Introducción a los fibrados principales

Guillermo Gallego Sánchez

Geometría de superficies topológicas

17 de diciembre de 2018

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Fibrados

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Un ***fibrado*** (E, B, p, F) consta de:

- ***base***: B
- ***espacio total***: E
- ***fibra***: F
- $p : E \to B$ aplicación continua tal que $\forall x \in B\ \exists U^x$ y una ***trivialización***

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Ejemplos

- El ***fibrado trivial***:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & B \times F \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & B \end{tikzcd}$$

- La ***cinta de Moebius***:

$$\begin{tikzcd} (0,1) \arrow[r] & E \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & \mathbb{S}^1, \end{tikzcd}$$

con $E = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in (0, 1)\} / (x, y) \sim (x + 1, 1 - y)$ y $p : E \to \mathbb{S}^1$, viendo la base como $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}\} / x \sim x + 1$.

Funciones de transición

$E \to B$ fibrado, $x \in B$, U^x, V^x.

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \times F \arrow[r, "\varphi_U^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & p^{-1}(U \cap V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "p"] & U \cap V \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U \cap V &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : (U \cap V) \times F &\longrightarrow (U \cap V) \times F \\
(x, y) &\longmapsto (x, \psi_{UV}(x, y))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{UV,x} : F &\longrightarrow F \\
y &\longmapsto \psi_{UV}(x, y)
\end{aligned}$$

Funciones de transición

- ***Función de transición*** entre U y V:

$$\begin{aligned} g_{UV} : U \cap V &\longrightarrow \mathrm{Homeo}(F) \\ x &\longmapsto \psi_{UV,x}. \end{aligned}$$

- Las funciones de transición cumplen la ***condición de cociclo***

$$g_{UW} = g_{VW} \circ g_{UV}.$$

  En particular, $g_{UU} = \mathrm{id}$ y $g_{UV} = g_{VU}^{-1}$.

- Con estructura adicional en las funciones de transición obtenemos otro tipo de fibrados (por ejemplo, fibrados vectoriales $\rightsquigarrow$ matrices de transición).

Isomorfismo de fibrados

$p : E \to B$, $p' : E \to B'$ fibrados con fibra F.
Un ***isomorfismo de fibrados*** entre $p : E \to B$ y $p : E' \to B'$ es un par de homeomorfismos $(f, \tilde{f})$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\
B' \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta.
Las funciones de transición se relacionan por

$$g'_{U'V'} = f^{-1}_{VV'} \circ g_{UV} \circ f_{UU'},$$

con $f_{UU'} : U' \to \mathrm{Homeo}(F)$.

Obtención del fibrado desde las funciones de transición

$\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de B, $G < \mathrm{Homeo}(F)$ y $\{g_{UV} : U \cap V \to G : U, V \in \mathcal{U}\}$ conjunto de funciones de transición de un fibrado $E \to B$.
Entonces $E \to B$ es isomorfo al fibrado $E' \to B$ con

- espacio total
$$E' = \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} (U \times F)/(x, y) \sim (x, g_{UV}(x)(y))$$
- la proyección
$$\begin{aligned} p : E' &\longrightarrow B \\ [(x, y)] &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Fibrados y cohomología de Čech

$\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de B. $G < \text{Homeo}(F)$.

- Un conjunto de funciones $\{g_{UV} : U \cap V \to G : U, V \in \mathcal{U}\}$ es: un 1-***cociclo de Čech subordinado a $\mathcal{U}$ con coeficientes en*** G si

$$g_{UW} = g_{VW} \circ g_{UV},$$

- Se llama ***primer grupo de cohomología de Čech subordinado a $\mathcal{U}$ con coeficientes en*** G al cociente

$$\check{H}(\mathcal{U}, G) = \{1\text{-cociclos}\} / g_{UV} \sim (f_{VV'}^{-1} \circ g_{UV} \circ f_{UU'}).$$

- Tomando el límite directo por refinamiento del recubrimiento, tenemos el ***primer grupo de cohomología de Čech con coeficientes en*** G

$$\check{H}^1(B, G) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}, G).$$

Secciones

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"'] \\ & B \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

Una ***sección*** de un fibrado $p : E \to B$ es una aplicación continua $s : B \to E$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_B$.
Una sección local es una sección definida en un abierto $U \subset B$.
Denotamos $\Gamma(E)$ al conjunto de las secciones de $E \to B$ y $\Gamma(U, E)$ al conjunto de las secciones locales definidas en un abierto $U \subset B$.

