

# Covariación instrumentada con GeoGebra

Trabajo Fin de Máster

Guillermo Gallego Sánchez

Dirigido por Inés María Gómez Chacón

# Índice

1. Planteamiento del problema
2. Fundamentación teórica
3. Objetivos
4. Metodología
5. Resultados
6. Conclusiones

# 1. Planteamiento del problema

# Motivación

Dificultades del alumnado para entender el concepto de función:

- $f(x+a)=f(x)+a$
- Funciones constantes
- Funciones patológicas
- Situaciones que sugieren una gráfica
- El “problema de la botella”

# Planteamiento del problema

Desarrollar un estudio que:

- Tenga en cuenta la definición formal y la historia del concepto de función.
- Considere varios enfoques didácticos del concepto de función.
- Diseñe actividades para entender las funciones.
- Explore las posibilidades de los DGA.

## 2. Fundamentación teórica

# Índice del marco teórico

- Dimensión histórica
  - Historia del concepto de función
- Dimensión didáctica
  - El papel de las variables
  - Covariación
  - Análisis de los libros de texto
  - Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

# Historia del concepto de función

**Origen:** Cinemática en Galileo y Kepler (S. XVI-XVII)

**Desarrollo:** Newton, Leibniz y más tarde Euler (S. XVII-XVIII)

**Primera crisis:** La ecuación de onda y el análisis de Fourier (S. XVIII-XIX)

**Primera definición formal:** Dirichlet (S. XIX)

**Segunda crisis:** Fundamentación de la matemática (Principios del s. XX)

**Definición actual (conjuntista):** Bourbaki (Años 30)



# El papel de las variables

## Modelo 3UV:

- 3 Usos de las Variables  
(Trigueros y Ursini, 2003)

## Modelo de la TAD:

- «Álgebra como modelización» frente a «aritmética generalizada»  
(Bolea, 2002)

# Covariación

- Concepción de las funciones *como proceso* frente a *como acción*.
- *Razonamiento covariacional*:

Concepción de las variables variando, y variando simultáneamente.

- Construcción de *objetos multiplicativos*.
- Funciones paramétricas.
- *Covariación instrumentada* mediante el diseño de situaciones didácticas.

(Oehrtman, Carlson y Thompson, 2008)

# Análisis de los libros de texto

- Bruño 1º de ESO
- Anaya 3º de ESO Aplicadas
- Bruno 1º de Bachillerato Ciencias
- Spivak *Calculus*
- Apostol *Calculus*
- Tipler *Física*

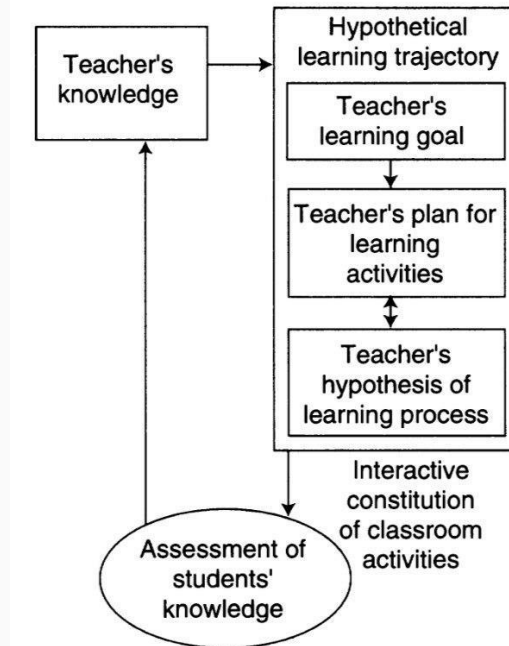
# Análisis de los libros de texto

<b>Pregunta</b>	<b>Bruño ESO</b>	<b>Anaya</b>	<b>Bruño Bach.</b>	<b>Spivak</b>	<b>Apostol</b>	<b>Tipler</b>
¿Def. rigurosa?	<b>Sí</b>	<b>Sí</b>	<b>Sí</b>	<b>Sí</b>	<b>Sí</b>	<b>No</b>
¿Historia?	<b>No</b>	<b>Sí</b>	<b>No</b>	<b>No</b>	<b>Sí</b>	<b>No</b>
¿Modelización?	<b>Sí</b>	<b>Sí</b>	<b>No</b>	<b>No</b>	<b>Sí</b>	<b>Sí</b>
¿Noción dinámica?	<b>No</b>	<b>No</b>	<b>No</b>	<b>No</b>	<b>No</b>	<b>Sí</b>
¿Covariación?	<b>No</b>	<b>No</b>	<b>No</b>	<b>No</b>	<b>No</b>	<b>Sí</b>

# Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Herramienta de diseño instruccional basada en la construcción de una “trayectoria hipotética” a seguir durante el proceso de enseñanza y que se va viendo corregida a lo largo de éste.

