FIBRACIÓN DE HITCHIN Y CONJETURA P=W

GUILLERMO GALLEGO

En estas notas vamos a enunciar la conjetura $P = W$ (de Cataldo-Hausel-Migliorini, 2010), demostrada en 2022 por Maulik-Shen y por Hausel-Mellit-Minets-Schiffman de forma independiente. Para ello, introducimos los espacios de móduli de Dolbeault y de Betti (con grupo GL_n, y grado d coprimo con n), así como la fibración de Hitchin. Damos también un esbozo de las líneas generales de la demostración de Maulik-Shen. Estas notas están basadas en una charla impartida el 14 de noviembre de 2022 por Jun-Lian Shen en la University of Illinois at Chicago, a la que asistí personalmete.

1. Introducción

Sea C una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$, sea n un número natural (el *rango*) y d un número entero coprimo con n (el *grado*). A estos datos se les puede asociar dos espacios de móduli diferentes:

1. El *espacio de móduli de Dolbeault* $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}$, que parametriza *fibrados de Higgs estables* de rango n y grado d. Este espacio de móduli es una variedad quasiproyectiva lisa, con una fibración propia sobre un espacio afín (la *fibración de Hitchin*). Su anillo de cohomología $H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}, \mathbb{Q})$ está equipado de una filtración P, denominada la *filtración perversa*.
2. El *espacio de móduli de Betti* $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}$, que parametriza ciertas representaciones del grupo fundamental de la superficie C agujereada en un punto p. Este espacio es por tanto una *variedad de caracteres*. En particular, es una variedad afín lisa. Por tanto, su anillo de cohomología $H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{B}}, \mathbb{Q})$ tiene una estructura de Hodge mixta, y está equipado con una filtración W, denominada la *filtración de pesos*.

La *correspondencia de Hodge no abeliana* (Corlette, Donaldson, Hitchin, Simpson), implica que existe un difeomorfismo

$$\mathrm{NAH} : \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\mathrm{B}}.$$

En particular, esto induce un isomorfismo en los anillos de cohomología

$$\mathrm{NAH} : H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{B}}, \mathbb{Q}).$$

Teorema 1 ($P = W$). *Para todo k, se tiene*

$$\mathrm{NAH}(P_k H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}, \mathbb{Q})) = W_{2k} H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{B}}, \mathbb{Q}).$$

2. Filtraciones

Estructuras de Hodge mixtas. Sea U una variedad algebraica lisa sobre $\mathbb{C}$ que admite una *buena compactificación*. Esto significa que existe una variedad proyectiva X con una inmersión abierta Zariski $j : U \hookrightarrow X$ y de forma que el complemento $D = X \setminus U$ es un divisor con intersecciones normales simple. En particular, si U es afín, entonces admite una buena compactificación.

Para una U con estas propiedades se puede determinar una *estructura de Hodge mixta* en su cohomología singular $H^m(U, \mathbb{C})$, de la siguiente forma. En primer lugar, para cada m, se considera el haz $\Omega^m_X(\log D)$ de las m-formas diferenciales α en U tales que α y $d\alpha$ tienen a lo

Date: Charla impartida en el seminario de haces perversos de la UCM, el 6 de marzo de 2025.

sumo un polo de orden 1 a lo largo de D. Se sigue que $\Omega_X^\bullet(\log D)$ determina un subcomplejo de $j_*\Omega_U^\bullet$, denominado el *complejo de de Rham logarítmico*. Se tiene lo siguiente:

1. $H^m(U,\mathbb{C}) = \mathbb{H}^m(X,\Omega_X^\bullet(\log D))$.
2. La filtración W definida como
$$W_k\Omega_X^m(\log D)\begin{cases}0 & \text{for } k<0,\\ \Omega_X^m(\log D) & \text{for } k\geq m,\\ \Omega_X^{m-k}\wedge\Omega_X^m(\log D) & \text{for } 0\leq k\leq m,\end{cases}$$
induce una filtración en cohomología
$$W_kH^m(U,\mathbb{C}) = \mathrm{im}[\mathbb{H}^k(U,W_{k-m}\Omega_X^\bullet(\log D))\to H^k(U,\mathbb{C})].$$
Además, esta filtración se puede definir sobre los números racionales. Es decir, induce una filtración
$$W_kH^m(U,\mathbb{Q}) = \mathrm{im}[\mathbb{H}^k(U,W_{k-m}\Omega_X^\bullet(\log D))\to H^k(U,\mathbb{Q})].$$
Esta filtración se denomina la *filtración de pesos.*
3. La filtración trivial F en $\Omega_X^\bullet(\log D)$, dada por el truncamiento «estúpido»
$$F^k\Omega_X^\bullet(\log D) = \sigma^{\geq k}\Omega_X^\bullet(\log D),$$
que induce la *filtración de Hodge*
$$F^kH^m(U,\mathbb{C}) = \mathrm{im}[\mathbb{H}^m(X,F^k\Omega_X^\bullet(\log D))\to H^k(U,\mathbb{C})].$$

Combinando la filtración de Hodge con la filtración de pesos, definimos el *subespacio de Hodge*
$${}^k\mathrm{Hdg}^m(U) = W_{2k}H^m(U,\mathbb{Q})\cap F^kH^m(U,\mathbb{C})\subset H^m(U,\mathbb{Q}).$$

La filtración perversa. Por otra parte, supongamos que $f : X\to Y$ es un morfismo propio entre variedades quasiproyectivas lisas. Supongamos que las fibras de f son equidimensionales. Existe una filtración
$$P_0H^m(X,\mathbb{Q})\subset\cdots\subset P_kH^m(X,\mathbb{Q})\subset P_{k+1}H^m(X,\mathbb{Q})\subset\cdots\subset H^m(X,\mathbb{Q}),$$
definida como
$$P_kH^m(X,\mathbb{Q}) = \mathrm{im}[\mathbb{H}^m(Y,{}^{\mathrm{p}}\tau_{\leq k}(Rf_*\mathbb{Q}_X))\to\mathbb{H}^m(Y,Rf_*\mathbb{Q}_X) = H^m(X,\mathbb{Q})],$$
donde ${}^{\mathrm{p}}\tau_{\leq k}$ es el functor de truncación perverso.

En el caso en el que estamos interesados, la filtración perversa admite una descripción más sencilla. En efecto, es un resultado de de Cataldo y Migliorini (2010) que, cuando $Y=\mathbb{C}^N$ es un espacio afín, se puede tomar una bandera genérica $\mathbb{C}^N = Y\supset Y_{N-1}\supset Y_{N-2}\supset\cdots\supset Y_0$, donde cada $Y_i\subset\mathbb{C}^N$ es un subespacio afín de dimensión i, de forma que tenemos
$$P_kH^{k+i}(X,\mathbb{Q}) = \ker[H^{k+i}(X,\mathbb{Q})\to\mathbb{H}^{k+i}(Y_{i-1},(Rf_*\mathbb{Q}_X)|_{Y_{i-1}})].$$

3. Espacios de móduli

Fibrados de Higgs. Un *fibrado de Higgs* sobre C es un par (E,φ) formado por

- un fibrado vectorial holomorfo $E\to C$,
- una aplicación $\mathcal{O}_C$-lineal $\varphi : E\to E\otimes K_C$,

donde $p : K_C\to C$ es el fibrado de línea canónico de C (es decir, $K_C = \Omega_C^1$ es el fibrado cotangente holomorfo).

Idea. Se trata de entender φ localmente como una matriz cuyas entradas son 1-formas holomorfas de C.

Ejemplo. Sea $K_C^{1/2}$ una raíz cuadrada del fibrado canónico K_C (esto se conoce como una θ-característica o estructura de spin) y tomemos una sección $a \in H^0(C, K_C^{1/2})$. Podemos tomar $E = K_C^{1/2} \oplus K_C^{1/2}$, y escribir

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estabilidad. Se dice que un fibrado de Higgs (E, φ) es *estable* si, para todo subfibrado $V \subset E$ que sea φ-invariante (es decir, $\varphi(V) \subset V \otimes K_C$), se tiene la desigualdad

$$\frac{\deg V}{\mathrm{rk} V} < \frac{\deg E}{\mathrm{rk} E}.$$

Por definición

$$\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}} = \{\text{fibrados de Higgs } (E, \varphi) \text{ estables y con } \mathrm{rk}(E) = n, \deg(E) = d\} \,/\, \text{isomorfismo}.$$

Observación. Recordamos que el *grado* de un fibrado vectorial $E \to C$ se define como el grado de su determinante o, equivalentemente como el resultado de la integral

$$\deg(E) = \int_C c_1(E),$$

donde $c_1(E) \in H^2_{\mathrm{dR}}(C)$ es la primera *clase de Chern* de E.

Estructura simpléctica. Un argumento sencillo de teoría de deformación, junto con la dualidad de Serre, implica que $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}$ incluye como subvariedad abierta al fibrado cotangente $T^*\mathcal{N}_{n,d}$, donde $\mathcal{N}_{n,d}$ es el espacio de móduli de fibrados holomorfos de rango n y grado d. En particular, esto implica que $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}$ tiene de forma natural una estructura simpléctica holomorfa.

La fibración de Hitchin. El fibrado canónico $p : K_C \to C$ tiene una sección tautológica $\lambda \in H^0(K_C, p^*K_C)$. Dado un fibrado de Higgs (E, φ) podemos tomar su *polinomio característico*

$$\det(\lambda \mathbb{I}_n - p^*\varphi) = \lambda^n + p^*\chi_1(\varphi)\lambda^{n-1} + \cdots + p^*\chi_{n-1}(\varphi)\lambda + p^*\chi_n(\varphi) \in H^0(K_C, p^*K_C^n),$$

donde los coeficientes $\chi_i(\varphi)$ son secciones

$$\chi_i(\varphi) = (-1)^i \mathrm{tr}(\wedge^i \varphi) \in H^0(C, K_C^i).$$

Definimos la *base de Hitchin* como el espacio afín

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} H^0(C, K_C^i)$$

y la aplicación de Hitchin

$$\begin{aligned} h : \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ [E, \varphi] &\longmapsto (\chi_1(\varphi), \ldots, \chi_n(\varphi)). \end{aligned}$$

Teorema 2 (Hitchin). *La fibración $h : \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}} \to \mathcal{A}$ es un sistema integrable. Es decir*

- $\dim \mathcal{A} = \frac{1}{2} \dim \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}$,
- *las fibras genéricas $h^{-1}(a)$ son subvariedades lagrangianas,*
- *las fibras genéricas $h^{-1}(a)$ son variedades abelianas.*

Idea. La idea de la demostración es sencilla. En primer lugar, la dimensión de $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}$ se calcula con un argumento de deformación, mientras que la de $\mathcal{A}$ se sigue del teorema de Riemann-Roch. Que las fibras son lagrangianas se sigue de que, infinitesimalmente, la fibración depende únicamente del campo de Higgs, y no del fibrado. Finalmente, se tiene la *correspondencia espectral.* A cada elemento $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}$ se le puede asociar el subesquema

$$S_a = \left\{\lambda^n + p^* a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p^* a_{n-1}\lambda + p^* a_n = 0\right\} \subset K_C,$$

que se denomina la *curva espectral*, y es un espacio recubridor ramificado $S_a \longrightarrow C$. Intuitivamente, S_a parametriza los *autovalores.* El teorema de Bertini garantiza que para a genérico se tiene que S_a es lisa. Finalmente, los *autovectores* proporcionan una correspondencia

$$h^{-1}(a) \leftrightarrow \{ \text{ fibrados de línea en } S_a \text{ de grado } d'\} \cong \mathrm{Jac}(S_a),$$

donde d' es un número que se calcula a partir de d usando el teorema de Riemann-Hurwitz y Grothendieck-Riemann-Roch.

Corolario 1. *La fibración de Hitchin $h : \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}} \longrightarrow \mathcal{A}$ es una aplicación propia.*

La filtración perversa. Se sigue que al espacio $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}$ se le puede asociar la filtración perversa $P_k H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}, \mathbb{Q})$, inducida por la fibración de Hitchin $h : \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}} \longrightarrow \mathcal{A}$.