Fibrados principales

Un ***fibrado principal*** (P, B, p, G) consta de:

- una variedad diferenciable P,
- un grupo de Lie G actuando libremente por la derecha sobre P:

$$\begin{aligned} P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto p \cdot g, \end{aligned}$$

- $B = P/G$ con una sumersión $p : P \to P/G$, que es la proyección canónica al cociente y tal que $\forall x \in B\ \exists U^x$ y una trivialización

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times G \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}.$$

Además, $\varphi_U(y) = (p(y), g_U(y))$ para cierta $g_U : p^{-1}(U) \to G$ con $g_U(y \cdot g) = g_U(y) \cdot g$.

Observaciones

- Podemos pensar en un fibrado principal como en un fibrado sobre una variedad diferenciable cuya fibra es un grupo de Lie. En efecto, para cada sección local $s_U : U \to P$ y para cada $y \in p^{-1}(x)$ existe un único elemento $g_U(y) \in G$ con $y = s_U(x)g_U(y)$.
- Las funciones de transición son de la forma

$$\begin{aligned} U \cap V \times G &\longrightarrow U \cap V \times G \\ (x, h) &\longmapsto (x, g_{UV}(x)h). \end{aligned}$$

- Un fibrado principal admite una sección global si y sólo si es trivial.

Ejemplos

- $P = B = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ y
$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$
Fibra $\mathbb{Z}_2$ con la acción
$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, \pm 1) &\longmapsto \pm z. \end{aligned}$$

- $p : \tilde{M} \to M$ recubridor universal.
Fibra $\pi_1(M)$ con la acción de monodromía:
$$\begin{aligned} \tilde{M} \times \pi_1(M) &\longrightarrow \tilde{M} \\ (y, g) &\longmapsto \tilde{\gamma}_g^y(1). \end{aligned}$$

Fibrado de referencias

El ***fibrado de referencias*** sobre una variedad diferenciable M tiene por espacio total

$$L(M) = \{\psi_x : \mathbb{R}^n \to T_xM : x \in M,\ \psi_x \text{ es un isomorfismo lineal}\}$$

con la aplicación

$$\begin{aligned} p : L(M) &\longrightarrow M \\ \psi_x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Su fibra es $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, con la acción

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\ A\ } \mathbb{R}^n \xrightarrow{\ \psi_x\ } T_xM.$$

Conexiones en fibrados principales

$p : P \longrightarrow B$ con fibra G. $x \in B$ $y \in p^{-1}(x)$.

- ***Subespacio vertical***: $V_y = \ker p_* \subset T_y Y$.
- ***Campo vertical***: $X_y \in V_y$ $\forall y \in P$. El corchete de Lie de campos verticales es vertical.
- $V \subset TP$ es G-***invariante***: $\forall g \in G$, $R_{g,*} V_y = V_{y \cdot g}$.
- Una ***conexión*** en P es $H \subset V$, G-invariante y tal que $TP = V \oplus H$.

El campo fundamental

$$\begin{aligned} \sigma : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(P) \\ \xi &\longmapsto \sigma(\xi). \end{aligned}$$

Este $\sigma(\xi)$ se llama ***campo fundamental*** y su valor es

$$\sigma_y(\xi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (y \cdot \exp(t\xi)).$$

- $p_*\sigma_y(\xi) = 0$, luego $\sigma(\xi)$ es un campo vertical.
- $\xi \mapsto \sigma_y(\xi)$ es un isomorfismo.

La 1-forma de conexión

La 1-***forma de conexión*** de una conexión $H \subset TP$ es $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ definida por

$$\omega(Y) = \begin{cases} \xi & \text{si } Y = \sigma(\xi), \\ 0 & \text{si } Y \text{ es horizontal.} \end{cases}$$

Propiedades:

- $H = \ker \omega$
- $R_g^* \omega = \mathrm{ad}_{g^{-1}} \circ \omega.$

Conexiones como campos gauge

$\mathcal{U}$ recubrimiento de B por abiertos trivializantes y $\left\{s_U : U \to p^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\right\}$ familia de secciones locales. El ***campo gauge*** asociado a una 1-forma de conexión $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$ es

$$\left\{A_U = s_U^*\omega \in \Omega^1(U;\mathfrak{g}) : U \in \mathcal{U}\right\}.$$

