LECCIÓN I: MECÁNICA EN VARIEDADES

GUILLERMO GALLEGO SÁNCHEZ

1. Formalismo newtoniano

En el **formalismo newtoniano**, la posición de un sistema de N partículas viene descrita por un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$ de la forma $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)$, con cada $\mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3)$ describiendo la posición de la i-ésima partícula. La trayectoria del sistema vendrá dada por una aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{3N} \\ t &\longmapsto \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

De acuerdo con la ***ley de Newton***, existe una función

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &\longmapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \end{aligned}$$

llamada ***fuerza***, de modo que la trayectoria de cada partícula del sistema está sujeta a la ecuación

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t), \dot{\mathbf{x}}_i(t), t),$$

con m_i la masa de la i-ésima partícula.

En este curso sólo vamos a considerar sistemas ***conservativos***, esto es, que $\mathbf{F}$ sea independiente de las velocidades y del tiempo, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ y que sea un ***campo gradiente***, es decir, que exista una función $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x^1}, \frac{\partial V}{\partial x^2}, \frac{\partial V}{\partial x^3} \right).$$

Esta V se llama ***energía potencial*** del sistema. Definimos la ***energía cinética*** de una partícula de masa m como la función

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3) &\longmapsto \tfrac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} (v^i)^2. \end{aligned}$$

Nótese que

$$\frac{\partial T}{\partial v^i}(\mathbf{v}) = m v^i,$$

de modo que, para la partícula i-ésima del sistema

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v^j}(\dot{\mathbf{x}}_i) \right) = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i^j) = m_i \ddot{x}_i^j.$$

Así, en un sistema conservativo, la ley de Newton toma la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v^j}(\dot{\mathbf{x}}_i) \right) = -\frac{\partial V}{\partial x^j}(\mathbf{x}_i).$$

Podemos considerar ahora un sistema sujeto a ***ligaduras***, que también consideraremos independientes de las velocidades y del tiempo (***holónomas*** y ***esclerónomas***). Estas ligaduras se pueden escribir como una función

$$f = (f_1, \ldots, f_r) : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$$

con componentes independientes, es decir, tales que los vectores $\nabla f_1, \dots, \nabla f_r$ son linealmente independientes. Estas funciones definen un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^{3N}$ de ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_r(\mathbf{x}) = 0. \end{cases}$$

Por el teorema de la función implícita, como las f_i son independientes, M es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^{3N}$ de dimensión $n = 3N - r$. Esta M se llama ***espacio de configuración*** y n el número de ***grados de libertad***.

Ejemplo 1.1. Consideremos el caso de un ***péndulo esférico***: una partícula de masa m unida por una barra rígida de longitud R a un punto del espacio y sujeta a la fuerza de la gravedad

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, -mg).$$

En este caso la ligadura viene dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

de modo que podemos definir la función $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-R^2$ y el espacio de configuración será

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\right\}.$$

Además, $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ es distinto de 0 en todo M, de modo que M es una variedad diferenciable; de hecho, es una esfera de radio R. □

2. El espacio tangente

Diremos que una aplicación $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es ***diferenciable*** si todas sus derivadas parciales existen y son continuas[1]. Más generalmente, una aplicación $\varphi : X \to Y$ entre dos subconjuntos arbitrarios $X \subset \mathbb{R}^p$ e $Y \subset \mathbb{R}^q$ se dice diferenciable si se extiende diferenciablemente, es decir, si existe una aplicación diferenciable $\Phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^p \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{R}^q \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi"] & Y. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Diremos que una aplicación diferenciable φ es un ***difeormofismo*** si es biyectiva y su inversa es diferenciable. Una ***subvariedad regular*** de dimensión n de un espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$, para cierto $m > n$, es un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^m$ ***localmente difeomorfo*** a $\mathbb{R}^n$, esto es, que para cada $x \in M$ existan una bola $B \subset \mathbb{R}^m$ centrada en x, y un difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to B \cap M$, que llamamos ***parametrización*** de M en x.

