INTRODUCCIÓN A LAS SUPERFICIES DE RIEMANN

GUILLERMO GALLEGO

1. Topología de superficies compactas

1.1. Superficies topológicas.

1.2. Triangulaciones.

1.3. Clasificación de las superficies trianguladas.

1.4. Cohomología simplicial.

2. Haces y cohomología

3. Estructuras diferenciables

3.1. El espacio tangente.

3.2. Formas.

3.3. Cohomología de de Rham.

Teorema de de Rham.

4. Fibrados de línea complejos

4.1. Definición. Fijemos, durante toda la sección, X una superficie diferenciable compacta y orientable. Un *fibrado de línea complejo sobre* X es una variedad diferenciable L junto con una aplicación $p : L \to X$ tal que

1. para cada $x \in X$, la *fibra* $L_x = p^{-1}(x)$ es un espacio vectorial complejo de dimensión 1,
2. para cada punto $x \in X$ existe un entorno U de x y un homeomorfismo $\varphi_U : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{C} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U, &
\end{tikzcd}$$

3. las aplicaciones $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{C} \to (U \cap V) \times \mathbb{C}$ son de la forma

$$(x, v) \longmapsto (x, g_{UV}(x)v),$$

con las $g_{UV} : U \to \mathbb{C}^*$ funciones diferenciables que llamamos *funciones de transición.*

Date: Última versión: 20 de octubre de 2020.

Nótese que, por construcción, las funciones de transición satisfacen la condición de cociclo

$$g_{UV}g_{VW} = g_{UW}$$

en $U \cap V \cap W$. Podemos entonces asociar a cada fibrado de línea complejo $L \to X$ el cociclo $(g_{UV})_{U,V \in \mathfrak{U}} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}^*)$, donde el recubrimiento $\mathfrak{U}$ está dado por la definición de fibrado de línea complejo.

Lo interesante ahora es que de hecho esta descripción en términos de cociclos basta para clasificar los fibrados de línea complejos. Así, dados dos fibrados de línea complejos $L \to X$ y $L' \to X$, un *homomorfismo* entre L y L' es una aplicación continua $f : L \to L'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & L' \arrow[dl] \\ & X, & \end{tikzcd}$$

y tal que, para cada $x \in X$, la restricción $f_x = f|_{L_x} : L_x \to L'_x$ es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal.

Proposición 4.1. *Las clases de isomorfismo de fibrados de línea complejos están en correspondencia biyectiva con los elementos de* $H^1(X, (C^\infty_X)^*)$.

Demostración. Hacer. □

4.2. Conexiones y curvatura. Sea $L \to X$ un fibrado de línea complejo. Por una *conexión* D en L entendemos un operador $\mathbb{C}$-lineal

$$D : \Omega^0_L \to \Omega^1_L$$

tal que

$$D(fs) = sdf + fDs,$$

para $f \in C^\infty(U)$ y $s \in \Omega^0(U, L)$, para cada subconjunto abierto $U \subset X$.

Nótese que, si tomamos un abierto $U \subset X$ que admite una referencia $e_U \in \Omega^0(U, L)$, podemos escribir

$$De_U = e_U A_U,$$

donde $A_U \in \Omega^1(U)$ es una 1-forma. Dada ahora cualquier otra sección $s = e_U s_U \in \Omega^0(U, L)$, tenemos

$$Ds = D(e_U s_U) = De_U s_U + e_U ds_U = e_U(A_U + d)s_U.$$

La matriz A_U se llama 1-*forma de conexión* de D en U. Ahora, si $e_V \in \Omega^0(V, L)$ es otra referencia, tenemos, en $U \cap V$,

$$\begin{aligned} Ds &= e_U(A_U + d)s_U = e_V g_{UV}^{-1}(A_U + d)s_U = e_V(g_{UV}^{-1}A^U g_{UV}s_V + g_{UV}^{-1}d(g_U V s_V)) \\ &= e_V(A_U + g_{UV}^{-1}dg_{UV} + d)s_V = e_V(A_U + d\log(g_{UV}) + d)s_V, \end{aligned}$$

de modo que

$$A_V = A_U + d\log(g_{UV}).$$

Si D y D' son dos conexiones en $L \to X$, tenemos que $D - D'$ actúa localmente, en un abierto U, mediante la 1-forma $B_U = A_U - A'_U$. Ahora, si V es otro abierto distinto, en $U \cap V$ tenemos

$$B_V = A_V - A'_V = A_U + d\log(g_{UV}) - A'_U - d\log(g_{UV}) = A_U - A'_U = B_U.$$

Por la propiedad de pegado, las 1-formas $B_U \in \Omega^1(U)$ determinan globalmente una 1-forma $B \in \Omega^1(X)$. Esto implica que podemos identificar el conjunto $\mathcal{A}(L)$ de las conexiones en $L \to X$ como un espacio afín modelado sobre el espacio $\Omega^1(X)$.