G-fibrados de Higgs. Se pueden formular análogos de los fibrados de Higgs para otros grupos reductivos G. En particular, podemos definir un $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$-fibrado de Higgs como un fibrado de Higgs (E, φ) tal que $\det E \cong \xi$ y $\mathrm{tr}(\varphi) = 0$, donde $\xi \in \mathrm{Pic}^d(C)$ es un fibrado de línea de grado d fijado previamente. Maulik y Shen denotan por $\check{\mathcal{M}}_{\mathrm{Dol}}$ al espacio de móduli de estos pares. Por otra parte, podemos definir el espacio $\hat{\mathcal{M}}_{\mathrm{Dol}} := \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{Dol}}/\Gamma$, donde $\Gamma = \mathrm{Jac}(C)[n]$ es el grupo finito de elementos de n-torsión de la Jacobiana de C, que actúa por producto tensorial. Este espacio parametriza fibrados de Higgs con grupo de estructura $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$. En el artículo de Maulik y Shen se trabaja generalmente con $\hat{\mathcal{M}}_{\mathrm{Dol}}$, pero, por simplicidad de exposición, en estas notas nos limitamos a trabajar con $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}$.

Fibrados de Higgs meromorfos. Todas las definiciones de esta sección se pueden repetir si en vez de el fibrado canónico K_C consideramos otro fibrado de línea $L \longrightarrow C$. Cuando L^n es libre de puntos base, por el mismo argumento con el teorema de Bertini la curva espectral genérica es lisa. En particular, L^n es libre de puntos base si $L = K_C$ o si $\deg L \geq 2g$. Es especialmente interesante el caso en que $L = K_C(D)$, donde D es un divisor efectivo. Los pares resultantes se denominan *fibrados de Higgs meromorfos.* Cabe mencionar que en su famoso artículo de 2010, Ngô asume que $\deg L \geq 2g$, y es para estos "fibrados de Higgs twisteados"para los que Ngô demuestra el teorema de soporte. En cualquier caso, es importante tener en cuenta que el caso $L = K_C$ es el más importante, porque precisamente es para esta elección de fibrado de línea para la que los pares resultantes corresponden a representaciones del grupo fundamental.

Representaciones del grupo fundamental. Fijemos ahora un punto $p_0 \in C$ y un pequeño disco D en C centrado en p_0. Tomemos un punto $p_1 \in \partial D$, y fijemos también un generador $\sigma \in \pi_1(\partial D, p_1)$. El espacio de móduli de Betti $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}$ parametriza clases de conjugación de representaciones del grupo fundamental $\pi_1(C \setminus \{p_0\}, p_1)$ en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ con la condición de que la clase del lazo σ se envía a la matriz $e^{2\pi i d/n}\mathbb{I}_n$. En otras palabras, podemos considerar la variedad de representaciones

$$\mathcal{R} = \left\{(A_1, A_2, \dots, A_g, B_1, B_2, \dots, B_g) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^{2g} : [A_1, B_1][A_2, B_2] \cdots [A_g, B_g] = e^{2\pi i d/n}\mathbb{I}_n\right\}.$$

Esta variedad es una variedad afín, y $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ actúa en ella por conjugación, de modo que podemos considerar el cociente GIT

$$\mathcal{M}_{\mathrm{B}} = \mathcal{R} /\!\!/ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathcal{R}]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}).$$

El espacio $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}$ es por tanto también una variedad afín lisa, de modo que tiene asociada una estructura de Hodge mixta interesante, que da lugar a la filtración de pesos $W_k H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{B}}, \mathbb{Q})$. También será de interés considerar la filtración de Hodge $F^k H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{B}}, \mathbb{C})$, y el subespacio de Hodge ${}^k\mathrm{Hdg}^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{B}}) = W_{2k} H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{B}}, \mathbb{Q}) \cap F^k H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{B}}, \mathbb{C}) \subset H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{B}}, \mathbb{Q})$.

El caso de rango 1 y grado 0. En este caso, la conjetura $P = W$ es trivial. En efecto, para $n = 1$ y $d = 0$, el espacio de móduli de Dolbeault es exactamente el fibrado cotangente (holomorfo) de la jacobiana de C, $\mathrm{Jac}(C) = \mathcal{N}_{1,0}$, que parametriza los fibrados de línea holomorfos de grado 0 en C. De la teoría de Hodge (abeliana) se sabe que $\mathrm{Jac}(C)$ es una variedad abeliana de dimensión g. Por tanto,

$$\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}} = T^*\mathrm{Jac}(C) = \mathrm{Jac}(C) \times H^0(C, K_C).$$

En este caso, $\mathcal{A} = H^0(C, K_C)$, y la fibración de Hitchin es simplemente la proyección a la segunda componente. Por otra parte,

$$\mathcal{M}_{\mathrm{B}} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(\pi_1(C), \mathbb{C}^*) = (\mathbb{C}^*)^{2g}.$$