Si M es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^m$ de dimensión n con una parametrización φ en un punto $x \in M$ que se extiende diferenciablemente a $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, podemos considerar la diferencial de Φ en $a = \varphi^{-1}(x)$, $d_a\Phi$, y definimos el ***espacio tangente a M en x*** como $T_xM = \operatorname{im}(d_a\Phi)$. Podemos considerar entonces la base ***holónoma*** de T_xM, definida por las imágenes de los vectores de la base canónica: si $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ son unas coordenadas en $\mathbb{R}^n$ y $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ denota la base canónica de $\mathbb{R}^n$, los vectores de la base holónoma son

$$d_a\Phi(\mathbf{e}_i) = \frac{\partial \Phi}{\partial q^i}(a) = \partial_i\Phi(a) = \partial_i\varphi(a).$$

Las definición de la base holónoma no depende de φ, ya que si ψ es otra parametrización, entonces el cambio $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ es un difeomorfismo, luego d_ah es un isomorfismo lineal. Por la regla de la cadena, $d_{\psi^{-1}(x)}\psi \circ d_ah = d_a\varphi$ y, como d_ah es un isomorfismo lineal, $d_{\psi^{-1}(x)}\psi$ y

[1] Realmente esto quiere decir que es de clase $\mathcal{C}^\infty$

$d_a\varphi$ tienen la misma imagen. Además, si cambiamos la base canónica de $\mathbb{R}^n$ de acuerdo con el isomorfismo $d_a h$, la base holónoma tampoco depende de la parametrización, de forma que en general podemos escribir los vectores de esta base como $\{\partial_1|_x, \dots, \partial_n|_x\}$.

Ejercicio 2.1. Supongamos que nuestra variedad M está definida, igual que antes, por unas funciones $f = (f_1, \dots, f_r) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$, de acuerdo con el teorema de la función implícita, es decir, $M = \{x \in \mathbb{R}^m | f(x) = 0\}$. Probar entonces que el espacio tangente a M en un punto x es precisamente $T_x M = \ker(d_x f)$. □

Consideremos ahora una curva en M, esto es, una aplicación diferenciable, que en coordenadas $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ podemos escribir como

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma(t) = \varphi(q^1(t), \dots, q^n(t)). \end{aligned}$$

Podemos ver entonces la velocidad $\dot{\gamma}$, aplicando la regla de la cadena, como

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{dt}\varphi(q^1(t), \dots, q^n(t)) = \partial_1\varphi(\mathbf{q})\dot{q}^1(t) + \cdots + \partial_n\varphi(\mathbf{q})\dot{q}^n(t).$$

Podemos considerar el ***fibrado tangente*** que es esencialmente la «colección de los espacios tangentes», concretamente, el conjunto

$$TM = \{(x, v_x) | x \in M, v_x \in T_x M\}.$$

De modo que la velocidad puede verse como una aplicación

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} : \mathbb{R} &\longrightarrow TM \\ t &\longmapsto (\dot{q}^1(t)\partial_1 + \cdots + \dot{q}^n(t)\partial_n)|_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M. \end{aligned}$$

Un ***campo tangente*** a una variedad M será entonces una aplicación $X : M \to TM$ de la forma $x \mapsto (x, X_x)$, con $X_x \in T_x M$. Localmente, un campo puede expresarse en la forma

$$X = X^1\partial_1 + \cdots + X^n\partial_n,$$

con las $X^i : M \to \mathbb{R}$ unas funciones. Un campo tiene asociadas unas ***curvas integrales***, que son curvas $\gamma : \mathbb{R} \to M$ tales que

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}.$$

Nótese que esta igualdad es, de hecho, una ecuación diferencial de primer orden para la curva γ; en coordenadas $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{q}^1(t) = X^1(\mathbf{q}(t)), \\ \vdots \\ \dot{q}^n(t) = X^n(\mathbf{q}(t)). \end{cases}$$

Juntando las curvas integrales obtenemos el ***flujo*** de X, que es la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, x) &\longmapsto \varphi_t(x), \end{aligned}$$

que cumple

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(x) = X_x.$$

Es decir, $\varphi_t(x_0) = \gamma(t)$, con γ la curva integral de X de condición inicial $\gamma(0) = x_0$.

3. Formalismo lagrangiano

En el **formalismo lagrangiano**, la posición de un sistema con n grados de libertad viene descrita por un punto $x \in M$, con M una variedad diferenciable de dimensión n llamada ***espacio de configuración***. La trayectoria del sistema vendrá dada, en unas coordenadas $\mathbf{q} = (q^1, \dots q^n)$ por una aplicación

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma(t). \end{aligned}$$

Se trata ahora de encontrar, entre todas las trayectorias posibles del sistema entre dos posiciones x_1 a tiempo t_1 y x_2 a tiempo t_2, cuál será la trayectoria *real* que siga el sistema. De acuerdo con el ***principio de Hamilton***, existe una función

$$\begin{aligned} L : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) &\longmapsto L(x, v), \end{aligned}$$

llamada ***lagrangiano*** del sistema de modo que la trayectoria *real* del sistema está sometida al ***principio de mínima acción***: si el sistema está en la posición x_1 a tiempo t_1 y en la posición x_2 a tiempo t_2, la trayectoria real del sistema entre x_1 y x_2 vendrá dada por la curva γ para la cual el valor del funcional de ***acción***