Nótese que el operador D induce de forma natural otro operador $D : \Omega^1_L \to \Omega^2_L$ en la forma

$$D(\omega s) = d\omega s - \omega \wedge Ds,$$

para $\omega \in \Omega^1(U)$ y $s \in \Omega^0(U, L)$. Definimos entonces la *curvatura de* D como el operador

$$F_D = D^2 : \Omega^0_E \longrightarrow \Omega^2_E.$$

La curvatura es realmente una aplicación C^∞_X-lineal, ya que

$$D^2(fs) = D(sdf + fDs) = sd(df) - df \wedge Ds + df \wedge Ds + fD^2s = fD^2s,$$

para $s \in \Omega^0(U, L)$ y $f \in C^\infty(U)$. Localmente, si tomamos una referencia e_U en un abierto U, podemos escribir

$$F_D(e_U) = D^2(e_U) = D(e_U A_U) = De_U \wedge A_U + e_U \wedge dA_U = e_U dA_U = e_U F_U,$$

para $F_U = dA_U$ una 2-forma que llamamos la 2*-forma de curvatura* de D en U. Además, si e_V es otra referencia en otro abierto V, en la intersección $U \cap V$ tenemos

$$F_D(s) = F_D(e_U s_U) = e_U F_U s_U = e_U g_{UV}^{-1} F_U g_{UV} s_V,$$

de modo que

$$F_U = F_V.$$

Por tanto, podemos identificar la curvatura de D como una 2-forma $F_D \in \Omega^2(X)$.

4.3. Teoría de Chern-Weil. Supongamos que $L \to X$ es un fibrado de línea complejo y D es una conexión en L. La teoría de Chern-Weil parte de considerar la 2-forma definida por la curvatura $F_D \in \Omega^2(X)$ de la conexión D. Como localmente se tiene que $F_D|_U = F_U = dA_U$, tenemos que F_D es una 2-forma cerrada.

Podemos considerar entonces la clase de cohomología de de Rham $[F_D] \in H^2(X, \mathbb{C})$. Esta clase de cohomología no depende de la conexión D. En efecto, si $D' = D + A$ es otra conexión, para $A \in \Omega^1(X)$, entonces

$$F_{D'}s = (D + A)(Ds + As) = D^2s + A \wedge Ds + dAs - A \wedge Ds + A \wedge As = (F_D + dA)s,$$

de modo que $F_{D'} = F_D + dA$, luego $[F_{D'}] = [F_D]$. Esto prueba que la clase de cohomología $[F_D]$ es un invariante del fibrado L.

Recordemos que el teorema de de Rham da un isomorfismo $I : H^2(X, \mathbb{C}) \to H^2(X, \underline{\mathbb{C}})$ y cuya forma explícita ya hemos estudiado (CITAR). Podemos tomar entonces las 1-formas de conexión de D, que cumplen $F_D|_U = dA_U$ y considerar $d \log(g_{UV}) = A_U - A_V$. El elemento correspondiente a $[F_D]$ por el isomorfismo de de Rham es la clase de cohomología de Čech definida por el 2-cociclo

$$I([F_D]) = \{\log(g_{UV}) + \log(g_{VW}) - \log(g_{UW})\}_{U,V,W \in \mathfrak{U}}.$$

Esto implica que $\frac{i}{2\pi}[F_D] \in H^2(X, \mathbb{Z})$. En efecto, como $\{g_{UV}\}_{U,V \in \mathfrak{U}}$ es un cociclo

$$1 = g_{UV} g_{VW} g_{UW}^{-1} = \exp(\log(g_{UV}) + \log(g_{VW}) - \log(g_{UW})),$$

de modo que

$$\log(g_{UV}) + \log(g_{VW}) - \log(g_{UW}) = 2\pi i k$$

para cierto $k \in \mathbb{Z}$.

A la luz de este resultado, definimos la *clase de Chern* de un fibrado de línea $L \to X$ como la clase de cohomología entera

$$c_1(L) = \frac{i}{2\pi}[F_D] \in H^2(X, \mathbb{Z}),$$

para cualquier conexión D en L. Definimos el *grado* de L como el número entero

$$\deg L = \int_X c_1(L) = \frac{i}{2\pi}\int_X F_D \in \mathbb{Z}.$$

Recordemos que el grupo de cohomología $H^1(X, (C_X^\infty)^*)$ clasifica los fibrados de línea complejos salvo isomorfismo. Por tanto, tenemos una aplicación

$$\begin{aligned} c_1 : H^1(X, (C_X^\infty)^*) &\longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \\ [L] &\longmapsto c_1(L). \end{aligned}$$

Tomemos ahora la sucesión exacta corta dada por la exponencial

$$0 \longrightarrow 2\pi i\underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow C_X^\infty \xrightarrow{\exp} (C_X^\infty)^* \longrightarrow 1.$$

Si consideramos la sucesión exacta larga inducida, tenemos que $2\pi i c_1$ coincide con el homomorfismo

$$\delta : H^1(X, (C_X^\infty)^*) \longrightarrow H^2(X, \underline{\mathbb{Z}}).$$

