los campos simplécticos y los hamiltonianos. Para ello observemos que la siguiente sucesión

$$\mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{X^\bullet} \mathrm{Simp}(M) \xrightarrow{[i_\bullet \omega]} H^1(M)$$

(donde $\mathrm{Simp}(M)$ denota el espacio de los campos simplécticos) es exacta y, de hecho

$$\mathrm{Ham}(M) := \ker([i_\bullet \omega]) = \mathrm{im}(X^\bullet)$$

es precisamente el espacio de los campos hamiltonianos. Nótese entonces que si $H^1(M) = 0$ entonces todo campo simpléctico en M es hamiltoniano. Nótese también por esto mismo que todo campo simpléctico es localmente hamiltoniano.

Ejercicio 3.1. Encontrar un campo simpléctico que no sea hamiltoniano. □

4. Corchete de Poisson

Definición 4.1. Sean dos funciones $H, K : M \to \mathbb{R}$. Se define el ***corchete de Poisson*** de H y K como la función

$$\{H, K\} = X^H K.$$

Ejercicio 4.2. Probar las siguientes identidades

1. $\{H, K\} = \mathrm{d}K(X^H) = \omega(X^H, X^K)$
2. $[X^H, X^K] = X^{\{H,K\}}$
3. (***Ecuación de Liouville***)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} K(\varphi_t^H(x)) = \{H, K\}\,(\varphi_{t_0}^H(x)).$$

□

Localmente, en coordenadas canónicas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$,

$$\{H, K\} = \mathrm{d}K(X^H) = \left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i \frac{\partial K}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i\right)\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\partial_{q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\partial_{p_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i}.$$

Con el corchete de Poisson, las ecuaciones de Hamilton tienen un aspecto muy sencillo

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \left\{H, q^i\right\} \\ \dot{p}_i = \{H, p_i\}. \end{cases}$$

También se cumplen las ***relaciones de conmutación canónicas***

$$\left\{p_j, q^i\right\} = \delta_{ij}.$$

Ejercicio 4.3. Probar que unas coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ son canónicas si y sólo si cumplen las relaciones de conmutación canónicas. □

Ejercicio 4.4. Probar que f es un simplectomorfismo si y sólo si deja invariante el corchete de Poisson, esto es, si para cada $H, K : M \to M$,

$$\{H, K\} \circ f = \{H \circ f, K \circ f\}.$$

□

Ejercicio 4.5. Probar que el corchete de Poisson dota a $\mathcal{C}^\infty$ de la estructura de ***álgebra de Lie***, esto es, que

1. es bilineal
2. es antisimétrico
3. y cumple la ***identidad de Jacobi***

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0.$$

Probar también que cumple la ***regla de Leibniz***

$$\{A, BC\} = \{A, B\} C + B \{A, C\}.$$

Pista: basta probar que, si $F : M \to \mathbb{R}$, entonces $X^F : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ cumple la regla de Leibniz. □

5. Simetrías y leyes de conservación

Definición 5.1. Sea M una variedad simpléctica y $H : M \to \mathbb{R}$ un hamiltoniano. Una función $F : M \to \mathbb{R}$ es una ***integral primera*** o ***cantidad conservada*** de H si

$$F(\varphi_t^H(x)) = F(x)$$

para todo $t \geq 0$ y para todo $x \in M$.

Ejercicio 5.2. Usar la ecuación de Liouville para probar que $F : M \to \mathbb{R}$ es una integral primera de H si y sólo si $\{H, F\} \equiv 0$. □

Ejercicio 5.3. Usar la identidad de Jacobi para probar que si F_1 y F_2 son integrales primeras de H, entonces $\{F_1, F_2\}$ también es una integral primera de H. □

Proposición 5.4 (Teorema de Noether)**.** *Si un hamiltoniano H es constante a lo largo de un flujo hamiltoniano φ^F, entonces F es una integral primera de H.*

Demostración. Si H es constante a lo largo de φ^F entonces H es una integral primera de F, luego $\{F, H\} = 0$, pero, como el corchete de Poisson es antisimétrico, también $\{H, F\} = 0$, luego F es una integral primera de H. □

Definición 5.5. Sean M es una variedad simpléctica, $H : M \to \mathbb{R}$ un hamiltoniano y G un grupo. Supongamos que Diff(M) denota el grupo de difeomorfismos de M. Una ***G-simetría*** de H es una acción

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \mathrm{Diff(M)} \\ g &\longmapsto \varphi_g \end{aligned}$$

tal que $H \circ \varphi_g = H$ para todo $g \in G$.

Supongamos que g_t denota un grupo diferenciable uniparamétrico que actúa mediante una g_t-simetría sobre una variedad simpléctica M con un hamiltoniano H, causando por tanto un flujo $\varphi_t = \varphi_{g_t}$ tal que $H \circ \varphi_t = H$. Supongamos que φ_t está generado por un hamiltoniano F, $\varphi_t = \varphi_t^F$. Entonces, por el teorema de Noether, F es una cantidad conservada de H.

Ejemplo 5.6 (Conservación del momento lineal)**.**
Sea $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^n$ y consideremos la ***acción de traslaciones sobre*** $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (t, (\mathbf{q}, \mathbf{p})) &\longmapsto (\mathbf{q} + t\mathbf{u}, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Supongamos un hamiltoniano H invariante bajo esta acción. Entonces ha de haber una integral primera F de H asociada a esta simetría; vamos a hallarla.