Fijando una base de la cohomología singular $H^1(C, \mathbb{Z})$, obtenemos un difeomorfismo

$$\mathrm{Jac}(C) \cong \mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g} = (S^1)^{2g},$$

de modo que $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}$ es difeomorfo al cilindro $(S^1)^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}$, que a su vez es naturalmente difeomorfo a $\mathcal{M}_{\mathrm{B}} = (\mathbb{C}^*)^{2g}$. En este caso, tenemos

$$P_k = \bigoplus_{i \leq k} H^i(\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{i \leq k} H^i(\mathcal{M}_{\mathrm{B}}, \mathbb{Q}) = W_{2k}.$$

La moraleja. Hemos visto que $P = W$ es trivial en rango 1. Esto se debe a que la frontera de $(\mathbb{C}^*)^{2g}$ es muy sencilla, por una parte, y, por otra parte, a que todas las fibras de Hitchin en este caso son lisas. En general, la situación es mucho más complicada: la variedad de caracteres es un objeto complicado, y el estudio de su frontera es altamente no trivial; a su vez, la estructura de las fibras singulares de la fibración de Hitchin es también muy complicada. La filtración de pesos W en cierto modo «detecta» la complejidad de la frontera de $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}$, mientras que la filtración perversa P «detecta» la complejidad de las fibras de Hitchin singulares.

4. Líneas generales de la demostración

Paso 0. Estructuras cohomológicas. Sobre el producto $C \times \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}$, se puede definir el *fibrado de Higgs universal* $\mathcal{U}$, determinado por la relación

$$\mathcal{U}|_{C \times \{[E, \varphi]\}} = (E, \varphi).$$

Este fibrado tiene unos caracteres de Chern $\mathrm{ch}_k(\mathcal{U}) \in H^{2k}(C \times \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}, \mathbb{Q})$, $k \geq 2$. Si fijamos una clase de cohomología $\gamma \in H^\bullet(C, \mathbb{Q})$, podemos definir su *clase tautológica*

$$c_k(\gamma) := \int_\gamma c_k(\mathcal{U}) = \mathrm{pr}_{\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}},*}(\mathrm{pr}_C^* \gamma \cup \mathrm{ch}_k(\mathcal{U})) \in H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}, \mathbb{Q}).$$

Se tiene el siguiente resultado

Teorema 3 (Markman (2000), Shende (2014)). *Las clases tautológicas $c_k(\gamma)$ generan el espacio $H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}, \mathbb{Q})$ como $\mathbb{Q}$-álgebra. Además, para todo $\gamma \in H^\bullet(C, \mathbb{Q})$, se tiene*

$$\mathrm{NAH}(c_k(\gamma)) \in {}^k\mathrm{Hdg}^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{B}}).$$

El siguiente resultado es una consecuencia sencilla del teorema difícil de Lefschetz «curioso», probado por Mellit.

Teorema 4 (Mellit). *Si $W_{2k} \subset \mathrm{NAH}(P_k)$ para todo k, entonces $W_{2k} = \mathrm{NAH}(P_k)$ para todo k.*

Esto nos permite reducir el teorema $P = W$ al siguiente enunciado.

Teorema 5 ($P = W$, versión equivalente). *Para cualquier producto de clases tautológicas, se tiene*

$$\prod_{i=1}^{s} c_{k_i}(\gamma_i) \in P_{\sum_i k_i} H^\bullet(\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}, \mathbb{Q}).$$

Observación. Nótese que hemos reducido el enunciado de la conjetura $P = W$ a un enunciado que depende únicamente del espacio de móduli de Dolbeault $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}$.