En efecto, de la construcción del homomorfismo δ,

$$\delta(\{g_{UV}\}_{U,V\in\mathfrak{U}}) = \log(g_{UV}) + \log(g_{VW}) - \log(g_{UW}) = 2\pi i c_1(L),$$

con L el fibrado definido por el cociclo $\{g_{UV}\}_{U,V\in\mathfrak{U}}$. Ahora, como $H^1(X, C_X^\infty) = H^2(X, C_X^\infty) = 0$, tenemos que

$$c_1 : H^1(X, (C_X^\infty)^*) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$$

es un isomorfismo. Componiendo con el isomorfismo $\int_X : H^2(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, tenemos que

$$\deg : H^1(X, (C_X^\infty)^*) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

es un isomorfismo. En resumen, hemos demostrado:

Proposición 4.2. *Los fibrados de línea complejos están clasificados por su grado.*

5. Teoría de Hodge

5.1. Repaso de análisis funcional.

5.2. Series de Fourier.

5.3. Espacios de Sobolev.

Dada una función $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)^r$, con $f(x) = \sum_\xi f_\xi e^{ix\cdot\xi}$, definimos su *k-norma de Sobolev* $\|f\|_k$ como

$$\|f\|_k^2 = \sum_\xi |f_\xi|^2 (1 + |\xi|^2)^k.$$

Esta norma es equivalente, en $C^\infty(\mathbb{T}^n)^r$, a la norma definida por

$$\left[\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2\right].$$

En efecto, [Hacer]. Vistos de esta forma, es claro que existe una cadena de inclusiones entre los espacios de Sobolev

$$\cdots \supset L^2_{k-1} \supset L^2_k \supset L^2_{k+1} \supset \cdots .$$

[Hablar de derivadas débiles]

Definimos el *espacio de Sobolev* $L^2_k(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^r)$ como la complección de $C^\infty(\mathbb{T}^n)^r$ con respecto de la k-norma de Sobolev. Otra definición equivalente es la siguiente

$$L^2_k(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^r) = \left\{ \text{Series de Fourier formales } \sum_\xi f_\xi e^{ix\cdot\xi} \text{ con } \sum_\xi (1+|\xi|^2)^k |f_\xi|^2 < \infty \right\}.$$

En efecto, [Hacer].

Cuando X es una variedad diferenciable compacta, las definiciones pueden extenderse directamente para las secciones de $E \to X$ un fibrado vectorial hermítico de rango r. Basta tomar un recubrimiento por abiertos $\mathfrak{U}$ de X tal que, para cada $U \in \mathfrak{U}$ existe un isomorfismo de fibrados φ_U definido por el diagrama

$$\begin{tikzcd} E|_U \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & \mathbb{B}^n \times \mathbb{C}^r \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ U \arrow[r, "\bar{\varphi}_U"] & \mathbb{B}^n, \end{tikzcd}$$

donde $\mathbb{B}^n$ es la bola unidad en $\mathbb{R}^n$. Por compacidad, podemos tomar $\mathfrak{U}$ finito. Tomemos $\{\rho_U\}_{U\in\mathfrak{U}}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada a $\mathfrak{U}$. Si $\Gamma_c(U,E)$ denota las secciones de E con soporte compacto contenido en un cierto $U \in \mathfrak{U}$, tenemos una aplicación sobreyectiva

$$\begin{aligned} \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma_c(U,E) \\ s &\longmapsto \rho_U s. \end{aligned}$$

Por otra parte, el isomorfismo φ_U induce una biyección

$$\begin{aligned} \varphi_U^* : \Gamma(U,E) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{B}^n)^r = C^\infty(\mathbb{B}^n, \mathbb{C}^r) \\ s &\longmapsto \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_U \circ s \circ \bar{\varphi}_U^{-1}. \end{aligned}$$

Como los difeomorfismos preservan el soporte, tenemos que esta biyección desciende a otra biyección

$$\varphi_U^* : \Gamma_c(U,E) \longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{B}^n)^r.$$

Tenemos entonces una aplicación sobreyectiva

$$\begin{aligned} \pi_U : \Gamma(E) &\longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{B}^n)^r \\ s &\longmapsto \varphi_U^* \rho_U s. \end{aligned}$$

Ahora, el conjunto $C_c^\infty(\mathbb{B}^n)^r$ puede verse como un subconjunto de $C^\infty(\mathbb{T}^n)^r$ extendiendo por periodicidad. Por tanto, dado un elemento $s \in \Gamma(E)$ podemos ver $\pi_U(s)$ como un elemento de $C^\infty(\mathbb{T}^n)^r$. Definimos entonces la *k-norma de Sobolev* $\|s\|_k$ de una sección $s \in \Gamma(E)$ como

$$\|s\|_k = \sum_{U\in\mathfrak{U}} \|\pi_U(s)\|_k .$$

Análogamente, definimos el espacio de Sobolev $L^2_k(E)$ como la complección de $\Gamma(E)$ con respecto de la k-norma de Sobolev. La aplicación π_U se extiende entonces a una aplicación $\pi_U : L^2_k(E) \to L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^r)$.