En primer lugar, busquemos el generador infinitesimal del flujo $\varphi_t(\mathbf{q}, \mathbf{p})$

$$X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{u}, 0) = u^i \partial_{q_i}.$$

Ahora, busquemos F la función que genera este campo hamiltoniano

$$\mathrm{d}F = -i_X(\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i) = (\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i)(\bullet, u_i\partial_{q_i}) = u_i \mathrm{d}p_i = \mathrm{d}(u_i p_i) = \mathrm{d}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}).$$

De modo que la integral primera asociada a la invariancia bajo traslaciones sobre $\mathbf{u}$ es precisamente $\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$, el momento lineal en la dirección de $\mathbf{u}$. □

Ejemplo 5.7 (Conservación del momento angular)**.**
Consideremos el grupo de la circunferencia, que podemos realizar como el conjunto $\mathrm{SO}(2)$ de las rotaciones del plano y se puede representar matricialmente por

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Tomemos ahora el espacio de fases $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ de una partícula moviéndose en el plano y la ***acción de rotaciones del plano***

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\phi, (x, y, p_x, p_y)) &\longmapsto (A_\phi(x, y), A_\phi(p_x, p_y)). \end{aligned}$$

Compruébese que el generador infinitesimal de φ_ϕ vendrá dado por

$$X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\phi=0} \varphi_\phi(x, y, p_x, p_y) = -y\partial_x + x\partial_y - p_y\partial_{p_x} + p_x\partial_{p_y}.$$

Ahora, la función F asociada a este campo hamiltoniano cumplirá

$$\mathrm{d}F = -i_X(\mathrm{d}p_x \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}p_y \wedge \mathrm{d}y) = -y\mathrm{d}p_x + x\mathrm{d}p_y + p_y\mathrm{d}x - p_x\mathrm{d}y.$$

Sea la función ***momento angular*** $L(x, y, p_x, p_y) = xp_y - yp_x$, entonces $\mathrm{d}L = \mathrm{d}F$. Por tanto, la cantidad conservada asociada a la invariancia bajo rotaciones del plano es el momento angular L. □

Podemos hacer una formulación más general de la relación entre simetrías e integrales primeras. Para ello, consideremos un grupo de Lie G, con $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $\mathfrak{g}^*$ el dual de su álgebra de Lie. Supongamos que G actúa sobre una variedad simpléctica M

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \mathrm{Diff}(M) \\ g &\longmapsto \varphi_g. \end{aligned}$$

Si $\xi \in \mathfrak{g}$ denota un elemento del álgebra de Lie, podemos considerar el grupo uniparamétrico que genera en G, $\exp(\xi t)$ y el flujo inducido por la acción $\varphi_t = \varphi_{\exp(\xi t)}$, cuyo generador infinitesimal denotamos por ξ_M. Supongamos que existe una función $J : M \to \mathfrak{g}^*$ de manera que a cada $\xi \in \mathfrak{g}$ le podemos asociar una función

$$\begin{aligned} \hat{J}(\xi) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto J(x) \cdot \xi \end{aligned}$$

tal que $\mathrm{d}\hat{J}(\xi) = -i_{\xi_M}\omega$. Decimos entonces que J es la ***aplicación momento*** de la acción φ. Es sencillo entonces probar la siguiente generalización del teorema de Noether:

Proposición 5.8 (Teorema de Noether)**.** *Si $\varphi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ es una acción de un grupo de Lie G sobre una variedad simpléctica M tal que es una G-simetría de un hamiltoniano H, entonces la aplicación momento J asociada a φ es una integral primera de H.*

Ejemplo 5.9 (Conservación del momento angular)**.** Consideremos el grupo de rotaciones SO(3) actuando de forma simpléctica sobre el espacio de fases $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ en la forma

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (R, (\mathbf{q}, \mathbf{p})) &\longmapsto (R\mathbf{q}, R\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Los elementos de su álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ son los generadores infinitesimales de las rotaciones, que pueden asociarse con operadores de la forma $J_\mathbf{u} = \mathbf{u} \times \bullet$, con $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ un vector cuya dirección es la del eje de la rotación y su norma la velocidad angular del giro. Así, a cada $J_\mathbf{u} \in \mathfrak{so}(3)$ podemos asociarle el campo en $\mathbb{R}^6$ de la forma $\mathbf{u}_{\mathbb{R}^6} = (\mathbf{u} \times \mathbf{q}, \mathbf{u} \times \mathbf{p})$, que en coordenadas se escribe

$$\mathbf{u}_{\mathbb{R}^6} = \epsilon_{ijk} u_k (q_i \partial_{q_j} + p_i \partial_{p_j}).$$

Ahora, consideramos el momento angular $\mathbf{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$, que en coordenadas se expresa $L_k(q_i, p_j) = \epsilon_{ijk} q_i p_j$, de modo que $\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = \epsilon_{ijk} u_k q_i p_j$ y

$$\mathrm{d}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}) = \epsilon_{ijk} u_k (q_i \mathrm{d}p_j + p_j \mathrm{d}q_i) = \epsilon_{ijk} u_k (q_i \mathrm{d}p_j - p_i \mathrm{d}q_j) = -i_{\mathbf{u}_{\mathbb{R}^6}}\omega.$$

Por tanto, si consideramos la aplicación $L : \mathbb{R}^6 \to \mathfrak{so}(3)^*$ que a cada $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ le asigna

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathfrak{so}(3) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ J_\mathbf{u} &\longmapsto \mathbf{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}, \end{aligned}$$

tenemos que L es una aplicación momento de la acción de SO(3). Por el teorema de Noether, si consideramos un hamiltoniano H en $\mathbb{R}^6$ que sea invariante bajo rotaciones, tenemos que la aplicación momento L es una integral primera del sistema hamiltoniano dado por H. Como consecuencia, el momento angular $\mathbf{L}$ es una cantidad conservada del sistema. □

Referencias

[1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
[2] Michael Spivak. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Publish or Perish, 2010.