Se cumple:

$$\omega|_{p^{-1}(U)} = \mathrm{ad}_{g_U^{-1}} \circ p^* A_U + g_U^*\theta,$$

con $\theta \in \Omega^1(G;\mathfrak{g})$ la 1-***forma de Maurer-Cartan***, definida por $\theta_g = (L_{g^{-1}})_*$.
Además,

$$A_U = \mathrm{ad}_{g_{UV}} \circ A_V + g_{VU}^*\theta.$$

Curvatura

$p : P \to B$ fibrado principal, ω 1-forma de conexión.
Cualquier vector $Y_y \in T_yP$ se descompone como $Y_y = Y_y^v + Y_y^h$.
La ***curvatura*** de la conexión definida por ω es la 2-forma $\Omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$ definida por

$$\Omega(Y_y, Z_y) = d\omega(Y_y^h, Z_y^h).$$

Interpretación geométrica:

$$\Omega(Y, Z) = Y^h\omega(Z^h) - Z^h\omega(Y^h) - \omega([Y^h, Z^h]) = -\omega([Y^h, Z^h]),$$

luego Ω se anula $\Leftrightarrow$ $[Y^h, Z^h]$ es horizontal.
Propiedades:

- $\Omega = d\omega + [\omega, \omega]$ (Ecuación de estructura)
- $d\Omega(Y^h, Z^h, W^h) = 0$ (Identidad de Bianchi)

Curvatura como fuerza de campo gauge

$\mathcal{U}$ recubrimiento de B por abiertos trivializantes y $\left\{s_U : U \to p^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\right\}$ familia de secciones locales. La ***fuerza de campo gauge*** asociada a la curvatura $\Omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$ de una 1-forma de conexión $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ es

$$\left\{F_U = s_U^* \Omega \in \Omega^2(U; \mathfrak{g}) : U \in \mathcal{U}\right\}.$$

Propiedades:

- $F_U = dA_U + [A_U, A_U]$ (de la ecuación de estructura)
- $F_U = \mathrm{ad}_{g_{UV}} \circ F_V$.

Fibrados asociados

$p : P \to B$ fibrado principal con fibra G que actúa sobre F por la izquierda.
Se define el ***fibrado asociado*** $P \times_G F$ como el cociente $(P \times F)/G$ por la acción

$$\begin{aligned} (P \times F) \times G &\longrightarrow P \times F \\ ((y, f), g) &\longmapsto (y \cdot g, g^{-1} \cdot f), \end{aligned}$$

con la aplicación

$$\begin{aligned} p_F : P \times_G F &\longrightarrow B \\ [(y, f)] &\longmapsto p(y). \end{aligned}$$

Ejemplos

- $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Se obtiene la banda de Moebius con la acción $(f, \pm 1) \mapsto \pm f$ y el cilindro con la acción trivial.
- M variedad diferenciable y $L(M) \to M$ el fibrado de referencias. Hay un isomorfismo

$$\begin{aligned} L(M) \times_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n &\longrightarrow TM \\ [(\psi, \mathbf{v})] &\longmapsto \psi(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

- $E \rightsquigarrow P(E)$, $E \cong P(E) \times_G F$.

Fibrado adjunto y curvatura

- Se llama ***fibrado adjunto*** de un G-fibrado principal $P \to B$ al fibrado $\mathrm{ad}\, P = P \times_G \mathfrak{g}$, donde el cociente se realiza por la acción dada por la representación adjunta $\mathrm{ad}\ : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.
- El fibrado adjunto permite ver la curvatura de una conexión como una 2-forma definida sobre la base: Si tenemos una conexión en P con curvatura Ω podemos definir $\tilde{\Omega} \in \Omega(B, \mathrm{ad}\ P)$ como

$$\tilde{\Omega}_x(X_x, Y_x) = [(y, \Omega_y(X_y^h, Y_y^h))],$$

con X_y^h, Y_y^h los levantamientos horizontales: $X_y^h \in H_y$ único tal que $p_*(X_y^h) = X_x$, $x = p(y)$.

Clases características

Buscamos una generalización del teorema de Gauss-Bonnet:

$$\int_M K v_g = 2\pi\chi(M).$$

$$\underbrace{\int_M K v_g}_{\text{Geometría}} = \underbrace{2\pi\chi(M)}_{\text{Topología}}.$$

Clases características

En primer lugar buscamos algo que se pueda integrar en toda la variedad:

1. Fijamos un fibrado principal $P \to M$ y una conexión en P. Consideramos la curvatura $\tilde{\Omega} \in \Omega^2(M; \operatorname{ad} P)$.
2. Si $n = 2k$ podemos tomar $\Omega \wedge \overset{(k)}{\cdots} \wedge \Omega$, que se podría integrar en M si tuviera valores reales.
3. Por tanto, vamos a buscar funciones $f : \operatorname{ad} P \to \mathbb{R}$.