(Simon, 1995)



# 3. Objetivos

# Objetivos

**Objetivo general:** Desarrollar una THA para un primer tema de funciones en la ESO en el marco teórico de la covariación instrumentada mediante el manejo de un software de geometría dinámica.

**Objetivos específicos:** página 29.

# 4. Metodología

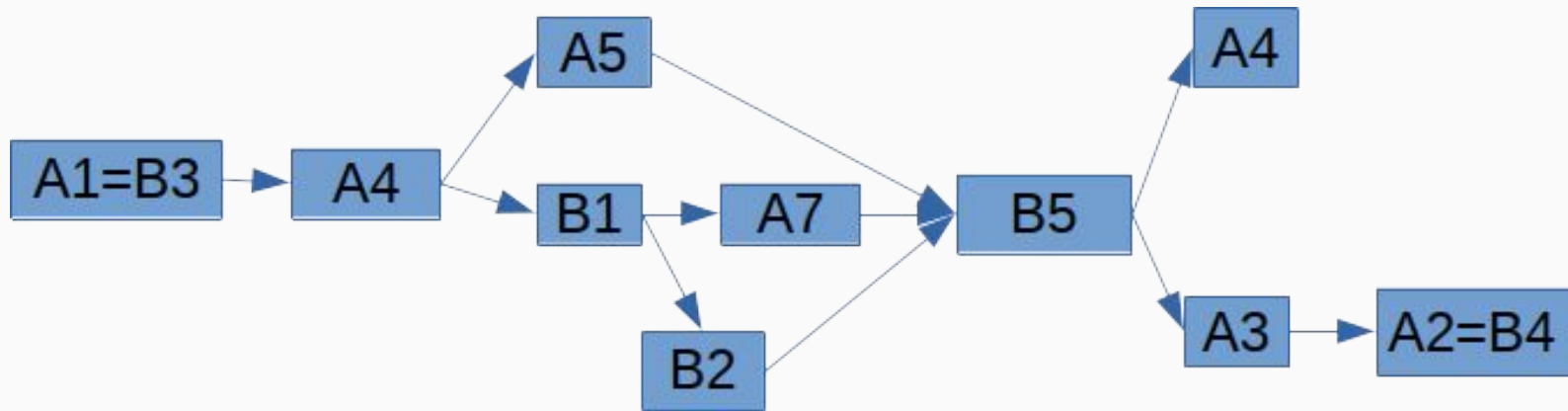


# Análisis didáctico para la selección de capacidades de la THA

- **Análisis de contenido:** Primer tema de funciones basado en el currículum de la ESO
- **Análisis cognitivo:**
  - **Capacidades previas:** 1º de ESO
  - **Capacidades a desarrollar:**
    - Curriculares (A1-A7)
    - Asociadas al marco teórico (B1-B6)

(Gómez y Lupiáñez, 2007)

# Construcción de la THA



# Material: GeoGebra

- Es un DGA con capacidades 3D
- Su interfaz es muy sencilla de usar
- Es *software libre*
- Está traducido a todas las lenguas oficiales del estado