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$$

sea extremal (máximo o mínimo). Puede probarse que este principio es formalmente equivalente a que la trayectoria γ sea solución de las ***ecuaciones de Euler-Lagrange*** que, en coordenadas $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$, de modo que $\gamma(t) = \mathbf{q}(t)$, se escriben

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\mathbf{q}(t))\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}(\mathbf{q}(t)) = 0.$$

Recordemos ahora el caso del sistema conservativo. Habíamos reducido la ley de Newton a la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v^j}(\dot{\mathbf{x}}_i)\right) = -\frac{\partial V}{\partial x^j}(\mathbf{x}_i).$$

Si lo restringimos todo a la variedad M, podemos ver esta ecuación en la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}(\dot{\mathbf{q}})\right) = -\frac{\partial V}{\partial q^i}(\mathbf{q}),$$

de modo que, si definimos el lagrangiano

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}),$$

obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}(t))\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}(\mathbf{q}(t)).$$

Nótese que al restringir el producto escalar que aparecía en la energía cinética a la variedad M, en general lo que obtendremos es una ***métrica riemanniana*** g en M, es decir, una colección de productos escalares

$$g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R},$$

que varía diferenciablemente con x. En general, un sistema con un lagrangiano de la forma $L = T - V$, donde $T(x, v) = \frac{1}{2}mg_x(v, v)$ y $V(x)$ es una función que depende sólo de la posición se llama un ***sistema natural***.

Ejemplo 3.1. Volvamos al caso del péndulo esférico. Habíamos visto que el espacio de configuración M era una esfera de radio R. El espacio tangente $T_{\mathbf{x}}M$ en un punto $\mathbf{x} \in M$ será precisamente el espacio de los vectores tangentes a la esfera en ese punto, es decir, el conjunto

$$T_{\mathbf{x}}M = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0 \right\},$$

ya que $\nabla f = 2\mathbf{x}$.

Podemos parametrizar la esfera con unas ***coordenadas esféricas***

$$(\phi, \theta) \mapsto \begin{cases} x = R \sin\theta \cos\phi, \\ y = R \sin\theta \sin\phi, \\ z = R\cos\theta, \end{cases}$$

y un vector $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M$ podrá escribirse $\mathbf{v} = v_\theta \partial_\theta|_{\mathbf{x}} + v_\phi \partial_\phi\big|_{\mathbf{x}}$. En estas coordenadas podemos hallar los valores de la energía potencial y de la energía cinética

$$T(\dot\phi, \dot\theta) = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) = \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta),$$
$$V(\phi, \theta) = mgz = mgR\cos\theta.$$

De modo que el lagrangiano queda

$$L(\phi, \theta, \dot\phi, \dot\theta) = \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) - mgR\cos\theta.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange tendrán la forma

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \end{cases}$$

□

Ejercicio 3.2. Hallar explícitamente las ecuaciones de Euler-Lagrange del péndulo esférico y resolverlas en términos de integrales. □

4. Formalismo hamiltoniano I

El formalismo lagrangiano nos ha permitido formular la mecánica en variedades diferenciables, pero las ecuaciones de Euler-Lagrange siguen siendo ecuaciones de segundo orden, es decir, no se pueden pensar como campos *intrínsecos* al espacio de configuración. Para solucionar esto podemos recordar una técnica habitual en ecuaciones diferenciales para pasar de ecuaciones de segundo orden a ecuaciones de primer orden. Si tenemos una ecuación diferencial de orden 2

$$f''(x) = F(x, f, f'),$$

podemos definir $g(x) = f'(x)$, de modo que convertimos la ecuación diferencial original en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de orden 1

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \\ g'(x) = F(x, f, g). \end{cases}$$

En nuestro caso haremos algo parecido, pasando de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que son ecuaciones diferenciales de segundo orden definidas en el espacio de configuración M, a las ecuaciones de Hamilton, que son ecuaciones diferenciales de primer orden definidas en su fibrado tangente TM. Para ello, consideremos un sistema natural cuyo lagrangiano en coordenadas $\mathbf{q}$ se expresa

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m g_{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}).$$