Paso 1. Hacificación. El primer paso consiste en convertir la afirmación anterior en un enunciado sobre haces. Recordemos que podemos ver una clase de cohomología $\alpha \in H^m(X, \mathbb{Q})$ como una aplicación

$$\alpha : \mathbb{Q}_X \longrightarrow \mathbb{Q}_X[m].$$

Ahora, dada una aplicación $f : X \to Y$, obtenemos un morfismo inducido

$$\alpha : Rf_*\mathbb{Q}_X \longrightarrow Rf_*\mathbb{Q}_X[m].$$

Por tanto, podemos ver los caracteres de Chern $\mathrm{ch}_k(\mathcal{U}) \in H^{2k}(C \times \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}, \mathbb{Q})$ como morfismos

$$\mathrm{ch}_k(\mathcal{U}) : Rh_*\mathbb{Q}_{C\times\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}} \longrightarrow Rh_*\mathbb{Q}_{C\times\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}}[2k].$$

Aquí, en un abuso de notación estamos escribiendo $h = (\mathrm{id}_C, h) : C \times \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}} \to C \times \mathcal{A}$. La afirmación sobre las clases tautológicas corresponde precisamente a que este morfismo envíe la truncación perversa ${}^{\mathrm{p}}\tau_{\leq i}$ a ${}^{\mathrm{p}}\tau_{\leq(i-k)}$. Es decir, tenemos lo siguiente.

Teorema 6 ($P = W$, versión equivalente hacificada). *Para todo k, se tiene*

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}_k(\mathcal{U}) : Rh_*\mathbb{Q}_{C\times\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}} &\longrightarrow Rh_*\mathbb{Q}_{C\times\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}}[2k] \\ {}^{\mathrm{p}}\tau_{\leq i} &\longmapsto {}^{\mathrm{p}}\tau_{\leq(i-k)}. \end{aligned}$$

Cuando una clase de cohomología cumple la propiedad anterior, se dice que tiene *perversidad fuerte* igual a k con respecto a h.

Paso 2. Reducción al caso meromorfo. El segundo paso consiste en utilizar un argumento de ciclos evanescentes para reducir la descripción anterior sobre el sistema de Hitchin habitual a una afirmación sobre el sistema de Hitchin para *fibrados de Higgs meromorfos*. Estos son fibrados de Higgs en los que el fibrado canónico K_C se reemplaza por un fibrado de línea L de la forma $L = K_C(D)$, donde D es un divisor efectivo. Para estos fibrados de Higgs, se puede construir un espacio de móduli $\mathcal{M}^D_{\mathrm{Dol}}$, de forma análoga, y definir estructuras similares a las de las secciones previas. El argumento con ciclos evanescentes permite reducir $P = W$ al siguiente teorema.

Teorema 7. *Existe un divisor efectivo D tal que la clase*

$$\mathrm{ch}_k(\mathcal{U}) \in H^{2k}(C \times \mathcal{M}^D_{\mathrm{Dol}}, \mathbb{Q})$$

tiene perversidad fuerte igual a k con respecto a h^D.

Paso 3. Teorema de soporte parabólico. Un *fibrado de Higgs parabólico* es una tupla de la forma (x, E, φ, E^B_x), donde (E, φ) es un fibrado de Higgs, $x \in C$ es un punto y E^B_x es una bandera completa en la fibra E_x (es decir, una reducción al subgrupo de Borel estándar $B \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) compatible con φ. Los fibrados de Higgs parabólicos también admiten un espacio de móduli $\mathcal{M}_{\mathrm{par}}$ y una fibración de Hitchin $h_{\mathrm{par}} : \mathcal{M}_{\mathrm{par}} \to C \times \mathcal{A}$, con buenas propiedades. El corazón del resultado de Maulik y Shen consiste en el siguiente teorema de soporte.

Teorema 8. *La descomposición de h_{par} tiene soporte completo, es decir, todo sumando no trivial perverso de*

$${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^i(Rh_{\mathrm{par},*}\mathbb{Q}_{\mathcal{M}_{\mathrm{par}}}), \forall i \in \mathbb{Z}$$

está soportado en $C \times \mathcal{A}$.

Paso 4. Teoría de Springer global. El teorema de soporte de Maulik y Shen puede usarse para deducir el Teorema 7, haciendo uso de varios ingredientes de la *teoría de Springer global*, desarrollada por Yun. Esta teoría es, efectivamente, un análogo global de la resolución simultánea de Grothendieck-Springer, que proporciona una suerte de resolución del espacio de móduli $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}^{D}$ de fibrados de Higgs meromorfos en términos del espacio de móduli $\mathcal{M}_{\mathrm{par}}$ de fibrados de Higgs parabólicos.

Guillermo Gallego Sánchez
Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Arnimallee 3
14195 Berlín, Alemania
Email address: guillermo.gallego.sanchez@fu-berlin.de
Página Web: https://guillegallego.xyz