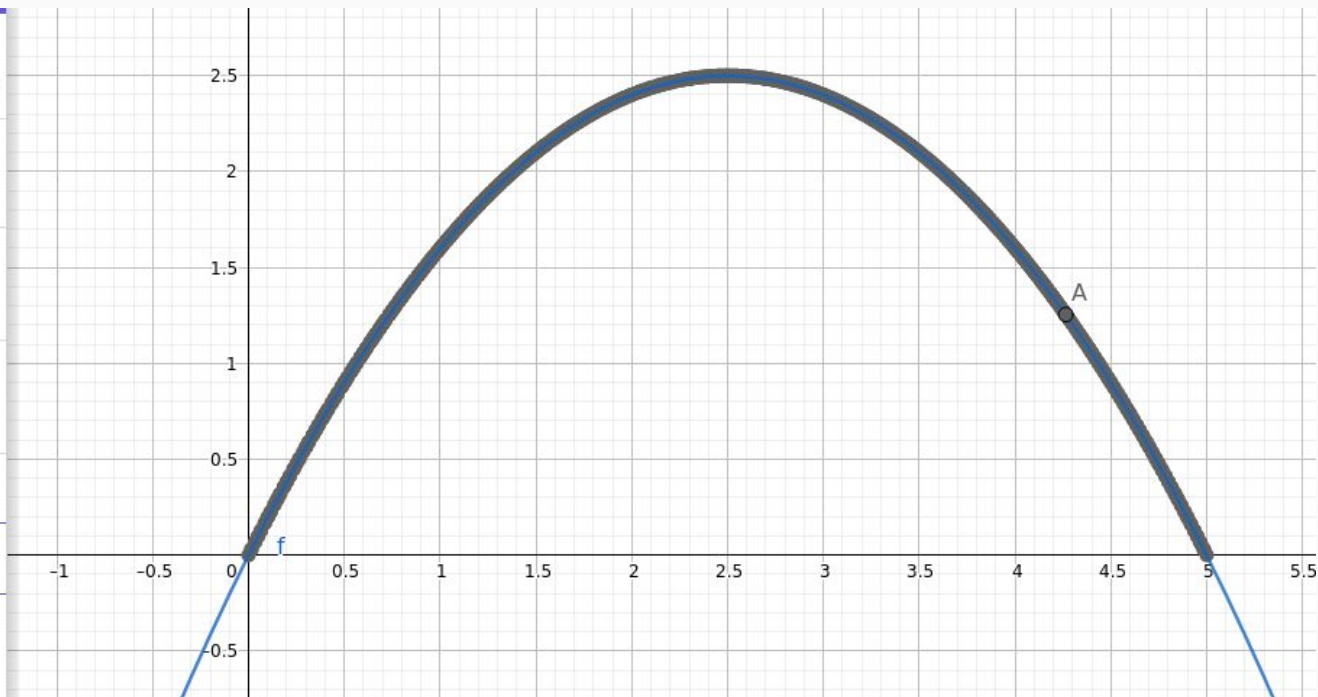
# 5. Resultados

# Diseño y secuenciación de las actividades

- Se ha construido una THA consistente en:
  - 4 actividades para trabajar las funciones
  - 1 propuesta de implementación de las mismas

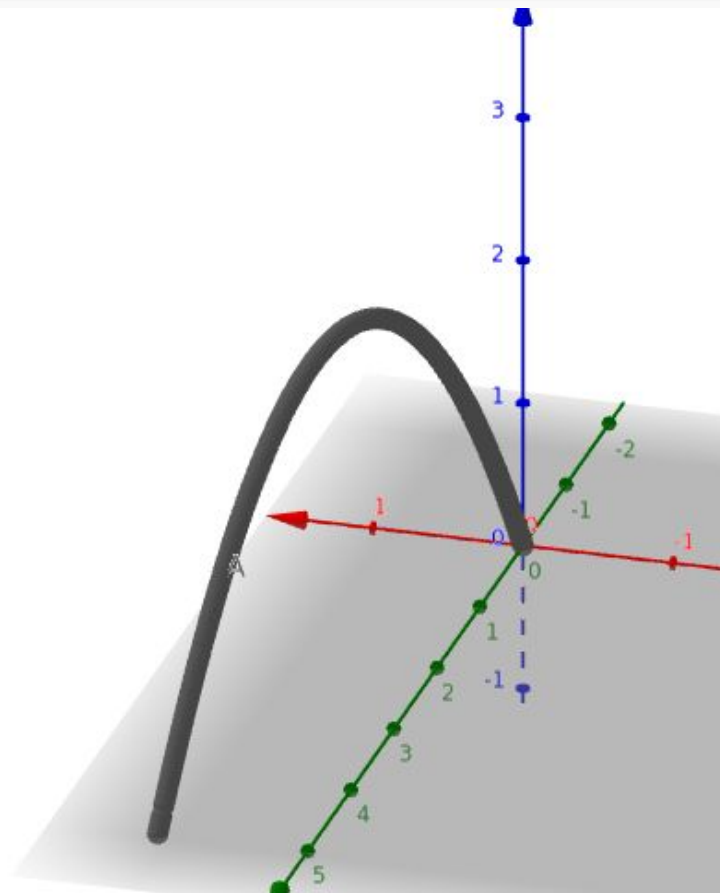
# Ejemplo de actividad: Un tiro a canasta

<input type="radio"/>	$T = 0.853$	⋮
<input type="range"/>	0 ————— 1	▶
<input type="radio"/>	$X = 5 T$ → 4.265	⋮
<input type="radio"/>	$Y = 10 T - 10 T^2$ → 1.25391	⋮
<input type="radio"/>	$A = (X, Y)$ → (4.265, 1.25391)	⋮
<input type="radio"/>	$f: y = 2x - 2 / 5 x^2$	⋮
<input type="text"/>	Entrada...	



