EL TEOREMA DE SOPORTE DE NGÔ

GUILLERMO GALLEGO

En estas notas vamos a esbozar las ideas generales del teorema de soporte de Ngô (Ngô Bao Chau, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, §7). Por simplicidad, trabajamos sobre los números complejos, y por tanto estudiamos la cohomología con coeficientes en $\mathbb{Q}$. En el contexto original del artículo de Ngô, se trabaja sobre un cuerpo finito, y es precisamente la determinación de los soportes de la fibración de Hitchin, a partir del teorema de Ngô, lo que le permitió realizar el conteo de puntos en las fibras y obtener la demostración del Lema Fundamental de Langlands–Shelstad. Esto le valió la medalla Fields. Cuando se trabaja sobre un cuerpo arbitrario de característica p, se estudia la cohomología ℓ-ádica, es decir con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{Q}_\ell$, donde ℓ es un número primo distinto de p.

1. Descomposición y soportes

Sean X y S variedades algebraicas lisas sobre $\mathbb{C}$ y sea $f : X \to S$ una aplicación propia y plana con fibras reducidas y de dimensión relativa d. Consideremos el haz constante $\mathbb{Q}_X$ sobre X, y su imagen directa (derivada) $f_*\mathbb{Q}_X$. El teorema de descomposición proporciona un isomorfismo

$$f_*\mathbb{Q}_X \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} {}^pH^i(f_*\mathbb{Q}_X)[-i],$$

en la categoría derivada constructible acotada de S, que denotamos por $\mathcal{D}_S$. Además, el teorema nos dice que las cohomologías perversas ${}^pH^i(f_*\mathbb{Q}_X)$ son haces perversos semisimples.

En el caso particular en que el morfismo f es liso (es decir, si todas las fibras son lisas), las cohomologías perversas están dadas simplemente por las cohomologías ordinarias $H^i(f_*\mathbb{Q}_X)$, vistas como sistemas locales sobre S.

En general, sin embargo, si f no es liso, las cohomologías perversas tienen una estructura más complicada. Concretamente, que las cohomologías perversas sean semisimples quiere decir que, para cada $i \in \mathbb{Z}$, existe una estratificación $S = \bigsqcup_\beta S_\beta$ de S, por una cantidad finita de subvariedades $S_\beta \subset S$ disjuntas, localmente cerradas, y no singulares, de modo que podemos descomponer las cohomologías perversas como sumas de complejos de intersección

$${}^pH^i(f_*\mathbb{Q}_X) \cong \bigoplus_\beta IC_{\bar{S}_\beta}(L_\beta),$$

donde $\bar{S}_\beta$ es la adherencia de S_β y L_β es un cierto sistema local sobre S_β.

Juntando todo, obtenemos que existe una colección finita de tuplas (S_a, L_a, d_a), con $S_a \subset S$ una subvariedad localmente cerrada no singular, L_a un sistema local en S_a, y d_a un número entero, tal que hay un isomorfismo (en $\mathcal{D}_S$)

$$f_*\mathbb{Q}_X \cong \bigoplus_a IC_{\bar{S}_a}(L_a)[\dim X - \dim S_a - d_a].$$

Estas variedades S_a se denominan los *soportes* de la descomposición de $f_*\mathbb{Q}_X$.

Como estamos asumiendo que la dimensión de las fibras es una constante d, un resultado de Goresky y MacPherson nos da una restricción sobre la codimensión de los soportes.

Date: 20 de febrero de 2025.

Teorema 1 (Goresky-MacPherson). *Si Z es un soporte de la descomposición de $f_*\mathbb{Q}_X$, entonces*

$$\operatorname{codim}(Z) \leq d.$$

La idea de la prueba se sigue del siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Supongamos que S es una curva lisa, X es una superficie lisa, y que las fibras X_s son curvas irreducibles. Tenemos una descomposición

$$f_*\mathbb{Q}_X[2] = \bigoplus K[n],$$

para unos ciertos haces perversos simples K sobre S y unos números enteros n. De la dualidad de Poincaré–Verdier, se sigue que si $K[n]$ aparece en la descomposición, entonces también habrá de aparecer $K^\vee[-n]$. Ahora, supongamos que Z es el soporte de un cierto K y que $\dim Z = 0$. Entonces $K[n]$ contribuye en grado cohomológico ordinario $-n$, mientras que $K^\vee[-n]$ contribuye en grado n. Pero $f_*\mathbb{Q}_X[2]$ tan sólo tiene grados cohomológicos ordinarios $0, -1, -2$. Entonces $n = 0$. Pero $H^0(f_*\mathbb{Q}_X[2]) = H^2(f_*\mathbb{Q}_X)$ es un haz constante de rango 1, de modo que no puede tener un haz soportado en un punto como factor directo.

En general, poco más se puede decir acerca de los soportes de de la descomposición de $f_*\mathbb{Q}_X$. Ngô encontró una clase fibraciones propias $f : X \to S$ para las cuales es posible dar una descripción más precisa de los soportes.

2. Fibraciones abelianas débiles

Definición 1. Sea $f : X \to S$ como en la sección previa. Decimos que f es una *fibración abeliana débil* si admite una acción de un esquema en grupos conmutativo, liso y con fibras conexas $g : P \to S$ de dimensión d, de forma que

1. la acción tiene *estabilizadores afines*, y
2. el esquema en grupos P es *polarizable*.

Si, además, el esquema en grupos $g : P \to S$ es *δ-regular*, entonces la fibración abeliana débil se dice *δ-regular*.

Pasamos a explicar ahora punto por punto esta definición. Recordemos que un esquema en grupos $g : P \to S$ es simplemente una familia de grupos algebraicos P_s sobre S. La acción sobre $f : X \to S$ quiere decir que tenemos una acción punto a punto $P_s \times X_s \to X_s$ que varía de forma algebraica sobre S. La hipótesis de fibras conexas podría relajarse, ya que siempre podemos tomar la componente conexa neutra de un grupo algebraico.

Un teorema de Chevalley implica que todo grupo algebraico P_s sobre $\mathbb{C}$ puede ponerse en una sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow R_s \longrightarrow P_s \longrightarrow A_s \longrightarrow 1,$$

donde R_s es un grupo algebraico afín y A_s es una variedad abeliana. Como P_s es conmutativo, R_s también lo es. Que P actúa con estabilizadores afines significa que para cada $x \in X$ el estabilizador $\operatorname{Stab}_{P_{f(x)}}(x)$ está contenido en la parte afín $R_{f(x)}$.

Todos los grupos algebraicos afines y conmutativos sobre $\mathbb{C}$ pueden escribirse como producto de grupos aditivos $\mathbb{G}_\mathrm{a} = (\mathbb{C}, +)$ y grupos multiplicativos $\mathbb{G}_\mathrm{m} = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, esto es $R_s = \mathbb{G}_\mathrm{a}^{\alpha_s} \times \mathbb{G}_\mathrm{m}^{\mu_s}$. Denotamos

$$\delta_s = \dim R_s = \alpha_s + \mu_s.$$

La función $\delta : S \to \mathbb{N}, s \mapsto \delta_s$ es superiormente semicontinua, de modo que determina una partición $S = \bigsqcup_{\delta \in \mathbb{N}} S_\delta$ en subvariedades localmente cerradas $S_\delta \subset S$ en las que δ es constante. Podemos definir también

$$S_{\leq \delta} = \{s \in S : \delta_s \leq \delta\},$$

y estratificar $S = \bigcup_{\delta\in\mathbb{N}} S_\delta$. Decimos que $g : P \to S$ es δ-regular si

$$\operatorname{codim}(S_\delta) \geq \delta.$$

Equivalentemente, podemos describir δ de la siguiente forma

$$\delta_s = \text{máx}\left\{\dim(\mathrm{Stab}_{P_s}(x)) : x \in X_s\right\}.$$

En efecto, que δ es mayor o igual que dicho máximo se sigue de nuestra hipótesis de estabilizadores afines. Por otra parte, como R_s es un esquema afín actuando en una variedad proyectiva X_s, debe tener un punto fijo $x_0 \in X_s$, con lo cual $\dim(\mathrm{Stab}_{P_s}(x_0)) = \dim R_s = \delta_s$.

El *módulo de Tate* de P se define como el haz $T(P) := R^{2d-1}g_!\mathbb{Q}$. Su espiga en un punto $s \in S$ es simplemente el grupo de homología $H_1(P_s;\mathbb{Q})$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$. La sucesión exacta de Chevalley induce una sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow H_1(R_s;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_1(P_s;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_1(A_s;\mathbb{Q}) \longrightarrow 1.$$

El espacio vectorial $H_1(R_s;\mathbb{Q})$ es isomorfo a $\mathbb{Q}^{\mu_s}$ (no canónicamente), mientras que $H_1(A_s;\mathbb{Q}) = \mathfrak{a}_s^*(\mathbb{Q})$ coincide con los puntos racionales del dual del álgebra de Lie $\mathfrak{a}_s$ de A_s, y es isomorfo a $\mathbb{Q}^{\dim A_s}$ (no canónicamente). Recordemos que una polarización (con coeficientes en $\mathbb{Q}$) de la variedad abeliana A_s es un elemento de $H^{1,1}(A_s,\mathbb{Q})$, o, equivalentemente, una forma bilineal alternada y no degenerada

$$\mathfrak{a}_s(\mathbb{Q}) \otimes \mathfrak{a}_s(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q},$$

que por tanto determina un isomorfismo $\mathfrak{a}_s^*(\mathbb{Q}) \to \mathfrak{a}_s(\mathbb{Q})$. Una *polarización* de P es una forma bilineal alternada

$$T(P) \otimes T(P) \longrightarrow \mathbb{Q}_S,$$

que es nula sobre los $H_1(R_s;\mathbb{Q})$ y que induce una polarización en las A_s. Decimos que P es polarizable si admite una polarización.

Ejemplo 2. Supongamos que $f : C \to S$ es una familia de curvas reducidas e irreducibles y con singularidades planas. Sean $P = \mathrm{Jac}_{C/S}$ el Jacobiano relativo y $X = \overline{\mathrm{Jac}}_{C/S}$ el Jacobiano compactificado relativo. Para cada $s \in S$, P_s parametriza los fibrados de línea de grado 0 en C_s, mientras que X_s parametriza los haces libres de torsión de rango 1 y grado 0. La acción de P_s en X_s es mediante el producto tensorial. Es bien sabido que el Jacobiano admite una polarización natural, dada por el theta-divisor. La función δ está dada por

$$\delta_s = \dim H^0(C_s, c_*\mathcal{O}_{\tilde{C}_s}/\mathcal{O}_{C_s}),$$

donde $c : \tilde{C}_s \to C_s$ es la normalización de C_s. La δ-regularidad se conoce en algunos casos concretos.

Ejemplo 3 (Sistemas integrables)**.** Sea $f : X \to S$ y $g : P \to S$ una fibración abeliana débil, y supongamos que X es de dimensión $2d$ y está equipada con una forma simpléctica (algebraica) ω. Como g es lisa, tenemos un isomorfismo $d_eg : \mathfrak{p}_s = T_eP_s \to T_sS$, para cada $s \in S$. Fijemos ahora un isomorfismo $\mathfrak{p}^* \to \mathfrak{p}$, y supongamos que este isomorfismo es compatible con la polarización de P. Componiendo con $(d_eg)^*$, obtenemos un isomorfismo $\psi_s : T_s^*S \to \mathfrak{p}_s$. Por otra parte, la acción de P induce, para cada punto $x \in X_s$, una acción infinitesimal $\phi_x : \mathfrak{p}_s \to T_xX$.

Decimos que f y g forman un *sistema integrable* si, para cada $s \in S$ y para cada $x \in X_s$, el isomorfismo $T_xX \to T_x^*X$ inducido por la forma simpléctica determina un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{p}_s \arrow[r, "\phi_x"] & T_xX \arrow[d] \\
T_s^*S \arrow[u, "\psi_s"] \arrow[r, "(d_xf)^*"] & T_x^*X.
\end{tikzcd}$$

En particular, esto quiere decir que f es una *aplicación momento* para la acción de P. A diferencia de la situación análoga en geometría diferencial, aquí es necesaria la compatibilidad con la polarización para garantizar la integrabilidad analítica de las ecuaciones del movimiento. Sobre los valores regulares $s \in S$, por conteo de dimensiones, la acción infinitesimal induce un isomorfismo $\mathfrak{p}_s \to T_x X_s$, para todo $x \in S$. Por tanto, las fibras regulares X_s son variedades abelianas polarizadas, que además, por el diagrama anterior, son subvariedades lagrangianas de X. La polarización de las fibras permite dar coordenadas en las mismas, en términos de funciones theta. Podemos entender esto como un análogo algebraico de las famosas *variables de acción-ángulo* de la mecánica clásica.

Resulta que los sistemas integrables son δ-regulares. En efecto, dado un $\delta \in \mathbb{N}$ podemos considerar el conjunto

$$Y_\delta = \left\{x \in X : \dim(\mathrm{Stab}_{P_{f(x)}}(x)) \geq \delta\right\},$$

y vemos inmediatamente que $S_{\leq\delta} = f(Y_\delta)$. Tomemos entonces un punto $s \in S$ y consideremos un punto $x \in X$. Para dicho punto, la acción infinitesimal $\phi_x : \mathfrak{p}_s \to T_x X$ tiene por núcleo el álgebra de Lie del estabilizador $\mathrm{Stab}_{P_s}(x)$. Dualizando con respecto a la forma simpléctica, obtenemos que la dimensión de este estabilizador debe coincidir con la del conúcleo de la diferencial $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} S$, y por tanto podemos escribir

$$Y_\delta = \{x \in X : d - \mathrm{rk}(d_x f) \geq \delta\}.$$

En particular, el rango de la restricción $d_x f|_{T_x Y_\delta}$ es siempre menor que $d - \delta$, y por tanto $\dim S_\delta \leq d - \delta$, como queríamos probar.

3. El teorema de soporte

Teorema 2. *Sea $f : X \to S$ y $g : P \to S$ una fibración abeliana débil δ-regular. Una subvariedad irreducible cerrada $Z \subset S$ es un soporte de la descomposición de $f_*\mathbb{Q}_X$ si y sólo si existe una subvariedad Zariski densa $Z^0 \subset Z$ tal que el haz $R^{2d} f_*\mathbb{Q}$ es localmente constante en Z^0, y Z es maximal con respecto a esta propiedad. Además, si las fibras de f son irreducibles, tenemos $Z = S$.*

En el caso particular en que las fibras son irreducibles, la descripción de los soportes es especialmente sencilla. Denotamos por $j : S_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow S$ la inclusión del subconjunto de valores regulares de f, y por R^i los sistemas locales $R^i = R^i f_*\mathbb{Q}|_{S_{\mathrm{reg}}}$. Entonces tenemos una descomposición

$$f_*\mathbb{Q}[2d] = \bigoplus_i IC(R^i)[d-i].$$

Guillermo Gallego Sánchez
Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Arnimallee 3
14195 Berlín, Alemania
Email address: guillermo.gallego.sanchez@fu-berlin.de
Página Web: https://guillegallego.xyz