Definimos ahora la aplicación $\pi_k : L^2_k(E) \to L^2_k(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^r)$ que, a cada $s \in L^2_k(E)$, lo envía a $\pi_{U_s}(s)$, donde $U_s \in \mathfrak{U}$ es tal que

$$\|\pi_{U_s}(s)\|_k = \max_{U \in \mathfrak{U}} \{\|\pi_U(s)\|_k\}.$$

Esta π_k es claramente lineal biyectiva y, de hecho, define una isometría lineal. En efecto, si $K = |\mathfrak{U}|$,

$$\frac{1}{K}\|s\|_k \leq \|\pi_k(s)\|_k \leq \|s\|_k.$$

Los dos resultados fundamentales que utilizaremos sobre los espacios de Sobolev son los siguientes:

Proposición 5.1 (Inclusiones de Sobolev)**.**

$$L^2_k(E) \subset \Gamma^0(X, E) \textit{ para } k \geq [n/2] + 1$$
$$L^2_k(E) \subset \Gamma^m(X, E) \textit{ para } k \geq [n/2] + 1 + m,$$

donde $\Gamma^m(X, E)$ *denota el conjunto de las secciones de* E *de clase* C^m *(en particular, si* $m = 0$*, son las secciones continuas).*

Proposición 5.2 (Rellich–Kondrachov)**.** *Las inclusiones* $L^2_l(E) \hookrightarrow L^2_k(E)$*, para* $k < l$*, son compactas.*

5.4. Operadores diferenciales. Un *operador diferencial de orden* m, $T : C^\infty(\mathbb{T}^n)^r \to C^\infty(\mathbb{T}^n)^s$ consiste en una matriz $r \times s$ con entradas T_{ij} de la forma

$$T_{ij} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a^\alpha_{ij}\partial^\alpha,$$

con las $a^\alpha_{ij} \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y al menos alguna a^α_{ij} no idénticamente nula para algunos i, j y para algún α con $|\alpha| = m$.

Más generalmente, si E y F son dos fibrados vectoriales complejos sobre X de rangos r y s respectivamente, decimos que una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $T : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ es un *operador diferencial de orden* m si, tomando un recubrimiento $\mathfrak{U}$ trivializante para E y F, para cada $U \in \mathfrak{U}$, el operador T_U definido por el siguiente diagrama es un operador diferencial de orden m

$$\begin{tikzcd} \Gamma(E) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi_U"] & \Gamma(F) \arrow[d, "\pi_U"] \\ C^\infty(\mathbb{T}^n)^r \arrow[r, "T_U"] & C^\infty(\mathbb{T}^n)^s. \end{tikzcd}$$

Nótese que, por la definición de las normas de Sobolev para secciones para cada $s \in \Gamma(E)$,

$$\|Ts\|_k = \sum_{U \in \mathfrak{U}} \|\pi_U(Ts)\|_k = \sum_{U \in \mathfrak{U}} \|T_U(\pi_U s)\|_k.$$

Proposición 5.3. *Si* $T : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ *es un operador diferencial de orden* m*, entonces, para todo* $k \in \mathbb{Z}$*,* T *se extiende por continuidad a un operador*

$$T_k : L^2_k(E) \longrightarrow L^2_{k-m}(F).$$

Demostración. Hacer. □

Sea $T : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ un operador diferencial de orden m. Fijos $(x, \xi) \in T^*X$, con $\xi \neq 0$, definimos el *símbolo de T en (x, ξ)* como la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \sigma_{(x,\xi)}(T) : E_x &\longrightarrow F_x \\ v &\longmapsto T(f^m s)(x), \end{aligned}$$

con $s \in \Gamma(E)$ tal que $s(x) = v$ y $f \in C^\infty(X)$ tal que $f(x) = 0$ y $df_x = \xi$. Más sintéticamente, si consideramos el fibrado $p : T'X \to X$ cuyas fibras son los espacios tangentes sin el cero, podemos definir el *símbolo de T* como la aplicación lineal

$$\sigma(T) : p^*E \longrightarrow p^*F$$

de la forma

$$\sigma(T)((x, \xi), v) = ((x, \xi), \sigma_{(x,\xi)}(T)).$$

Ahora, si $s \in \Gamma(E)$ es una sección con soporte compacto contenido en un abierto U difeomorfo a $\mathbb{B}^n$ por $\varphi_U : \mathbb{B}^n \to U$, entonces

$$T(f^m s)(x) = \varphi_U^*(T(f^m s))(\varphi_U^{-1}(x)) = T_U((f^m s) \circ \varphi_U)(\varphi_U^{-1}(x)).$$

La función $(f^m s) \circ \varphi_U$ puede escribirse como $g^m u$, para $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)^r$ con $u(\varphi_U^{-1}(x)) = \varphi_U^* v$ y $g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ con $g(\varphi_U^{-1}(x)) = 0$ y $dg_{\varphi_U^{-1}(x)} = \varphi_U^* \xi$. En consecuencia,

$$\sigma_{(x,\xi)}(T) = \sigma_{(\varphi_U^{-1}(x), \varphi_U^* \xi)}(T_U).$$

En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} p^*E \arrow[r, "\sigma(T)"] \arrow[d, "\varphi_U^*"] & p^*F \arrow[d, "\varphi_U^*"] \\ (\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{C}^r \arrow[r, "\sigma(T_U)"] & (\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{C}^s. \end{tikzcd}$$