# Ejemplo de actividad: Un tiro a canasta

<input type="radio"/>	$T = 0.84$ 0 <input type="range" value="0.84"/> 1 <input type="button" value="▶"/>	⋮
	$X = 5 T$ → 4.19	⋮
	$Y = 10 T - 10 T^2$ → 1.36	⋮
<input type="radio"/>	$A = (T, X, Y)$ → (0.84, 4.19, 1.36)	⋮
<input type="button" value="⊕"/>	Entrada...	



# Ejemplo de actividad: Un tiro a canasta

$$v_{x,0} = 6.87$$



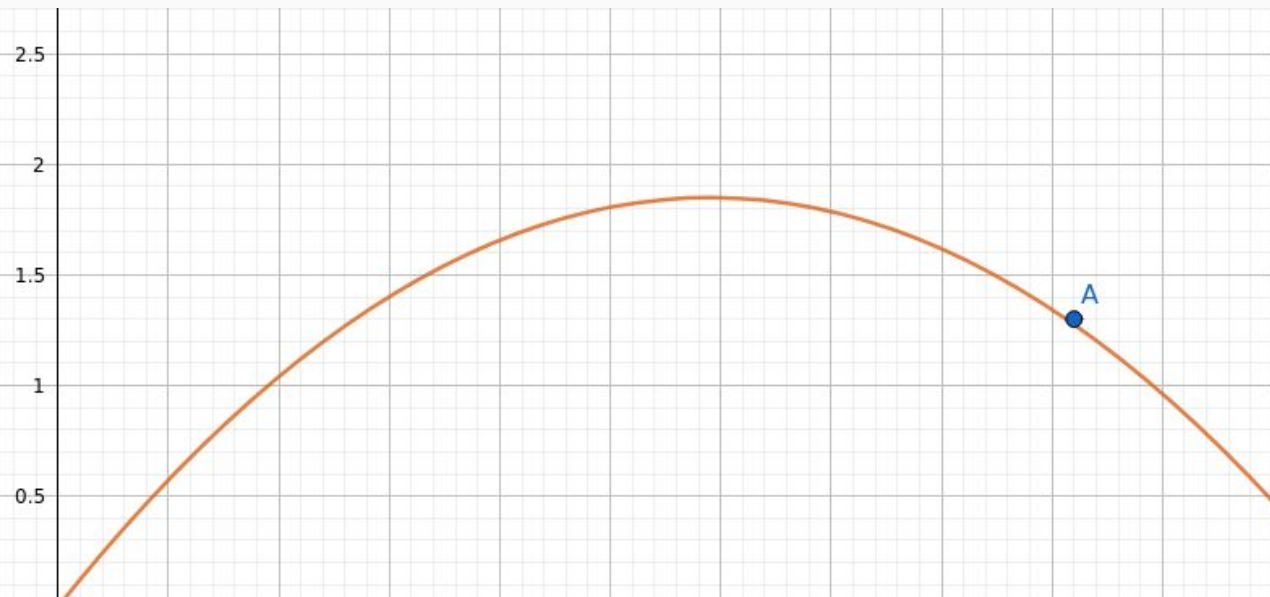
$$v_{y,0} = 8.6$$



$$f: y = 8.6 / 6.87 x - 10 / 6.87^2 x^2$$

$$A = (4.6, 1.3)$$

Entrada...