Definimos los ***momentos canónicos conjugados*** de las coordenadas $\mathbf{q}$ como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{1}{2}mg_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}^i\dot{q}^j - V(q)\right) = g_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}^j,$$

con $g_{ij}(\mathbf{q}) = g_{\mathbf{q}}\left(\partial_{q^i}, \partial_{q^j}\right)$. Nótese que a partir de ahora empezamos a usar el convenio de índices repetidos, por el cual un índice repetido en una fórmula indica suma sobre éste. Como la métrica riemanniana es no degenerada, podemos considerar unas nuevas coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ en TM con $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Notemos también que, para las trayectorias que cumplan las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

Por tanto, derivando el lagrangiano respecto del tiempo y aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{d\dot{q}^i}{dt} = \dot{p}_i\dot{q}^i + p_i\ddot{q}^i = \dot{p}_i\dot{q}^i + \frac{d}{dt}(p_i\dot{q}^i) - \dot{p}_i\dot{q}^i = \frac{d}{dt}(p_i\dot{q}^i).$$

De modo que si, definimos el ***hamiltoniano*** como la función

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = p_i\dot{q}^i - L|_{\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p})},$$

tenemos que las trayectorias que cumplan las ecuaciones de Euler-Lagrange cumplirán que

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

Ahora, si $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ es una de estas trayectorias, entonces, aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i = 0.$$

Por tanto, $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ cumplen las ***ecuaciones de Hamilton***

$$\begin{cases} \dot{q}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \\ \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)). \end{cases}$$

Estas son ecuaciones de primer orden en TM, de modo que podemos asociarlas a un campo X^H de TM que se expresa

$$X^H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\partial_{q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\partial_{p_i}.$$

Ejercicio 4.1. En el caso del péndulo esférico, probar que los momentos canónicos conjugados son

$$p_\theta = mR^2\dot{\theta},$$
$$p_\phi = mR^2\sin^2\theta\dot{\phi},$$

y que el hamiltoniano es

$$H(\phi, \theta, p_\phi, p_\theta) = \frac{1}{2mR^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right) + mgR\cos\theta.$$

Hallar explícitamente las ecuaciones de Hamilton y resolverlas en función de integrales. □

Observación. Si consideramos sistemas que no sean naturales, no está garantizada la existencia de la métrica riemanniana g que nos permite hacer el cambio a las coordenadas $\mathbf{p}$. En general las coordenadas $\mathbf{p}$ están definidas en el ***fibrado cotangente***

$$T^*M = \{(x, \alpha_x) | x \in M, \alpha_x \in T_xM^*\},$$

donde T_xM^* denota el *espacio dual* de T_xM. Si $\mathbf{q}$ son unas coordenadas y $\alpha \in T^*M$ es una 1-forma (es decir, una aplicación $\alpha : M \to T^*M$ del tipo $x \mapsto (x, \alpha_x)$, con $\alpha_x \in T_xM^*$), se definen los momentos canónicos conjugados $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ como las funciones $p_i : T^*M \to \mathbb{R}$ tales que

$$p_i(\alpha) = \alpha(\partial_{q^i}).$$

La construcción del hamiltoniano a partir del lagrangiano se hace por un procedimiento más complicado, haciendo uso de la ***transformada de Legendre***.

El caso natural es especialmente simple porque la métrica riemanniana g es una forma bilineal no degenerada en cada espacio tangente, que por tanto da un isomorfismo entre los fibrados tangente y cotangente, mediante una asignación del tipo

$$\begin{aligned} TM &\longrightarrow T^*M \\ (x, v_x) &\longmapsto g_x(v_x, \bullet). \end{aligned}$$

5. Formas diferenciales

Recordemos que una ***forma lineal*** o 1-***forma*** en $\mathbb{R}^n$ es una función lineal $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Análogamente, una ***forma bilineal*** o 2-***forma*** en $\mathbb{R}^n$ es una función $\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ lineal en los dos argumentos. En el caso en que ω sea antisimétrica decimos que es una 2-forma ***exterior***. En general, una k-***forma exterior*** es una función $\omega : \mathbb{R}^n \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal en todos sus argumentos y antisimétrica, es decir, si $(i_1, \ldots, i_k)$ es una permutación de $(1, \ldots, k)$ con paridad ϵ, entonces

$$\omega(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) = (-1)^\epsilon \omega(v_1, \ldots, v_n).$$

Si α es una k-forma exterior y ω es una l-forma exterior, se define el ***producto exterior*** de α y ω como la $k + l$ forma $\alpha \wedge \omega$ tal que

$$(\alpha \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum (-1)^\epsilon \alpha(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})\omega(v_{j_1}, \ldots, v_{j_l}),$$

donde la suma se realiza sobre todas las permutaciones $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l)$ de $(1, \ldots, k + l)$ y ϵ es la paridad de cada permutación.

Una k-***forma diferencial*** ω_x en un punto x de una variedad diferenciable M de dimensión n es una k-forma exterior en el espacio tangente T_xM. Más generalmente, una k-***forma diferencial*** ω en M es una aplicación $x \mapsto (x, \omega_x)$, con ω_x una k-forma diferencial en x. Recordemos que en el espacio tangente definíamos la base holónoma $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ asociada a unas coordenadas $(q^1, \ldots, q^n)$. Podemos considerar entonces su ***base dual***, que denotaremos $\mathrm{d}q^1, \ldots, \mathrm{d}q^n$, es decir,

$$\mathrm{d}q^i(\partial_j) = \delta_{ij}.$$

Por tanto, toda 1-forma diferencial en M puede escribirse[2]

$$\alpha = \alpha_i \mathrm{d}q^i,$$

con $\alpha_i : M \to \mathbb{R}$ unas funciones. En general, una k-forma diferencial en M se escribe

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_k},$$

con $\omega_{i_1, \ldots, i_k} : M \to \mathbb{R}$ funciones.

Finalmente, definimos la ***diferencial exterior*** como la función

$$\mathrm{d} : \{k\text{-formas}\} \to \{(k+1)\text{-formas}\}$$

que a cada función $f : M \to \mathbb{R}$ le asigna la forma $\mathrm{d}f$ tal que $(\mathrm{d}f)_x = d_x f$, esto es

$$\mathrm{d}f = \partial_i f \mathrm{d}q^i,$$

[2]Nótese que aquí seguimos usando el convenio de índices repetidos.

y a cada k-forma $\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_k}$ le asigna la forma

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \mathrm{d}\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_k} = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_j \partial_j \omega_{i_1,\ldots,i_k} \mathrm{d}q^j \wedge \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_k}.$$

Ejercicio 5.1. Probar que

$$\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$$

y que

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge \mathrm{d}\beta,$$

siendo r el grado de α. □

Una exposición detallada de la teoría de formas diferenciales puede leerse en el capítulo 7 de [1].

6. Formalismo hamiltoniano II

Cabe preguntarse ahora si existe alguna estructura geométrica, intrínseca a la variedad TM, que nos permita asociarle a cada función $H : TM \to \mathbb{R}$ un campo X^H en TM. La clave está en considerar las siguientes formas diferenciales

$$\alpha = p_i \mathrm{d}q^i,$$
$$\omega = \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i.$$

Podemos calcular

$$\omega(\partial_{q^i}, \bullet) = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i \left(\partial_{q^i}, \bullet\right) = -\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i(\bullet, \partial_{q^i}) = -\mathrm{d}p_i,$$
$$\omega(\partial_{p_i}, \bullet) = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i \left(\partial_{p_i}, \bullet\right) = \mathrm{d}q^i.$$

Por tanto,

$$\omega(X^H, \bullet) = \omega\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\partial_{q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\partial_{p_i}, \bullet\right) = \frac{\partial H}{\partial p_i}\omega(\partial_{q^i}, \bullet) - \frac{\partial H}{\partial q^i}\omega(\partial_{p_i}, \bullet) = \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i = -\mathrm{d}H.$$

El elemento clave en esta construcción es entonces la forma ω, que tiene las siguientes propiedades:

1. Es no degenerada, es decir, para cada $x \in M$ y para cada $v \in T_xM$ hay un $w \in T_xM$ tal que $\omega_x(v, w) \neq 0$.
2. Es cerrada, es decir, $\mathrm{d}\omega = 0$.

Definición 6.1. Una ***variedad simpléctica*** es un par (M, ω), donde M es una variedad diferenciable y ω es una 2-forma diferencial en M no degenerada y cerrada.

En el **formalismo hamiltoniano**, el estado de un sistema con n grados de libertad viene descrito por un punto $x \in M$, con M una variedad simpléctica de dimensión $2n$ llamada ***espacio de fases***. El comportamiento del sistema estará gobernado por una función $H : M \to \mathbb{R}$ llamada ***hamiltoniano*** del sistema. Los estados del sistema evolucionarán según las curvas integrales del campo X^H tal que $\omega(X^H, \bullet) = -\mathrm{d}H$. Es decir, la evolución temporal viene dada por un flujo $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ sujeto a las ***ecuaciones de Hamilton***

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(x) = X^H_x.$$

Referencias

[1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
[2] H. Goldstein, C.P. Poole, and J.L. Safko. *Classical Mechanics*. Pearson Education India, 2011.
[3] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Curso de física teórica (vol. 1): Mecánica*. Reverté, 1985.
[4] Michael Spivak. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Publish or Perish, 2010.