Para entender el significado del símbolo, estudiemos qué forma tiene localmente. Un operador diferencial $T : C^\infty(\mathbb{T}^n)^r \to C^\infty(\mathbb{T}^n)^s$ de orden m con coeficientes $a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ puede escribirse en la forma

$$T = p_m(\partial) + \cdots + p_1(\partial) + p_0(\partial).$$

Aquí, cada p_l es una matriz $r \times s$ de cuyas entradas son polinomios de la forma

$$p_{l,ij}(\xi) = \sum_{|\alpha| = l} a_{ij}^\alpha \xi^\alpha,$$

con $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, de modo que $p_l(\partial)$ es el resultado de sustituir $\partial = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$ en p_l. Ahora, fijos $x \in \mathbb{T}^n$, $v \in \mathbb{C}^r$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ y dadas $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)^r$ con $u(x) = v$ y $g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ con $g(x) = 0$ y $dg_x = \xi$, tenemos

$$T(g^m u)(x) = p_m(\partial)(g^m u)(x) = p_m(dg_x)(u(x)) = p_m(\xi)(v).$$

Es decir, el símbolo $\sigma(T)$ está representado por la matriz de polinomios p_m.

[Hablar del adjunto formal]

5.5. Operadores elípticos. Decimos que un operador diferencial $T:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ es *elíptico* si su símbolo $\sigma_{(x,\xi)}(T)$ es un isomorfismo para todo $(x,\xi)\in T'X$. Localmente, podemos ver que un operador diferencial $T:C^\infty(\mathbb{T}^n)^r\to C^\infty(\mathbb{T}^n)^s$ es elíptico si y sólo si la matriz $p_m(\xi)$ es regular para todo $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

El resultado clave concerniente a los operadores elípticos es la desigualdad fundamental:

Teorema 5.4 (Desigualdad fundamental para los operadores elípticos)**.** *Sea $T:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ un operador elíptico de orden m y sea $k\in\mathbb{Z}$. Entonces existe una constante $C\geq 0$ tal que*

$$\|s\|_{k+m}\leq C(\|Ls\|_k+\|s\|_k),$$

para toda $s\in L^2_{k+m}(E)$.

Demostración. Hacer. □

Corolario 5.5 (Regularidad elíptica)**.** *Sea $T:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ un operador elíptico de orden m. Supongamos que $s\in L^2_k(E)$ y $t\in L^2_{k-m+1}(F)$, para cierto $k\in\mathbb{Z}$, son tales que*

$$T_l(s)=t.$$

Entonces $s\in L^2_{k+1}(E)$. En particular, si $s\in\ker T_l$, entonces $s\in\Gamma(E)$.

Demostración. En primer lugar, nótese que

$$\|t\|_{k-m+1}=\|T_ls\|_{k-m+1}=\sum_{U\in\mathfrak{U}}\|T_U(\pi_Us)\|_{k-m+1}.$$

Por tanto, si $\|t\|_{k-m+1}<\infty$, entonces $\|T_{U_s}(\pi_{U_s}s)\|_{k-m+1}<\infty$. Supongamos que el resultado está probado para operadores diferenciales $C^\infty(\mathbb{T}^n)^r\to C^\infty(\mathbb{T}^n)^s$. Entonces $\|\pi_{U_s}s\|_{k+1}<\infty$ y por tanto $\|s\|_{k+1}<\infty$.

Basta probar entonces que si $T:C^\infty(\mathbb{T}^n)^r\to C^\infty(\mathbb{T}^n)^s$ es un operador elíptico de orden m, $v\in L^2_{k-m+1}(\mathbb{T}^n,\mathbb{C}^r)$ y $v=Tu$, entonces $u\in L^2_{k+1}(\mathbb{T}^n,\mathbb{C}^s)$. [HACER]

Observemos ahora que, por las inclusiones de Sobolev $\bigcap_k L^2_k(F)=\Gamma(F)$. Por tanto, si $t\in\Gamma(F)$ (y, en particular, si $t=0$), entonces $t\in L^2_{k-m+1}(F)$ y en consecuencia $s\in L^2_k(E)$ para todo $k\in\mathbb{Z}$. Concluimos entonces que $s\in\bigcap_k L^2_k(E)=\Gamma(E)$. □

De este último resultado se deduce que, si $T:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ es un operador elíptico de orden m, los espacios $\ker(T_k:L^2_k(E)\to L^2_{k-m}(F))$ coinciden para todo k. Tiene sentido hablar del espacio $\mathscr{H}_T=\ker T\subset\Gamma(E)$. Los elementos de $\mathscr{H}_T$ son por tanto secciones diferenciables de E y reciben el nombre de *secciones T-armónicas.* Podemos definir la proyección ortogonal $P_T:\Gamma(E)\to\mathscr{H}_T$ respecto del producto L^2 en $\Gamma(E)$, que es por tanto continua en la norma L^2.

Cuando $T:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ es un operador elíptico autoadjunto, podemos descomponer el espacio $\Gamma(E)$ de una forma que nos será muy útil posteriormente.

Teorema 5.6 (Teorema espectral para operadores elípticos autoadjuntos)**.** *Sea $T:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ un operador elíptico de orden m y autoadjunto. Entonces existe una aplicación $G_T:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$, llamada el* operador de Green asociado a *T, lineal y continua en la norma L^2 tal que*

(1) $T\circ G_T+P_T=G_T\circ T+P_T=\mathrm{id}_{\Gamma(E)}$ *y*
(2) *existe una descomposición ortogonal con respecto al producto L^2*

$$\Gamma(E)=\mathscr{H}_T\oplus G_T\circ T(\Gamma(E))=\mathscr{H}_T\oplus T\circ G_T(\Gamma(E)).$$

6. Estructuras holomorfas

6.1. El espacio tangente holomorfo.

6.2. Cohomología de Dolbeaut. Teorema de Dolbeaut.

7. Fibrados de línea holomorfos

7.1. Clasificación. De forma totalmente análoga a como demostramos que los fibrados de línea complejos están clasificados por $H^1(X, (C_X^\infty)^*)$, podemos demostrar que los fibrados de línea complejos están clasificados por el *grupo de Picard*

$$\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathscr{O}_X^*).$$

7.2. Divisores. Sea $x \in X$ un punto y $f \in \mathscr{O}_X(U)$ una función holomorfa definida en un entorno U de x. Se define el *orden* de f en x como

$$\mathrm{ord}_x(f) = \begin{cases} a, & \text{si } f \text{ tiene un cero de orden } a \text{ en } x, \\ 0, & \text{si } f \text{ no se anula en } x. \end{cases}$$

Nótese que $\mathrm{ord}_x(fg) = \mathrm{ord}_x(f) + \mathrm{ord}_x(g)$. Ahora, si f es una función meromorfa en X, que localmente puede escribirse como $f = g/h$, podemos definir

$$\mathrm{ord}_x(f) = \mathrm{ord}_x(g) - \mathrm{ord}_x(h).$$

Un *divisor* D en X es una combinación lineal finita de puntos de X con coeficientes enteros,

$$D = \sum_{x \in X} n_x x,$$

con $n_x \in \mathbb{Z}$. Si f es una función meromorfa en X, podemos asociarle el divisor

$$(f) = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(f) x.$$

Podemos considerar también el *divisor de ceros* y el *divisor de polos* de f,

$$(f)_0 = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(g) x,$$

$$(f)_\infty = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(h) x.$$

Nótese que $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$.

Consideremos el haz $\mathscr{M}_X^*$ formado por las funciones meromorfas en X con la operación de multiplicación y el cociente $\mathscr{M}_X^*/\mathscr{O}_X^*$. Una sección global de $\mathscr{M}_X^*/\mathscr{O}_X^*$ está dada por un recubrimiento por abiertos $\mathfrak{U}$ de X y funciones meromorfas f_U en cada $U \in \mathfrak{U}$, no idénticamente nulas, tales que

$$\frac{f_U}{f_V} \in \mathscr{O}^*(U \cap V)$$

para $U, V \in \mathfrak{U}$. Tenemos entonces que, si $x \in U \cap V$, $\mathrm{ord}_x(f_U) = \mathrm{ord}_x(f_V)$. Así, a cada sección global $f \in H^0(X, \mathscr{M}_X^*/\mathscr{O}_X^*)$ podemos asociarle el divisor

$$D = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(f_U) x,$$

para $U \in \mathfrak{U}$ tal que $x \in U$. Recíprocamente, si $D = \sum_{x \in X} n_x x$ es un divisor, podemos tomar un entorno U para cada x con $n_x \neq 0$ tal que existe un homeomorfismo

$\varphi_U : U \to D_r$, con $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ el disco abierto de radio r en $\mathbb{C}$ y tal que $\varphi(x) = 0$. Si consideramos $f_U : U \to \mathbb{C}$ la composición de φ_U con la aplicación $z \mapsto z^{n_x}$, tenemos que x es un cero de orden n_x de f_U. Tenemos entonces que $D = \sum_U \mathrm{ord}_x(f_U)x$. Concluimos de estos razonamientos que el conjunto $\mathrm{Div}(X)$ de los divisores en X es igual a

$$\mathrm{Div}(X) = H^0(X, \mathscr{M}_X^*/\mathscr{O}_X^*).$$

Merece la pena mencionar que los divisores vistos de la primera forma reciben el nombre especial de *divisores de Weil*, mientras que los de la segunda se denominan *divisores de Cartier*. En nuestro caso de estudio la distinción no es relevante, pero sí que pueden ser objetos distintos en un contexto algebraico más general [CITAR Hartshorne].

Tenemos un homomorfismo

$$\begin{aligned} \mathrm{Div}(X) &\longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \\ D &\longmapsto [L_D] \end{aligned}$$

que a cada divisor D le asocia (la clase de isomorfía de) un fibrado de línea holomorfo L_D. En efecto, podemos describir fácilmente esta aplicación en términos de cohomología de haces: si $\{f_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ es una colección de funciones meromorfas, con $f_U/f_V \in \mathscr{O}^*(U \cap V)$, podemos considerar las funciones $g_{UV} = f_U/f_V$, que cumplen la condición de cociclo

$$g_{UV}g_{VW} = \frac{f_U}{f_V}\frac{f_V}{f_W} = \frac{f_U}{f_W} = g_{UW}.$$

Tenemos entonces una aplicación

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathscr{M}_X^*/\mathscr{O}_X^*) &\longrightarrow H^1(X, \mathscr{O}_X^*) \\ [\{f_U\}_{U\in\mathfrak{U}}] &\longmapsto [\{f_U/f_V\}_{U,V\in\mathfrak{U}}]. \end{aligned}$$

Esta aplicación es precisamente la inducida por la sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow \mathscr{O}_X^* \longrightarrow \mathscr{M}_X^* \longrightarrow \mathscr{M}_X^*/\mathscr{O}_X^* \longrightarrow 1,$$

dada por la inclusión de $\mathscr{O}_X^*$ en $\mathscr{M}_X^*$ y la proyección al cociente. Tenemos entonces que la asignación $D \mapsto [L_D]$ forma parte de una sucesión exacta

$$H^0(X, \mathscr{M}_X^*) \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X).$$

En particular, tenemos que *el fibrado $[L_D]$ es trivial si y sólo si D es el divisor de una función meromorfa.*

Si $\mathscr{L}$ es el haz de secciones de un fibrado de línea holomorfo L, una *sección meromorfa* de L en un abierto $U \subset X$ es un elemento de $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}_X(U)$. Análogamente, podemos ver una sección meromorfa como una colección de funciones meromorfas $s_V \in \mathscr{M}_X(V)$, para $V \in \mathfrak{U}$ un abierto de un recubrimiento de U trivializante para L, tales que

$$s_W = g_{VW}s_W.$$

Como $s_V/s_W = g_{VW} \in \mathscr{O}_X^*(V \cap W)$, tenemos que $\mathrm{ord}_x(s)$ está bien definido para un punto $x \in U$ y podemos definir el divisor

$$(s) = \sum_{x\in X} \mathrm{ord}_x(s)x.$$

Además, como $g_{VW} = s_V/s_W$, tenemos que el fibrado L es isomorfo $L_{(s)}$. Por otra parte, si $L = L_D$, con $D = \sum_U \operatorname{ord}_x(f_U)x$, las funciones $f_U \in \mathscr{M}_X(U)$ definen una sección meromorfa s_f de L_D con $D = (s_f)$. Por tanto, *un fibrado de línea L procede de un divisor si y sólo si tiene una sección meromorfa global.* En particular, si un fibrado de línea L tiene una sección holomorfa s, entonces $L_{(s)}$ y $\deg L = \deg(s) > 0$. En otras palabras, *si* $\deg L < 0$*, entonces* $H^0(X, L) = 0$.

Denotamos por $\mathscr{O}_X(D)$ el haz de secciones holomorfas del fibrado L_D asociado a un divisor D. Sea s_0 una sección meromorfa de L_D en un abierto $U \subset X$ con $(s_0) = D$. Para cualquier sección holomorfa $s \in \mathscr{O}_X(D)(U)$, el cociente $f_s = s/s_0$ es una función meromorfa en U con

$$(f_s) = (s) - (s_0) \geq -D.$$

Por otra parte, si $f \in \mathscr{M}_X(U)$ cumple que $(f) \geq -D$, tenemos que $(fs_0) \geq 0$, luego $fs_0 \in \mathscr{O}_X(D)(U)$. Tenemos entonces un isomorfismo

$$\begin{aligned} \{f \in \mathscr{M}_X(U) : (f) + D \geq 0\} &\longrightarrow \mathscr{O}_X(D)(U) \\ f &\longmapsto fs_0. \end{aligned}$$

Consideremos el caso en que $D = -x$, para un punto $x \in X$ tenemos que

$$\mathscr{O}_X(-x)(U) \cong \{f \in \mathscr{M}_X(U) : (f) \geq (x)\} = \{f \in \mathscr{O}_X(U) : (f) \geq (x)\}.$$

Esto es,

$$\mathscr{O}_X(-x)(U) = \begin{cases} \{f \in \mathscr{O}_X(U) : f(x) = 0\} & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

Definimos ahora el *haz rascacielos* $\mathscr{O}_x$ como

$$\mathscr{O}_x(U) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

Si consideramos el morfismo de haces sobreyectivo $\operatorname{ev}_x : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_x$, definido por

$$\operatorname{ev}_x(f) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \notin U, \end{cases}$$

para $f \in \mathscr{O}_X(U)$, tenemos una sucesión exacta corta de haces

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-x) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_x \longrightarrow 0.$$

7.3. Teorema de Riemann–Roch. Se define la *característica de Euler* de un haz $\mathscr{F}$ en X como

$$\chi(\mathscr{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(X, \mathscr{F}).$$

La propiedad fundamental de la característica de Euler es que es *aditiva*, esto es, si

$$0 \longrightarrow \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{Q} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de haces, entonces

$$\chi(\mathscr{F}) = \chi(\mathscr{R}) + \chi(\mathscr{Q}).$$

En efecto, basta tomar la sucesión exacta larga en cohomología y usar que la suma alternada de las dimensiones de una sucesión exacta siempre es 0.

Supongamos ahora que $L \to X$ es un fibrado holomorfo y sea $\mathscr{L}$ su haz de secciones holomorfas. Si D es un divisor en X, definimos el haz $\mathscr{L}(D) = \mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_X(D)$. La esencia de todo lo que sigue se resume en la fórmula

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \chi(\mathscr{L}) + \deg D.$$

Claramente se cumple para $D = 0$. Ahora, por inducción, suponiendo que se cumple para un divisor D, basta probar que se cumple para $D + x$ y para $D - x$, con $x \in X$. Para ver esto, consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-x) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_x \longrightarrow 0$$

y multipliquémosla por $\mathscr{L}(D + p)$, de modo que obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}(D) \longrightarrow \mathscr{L}(D + p) \longrightarrow \mathscr{O}_x \longrightarrow 0.$$

Por tanto

$$\chi(\mathscr{L}(D + p)) = \chi(\mathscr{L}(D)) + \chi(\mathscr{O}_x).$$

Ahora, $\chi(\mathscr{O}_x) = \dim H^0(X, \mathscr{O}_x) = 1$ y, por la hipótesis de inducción $\chi(\mathscr{L}(D)) = \chi(\mathscr{L}) + \deg D$, de modo que

$$\chi(\mathscr{L}(D + p)) = \chi(\mathscr{L}) + \deg D + 1 = \chi(\mathscr{L}) + \deg(D + x).$$

Análogamente, si en vez de multiplicar por $\mathscr{L}(D + p)$ multiplicamos por $\mathscr{L}(D)$, obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}(D - x) \longrightarrow \mathscr{L}(D) \longrightarrow \mathscr{O}_x \longrightarrow 0,$$

de modo que

$$\chi(\mathscr{L}(D - x)) = \chi(\mathscr{L}(D)) - \chi(\mathscr{O}_x) = \chi(\mathscr{L}) + \deg(D) - 1 = \chi(\mathscr{L}) + \deg(D - x).$$

Proposición 7.1. *Todo fibrado de línea holomorfo $L \to X$ tiene una sección meromorfa. (En consecuencia, existe un divisor D tal que $L = L_D$).*

Demostración. Sea $\mathscr{L}$ el haz de secciones holomorfas de L. Dado cualquier divisor D en X, podemos escribir $\mathscr{L} = \mathscr{L}(D) \otimes \mathscr{O}_X(-D)$. El fibrado L_{-D} tiene una sección meromorfa, de modo que basta probar que $\mathscr{L}(D)$ tiene una sección holomorfa. Supongamos que no la tiene, entonces

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \dim H^0(X, \mathscr{L}(D)) - \dim H^1(X, \mathscr{L}(D)) = -\dim H^1(X, \mathscr{L}(D)).$$

Por la dualidad de Serre tenemos que

$$H^1(X, \mathscr{L}(D)) \cong H^0(X, (\mathscr{L}(D))^{-1} K_X)^* = H^0(X, \mathscr{L}^{-1}(-D) K_X)^*.$$

De modo que $\chi(\mathscr{L}(D)) = \dim H^0(X, \mathscr{L}^{-1}(-D) K_X)$. Ahora,

$$\deg(\mathscr{L}^{-1}(-D) K_X) = \deg(K_X) - \deg(L) - \deg(D).$$

Por tanto, si elegimos D tal que $\deg(D)$ es suficientemente grande, tenemos que $\deg(\mathscr{L}^{-1}(-D) K_X) < 0$, de modo que

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \dim H^0(X, \mathscr{L}^{-1}(-D) K_X) = 0.$$

Tenemos entonces que

$$\chi(\mathscr{L}) = -\deg D.$$

Pero esto es una contradicción porque el lado derecho depende de D y el izquierdo no. □

El teorema de Riemann–Roch muestra que la característica de Euler de un fibrado de línea holomorfo es un invariante topológico del fibrado.

Teorema 7.2 (Riemann–Roch)**.** *Si $L \to X$ es un fibrado de línea holomorfo y $\mathscr{L}$ es su haz de secciones, se cumple la siguiente igualdad*

$$\chi(\mathscr{L}) = 1 - g + \deg L.$$

Demostración. Por el resultado anterior podemos escribir $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X(D)$, para cierto divisor D en X. Tenemos entonces

$$\chi(\mathscr{L}) = \chi(\mathscr{O}_X) + \deg D = \dim H^0(X, \mathscr{O}_X) - \dim H^1(X, \mathscr{O}_X) + \deg D.$$

Ahora, $\dim H^0(X, \mathscr{O}_X) = 1$ y, por la dualidad de Serre,

$$\dim H^1(X, \mathscr{O}_X) = \dim H^0(X, K_X) = g.$$

Tenemos entonces, $\chi(\mathscr{L}) = 1 - g + \deg D = 1 - g + \deg L$. □

8. Curvas algebraicas