# Ejemplo de actividad: Un tiro a canasta

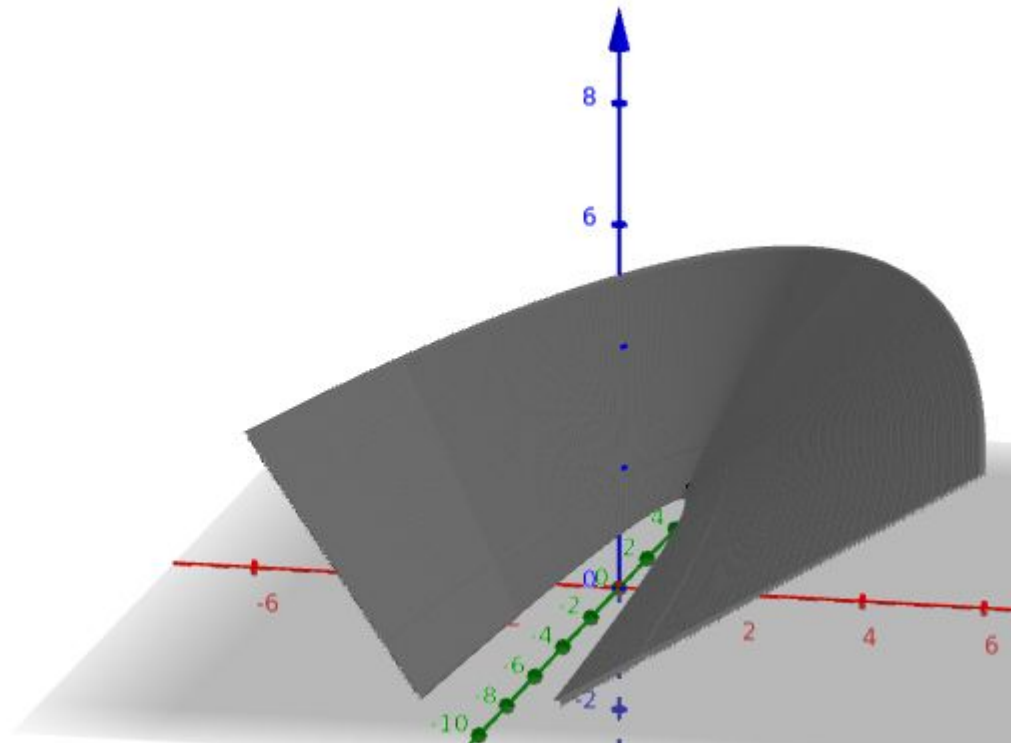
$v = 0.97$

0  10 ▶

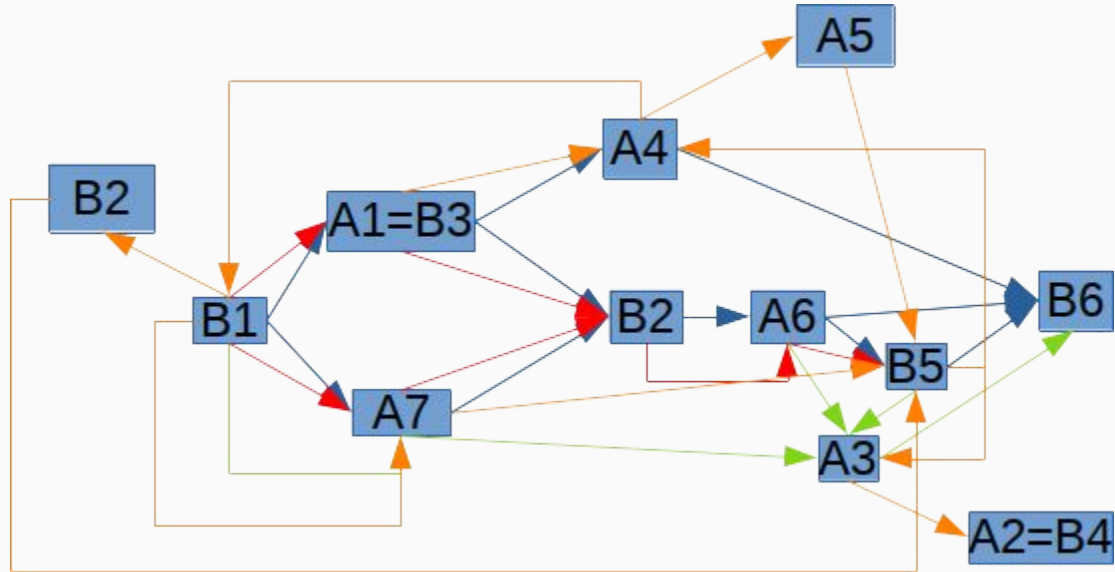
$$\text{ec1 : } X = \left( x, \frac{10}{v} x - \frac{10}{v^2} x^2, v \right)$$

$$\rightarrow X = (0.49, 2.5, 0.97) + (-0.05 x, -0.0098 x^2, 0)$$

Entrada...



# Diagrama de flujo de la THA



# 6. Conclusiones

# Conclusiones respecto de los objetivos

- Desarrollo de la THA ✓
- Utilización de la covariación instrumentada ✓
- Objetivos específicos:
  - Desarrollo de las capacidades A y B ✓

# Limitación

Suspensión de las clases por la COVID-19.

No se ha podido implementar la THA en el aula.

# Futuras líneas de acción

- Implementación en el aula de la THA
- Exploración de las funciones en relación con informática y programación

# Desarrollo como profesor

- Importancia del desarrollo del pensamiento funcional.
- Importancia del dominio de la materia.
- Importancia de la Historia de las Matemáticas en la Didáctica.
- Importancia de un uso sensato y libre de las nuevas tecnologías

- Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*.
- Gómez, P., y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.
- Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., y Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a constructivist perspective.
- Trigueros, M., y Ursini, S. (2003). First year undergraduates' difficulties in working with the concept of variable.