Clases características

- $S^k(\mathfrak{g}) = \left\{ f : \mathfrak{g} \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \text{ multilineales y simétricas.} \right\}$
- Llamo $\mathbb{R}[\mathfrak{g}]_k$, ***polinomios homogéneos*** a funciones $F : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ tales que, fijado un isomorfismo $\mathfrak{g} \to \mathbb{R}^m$, el polinomio $F(\mathrm{x}^1, \ldots, \mathrm{x}^m)$ dado por

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "F"] \arrow[dr] & \mathbb{R} \\ & \mathbb{R}^m \arrow[u, "F(\mathrm{x}^1,\ldots,\mathrm{x}^m)"'] \end{tikzcd}$$

  es homogéneo. Hay una biyección $S^k(\mathfrak{g}) \leftrightarrow \mathbb{R}[\mathfrak{g}]_k$.
- Llamo $I^k(\mathfrak{g}) \subset S^k(\mathfrak{g})$, ***polinomios invariantes*** a las $f \in S^k(\mathfrak{g})$ tales que

$$f(\mathrm{ad}_g \xi_1, \ldots, \mathrm{ad}_g \xi_k) = f(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Clases características

Teorema (Construcción de Weil de las clases características)

Sea $p : P \to B$ un fibrado principal con fibra G, ω una 1-forma de conexión en P con curvatura Ω y $f \in I^k(\mathfrak{g})$. La $2k$-forma $f(\Omega \wedge \overset{(k)}{\cdots} \wedge \Omega)$ en P definida por

$$f(\Omega \wedge \overset{(k)}{\cdots} \wedge \Omega)(Y_1, \ldots, Y_{2k}) =$$
$$= \frac{1}{2k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}} (-1)^\sigma f(\Omega(Y_{\sigma(1)}, Y_{\sigma(2)}), \ldots, \Omega(Y_{\sigma(2k-1)}, Y_{\sigma(2k)}))$$

tiene las siguientes propiedades:

1. *Se puede proyectar (es la pullback por p de una $2k$-forma en B).*
2. *Es cerrada.*
3. *La clase de cohomología de su proyección en B no depende de la elección de la conexión ω. Esta clase se llama la **clase característica del fibrado** $P \to B$ **asociada a** f.*

Ejemplo: Fibrados $U(1)$

$\mathbb{S}^2$ y U_N, U_S los hemisferios norte y sur.
Consideramos un fibrado principal $U(1)$ dado por la función de transición

$$U_N \cap U_S \xrightarrow{\psi} U(1)$$

$$\begin{tikzcd}
U_N \cap U_S \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\sim"] & U(1) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathbb{S}^1 \arrow[r] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U_N \cap U_S \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\sim"] & U(1) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathbb{S}^1 \arrow[r] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: Fibrados $U(1)$

Consideramos la conexión definida por un campo gauge A de la forma

- en U_N, $A_N = 0$,
- en $U_N \cap U_S$, $A_S = \psi A_N + \psi d\psi = \psi d\psi$ y lo extendemos de cualquier manera a todo U_S.

La curvatura es $F = dA + [A, A] = dA$. Como $U(1)$ es abeliano, todos los polinomios son invariantes y puedo escoger $p(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{x}$. Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^2} p(\Omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{U_S} dA_S = \frac{1}{2\pi}\int_{U_N\cap U_S} A_S|_{U_N\cap U_S} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{U_N\cap U_S}\psi d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k\phi d\phi = k.\end{aligned}$$

Referencias

M. Castrillón and V. Muñoz.
"Bundles", 2011.
Lecture notes at Universidad Complutense de Madrid.

J. M. Figueroa-O'Farrill.
"Gauge Theory", 2006.
Lecture notes at University of Edinburgh.

S. Kobayashi and K. Nomizu.
Foundations of differential geometry, volume 2.
Interscience Publishers New York, 1963.

J. M. Lee.
Introduction to Smooth Manifolds.
Springer, 2003.

M. Nakahara.
Geometry, topology and physics.
CRC Press, 2003.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID