FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Probabilidad

Se realiza un experimento (por ejemplo, se tira una moneda)

Se considera el conjunto de los resultados posibles:

$\Omega \leftarrow$ Espacio muestral

(Ej. $\Omega = \{\text{"cara"}, \text{"cruz"}\}$)

Se considera el conjunto de subconjuntos de. Ω: $\mathcal{P}(\Omega)$

(Ej. $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{\text{"cara"}\}, \{\text{"cruz"}\}, \{\text{"cara"}, \text{"cruz"}\}\}$)

Este conjunto se conoce como el álgebra de sucesos del experimento

Operaciones en $\mathcal{P}(\Omega)$:

$A \subset \Omega$

$B \subset \Omega$ $\quad (A, B \in \mathcal{P}(\Omega))$

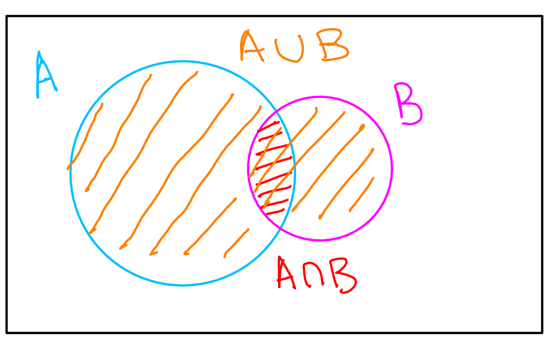
(subconjunto)

UNIÓN

$A \cup B$ ["sucede A o B"]

INTERSECCIÓN

$A \cap B$ ["suceden A y B"]



$C \equiv$ "cara"
$X \equiv$ "cruz"

Ejemplo Tiran 2 monedas

$$\Omega = \{(C,C), (C,X), (X,C), (X,X)\}$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \Big\{ \emptyset,\ \{(C,C)\}, \{(C,X)\}, \{(X,C)\}, \{(X,X)\},\ \{(C,C),(C,X)\}, \{(C,C),(X,C)\}, \{(C,C),(X,X)\}, \{(C,X),(X,C)\}, \{(C,X),(X,X)\}, \{(X,C),(X,X)\},$$
$$\{(C,C),(C,X),(X,C)\}, \{(C,X),(X,C),(X,X)\}, \{(C,C),(X,C),(X,X)\}, \{(C,C),(C,X),(X,X)\},\ \Omega \Big\}$$

[OBS Si $\#\Omega = n$, $\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^n$]

Ejs. $\{(X,C)\} \equiv$ Sale 1º cruz y luego cara

$\{(C,C),(C,X)\} \equiv$ Sale la 1ª cara

$\{(C,C),(C,X),(X,C)\} \equiv$ Sale una cara

A cada elemento de $\mathcal{P}(\Omega)$ se le asigna un número entre 0 y 1

$$\mathcal{P}(\Omega) \xrightarrow{\ \mathbb{P}\ } [0,1]$$
$$A \longmapsto \mathbb{P}(A)$$

que llamamos <u>probabilidad</u>.

Axiomas:

(1) $P(\emptyset)=0$ y $P(\Omega)=1$

(2) Si $A\cap B=\emptyset$, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Regla de Laplace:

Supongamos que todos los sucesos individuales son equiprobables, es decir, que todos los elementos del espacio muestral tienen la misma probabilidad de darse.

(Matemáticamente: Para cada $x\in\Omega$, $P(\{x\})=p$, $p\in[0,1]$ fijo) ← De hecho $p=\frac{1}{\#\Omega}$

Entonces, para cualquier suceso A

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}$$

$\#A$ ← SUCESOS FAVORABLES

$\#\Omega$ ← SUCESOS POSIBLES

[Claro, $P(A)=\sum_{x\in A}P(\{x\})=\sum_{x\in A}p=p\cdot\#A=\frac{\#A}{\#\Omega}$]

Ej. $P(\text{"una cara"})=P(\{(C,C),(C,X),(X,C)\})=\frac{3}{4}$

$P(\text{"la 1ª es cara"})=P(\{(C,C),(C,X)\})=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

• Sucesos independientes

Dos sucesos son independientes si el hecho de que suceda uno de ellos no afecta a la probabilidad de que suceda el otro.

En tal caso, $P(A\cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ej.

$A =$ "primera cruz" $= \{(X,C), (X,X)\}$

$B =$ "segunda cruz" $= \{(C,X), (X,X)\}$

$C =$ "dos cruces" $= \{(X,X)\}$

$P(A\cap B) = P(C) = \frac{1}{4}$

$P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(A\cap C) = P(C) = \frac{1}{4}$ $\qquad P(A)\cdot P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \leftrightarrow$ A y B independientes

$P(A\cap C) \neq P(A)\cdot P(C) \leftrightarrow$ A y C NO independientes

(para que suceda C tiene que suceder A)

• Probabilidad condicionada

En general, $P(A\cap B) \neq P(A)\cdot P(B)$

La fórmula correcta es: $P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$

Probabilidad de A condicionada a B

$$P(A|B) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Es la probabilidad de que suceda A suponiendo que B ya ha sucedido

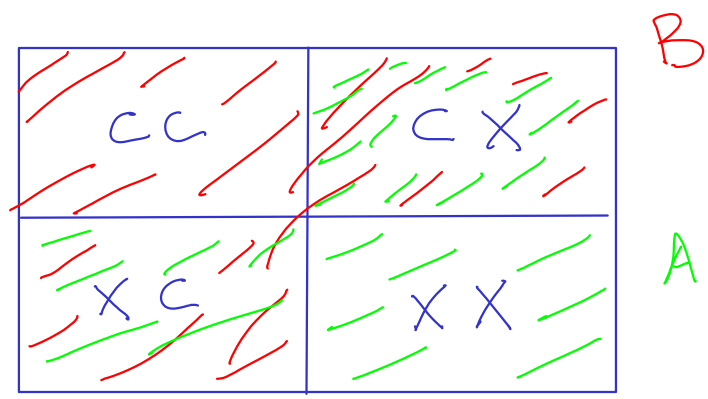
Ej.: A = "no sale doble cara" $= \{(C,X),(X,C),(X,X)\}$

B = "no sale doble cruz" $= \{(C,X),(X,C),(C,C)\}$

$$A\cap B = \{(C,X),(X,C)\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}$$

Visualmente:



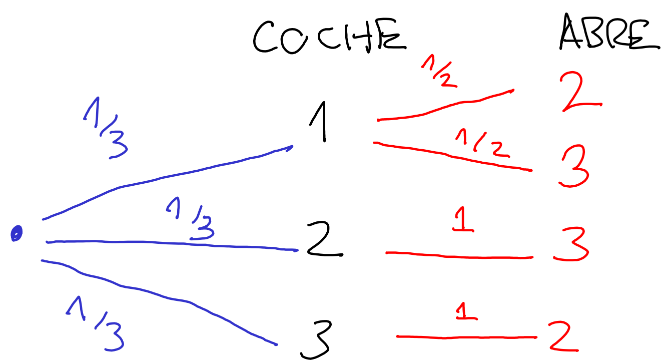
La paradoja de Monty-Hall:

Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas:
detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras, cabras.
Escoges una puerta, digamos la nº1, y el presentador,
que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la nº3,
que contiene una cabra.
Entonces te pregunta: "¿No prefieres escoger la nº2?".
¿Es mejor para ti cambiar tu elección?

La respuesta es SÍ.

Explicación:

$$P(\text{"ganar al cambiar"}) = P(\text{"Coche en puerta 2"} \mid \text{"Abre la 3"})$$
$$= \frac{P(\text{"coche en 2 y abre 3"})}{P(\text{"abre 3"})}$$



$$P(\text{"abre la 3"}) = \frac{1}{2}$$
$$P(\text{"coche en 2 y abre 3"}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{"ganar al cambiar"}) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

• Teorema de Bayes

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)}}$$

– Dem.

$$P(A)\cdot P(B|A) = P(B\cap A) = P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A|B) \quad \#$$

Ejemplo. En una asignatura universitaria de primero asisten a clase 100 de los 150 alumnos. Se sabe que aprueban
el 90% de los alumnos que asisten a clase y el 30% de los que no asisten.
Se elige un alumno al azar. Calcular:
a. La probabilidad de que haya suspendido.
b. Si se sabe que el alumno ha suspendido, la probabilidad de que haya asistido a clase.

Causas: $A_1 \leftarrow$ Asiste a clase

$A_2 \leftarrow$ No a clase

Suceso: $B \leftarrow$ Suspender

(a) $$P(B) = \underbrace{P(B|A_1)}_{1-0,9=0,1} \cdot \underbrace{P(A_1)}_{\frac{100}{150}} + \underbrace{P(B|A_2)}_{1-0,3=0,6} \cdot \overbrace{P(A_2)}^{50/150}$$

$$= \frac{10}{150} + \frac{30}{150} = \frac{40}{150} = \frac{4}{15}$$

(b) $$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{1/15}{4/15} = \frac{1}{4}$$

- Variables aleatorias

Informalmente, una variable aleatoria X es una variable cuyo valor depende del resultado de un experimento aleatorio.

Formalmente, puede definirse como una función definida en el espacio muestral que toma valores reales y que cumple ciertas propiedades técnicas.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{variable aleatoria}}}{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

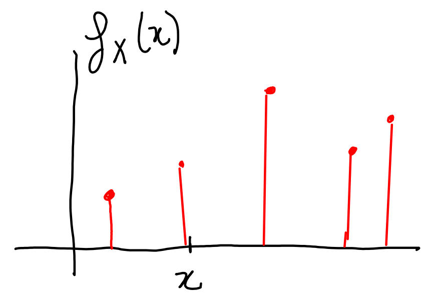
Si la imagen de X (es decir, el conjunto de valores que puede tomar) es finito o "discreto" (como los números naturales o los enteros), decimos que X es una variable aleatoria discreta.

Si la imagen de X es un conjunto infinito continuo (como los números reales), decimos que es una variable aleatoria continua.

- Variable aleatoria discreta

La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta asocia a cada número real la probabilidad de que X sea igual a ese número.

$$f_X(x) = P(X = x)$$



Probabilidad acumulada

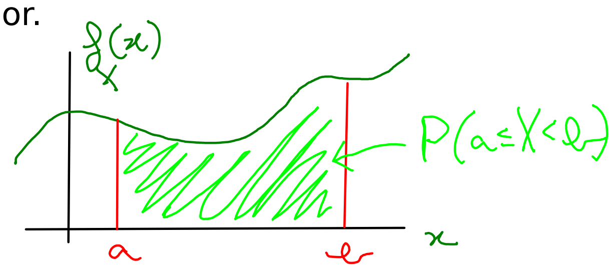
$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{y \le x} f_X(y)$$

$$P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

- Variable aleatoria continua

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua asocia a cada número real la "densidad de probabilidad" en ese número, es decir, cómo la probabilidad se concentra en torno a ese valor.

$$P(a \le X < b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$$



Probabilidad acumulada

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy \qquad\qquad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

- <u>Parámetros</u> de una variable aleatoria

<u>Esperanza</u> $\quad E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$

<u>Varianza</u> $\quad Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2 - 2X\mu + \mu^2\right] = E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2$$
$$= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = E[X^2] - \mu^2$$
$$= E[X^2] - E[X]^2$$

<u>Desviación típica</u> $\quad \sigma = \sqrt{E\left[(X-\mu)^2\right]} \quad \left(= \sqrt{Var(X)}\right)$

- <u>Ejemplos</u>

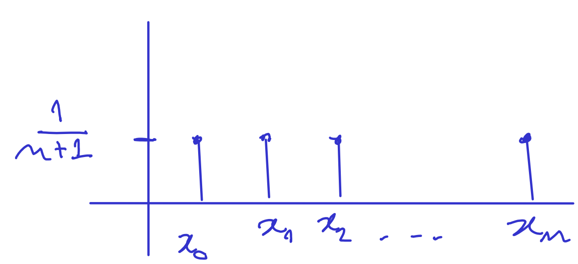
• <u>Discretos</u>

$\boxed{\text{Uniforme}}$ $\quad X : \Omega \to \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \qquad [U(n)]$

$$f_X(x_i) = \frac{1}{n+1} \quad \forall x_i$$

$$E[X] = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} x_i$$

$$Var[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \mu^2$$



$\boxed{\text{Bernoulli}}$ $X: \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ [Bern(p)]

$p \in (0,1)$ $f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x}$

$E[X] = p$

$Var[X] = pq$

[Idea:

0 ← cruz
1 ← cara

p ≡ prob. de cara

$f(0) = 1-p$

$f(1) = p$]

$\boxed{\text{Binomial}}$ $X: \Omega \longrightarrow \{0, \ldots, n\}$ [B(n,p)]

$$f_X(x) = \underbrace{\binom{n}{x}}_{} p^x (1-p)^{n-x}$$

Número combinatorio: $\dfrac{n!}{(n-x)!\, x!}$

$E[X] = np$

$Var[X] = np(1-p)$

[Formas de escoger x elementos entre n elementos]

[Idea "n tiradas de cara o cruz"

x ≡ número de caras

Prob. cara los x primeros y el resto cruces: $p^x (1-p)^{n-x}$

Formas de distribuirse: $\binom{n}{x}$

Probabilidad de sacar n caras: $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$]

$\boxed{\text{Poisson}}$ "Probabilidad de que sucedan x eventos en el intervalo $[0,\lambda]$"

$$[P(\lambda)]$$

$$X:\Omega \longrightarrow \mathbb{N} \qquad f_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$E[X] = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

La distribución de Poisson suele utilizarse por para ver la probabilidad de que se produzca un cierto evento en un intervalo de tiempo determinado (por ejemplo, que se desintegre un cierto núcleo atómico).

Su función de distribución se obtiene como un límite de la binomial, haciendo n tender a infinito y p tender a cero, de forma que el producto np se mantenga constante (lambda).
(Podríamos pensar que cada punto del
intervalo es una tirada a cara o cruz con una probabilidad de cara infinitamente pequeña).

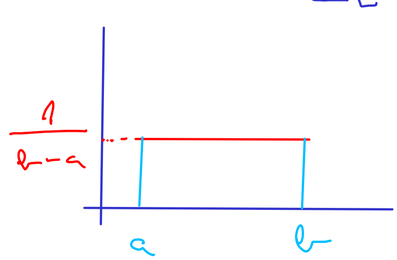
- Continuas

$\boxed{\text{Uniforme}}$

$$X:\Omega \longrightarrow [a,b] \qquad [U(a,b)]$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall x \in [a,b]$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$



$\boxed{\text{Normal}}$

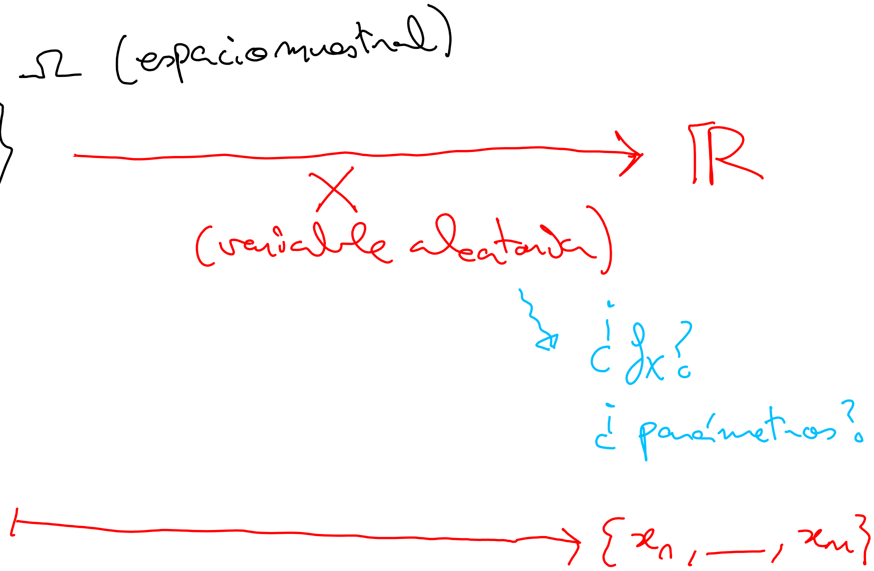
$$X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \qquad [N(\mu,\sigma)]$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E[X] = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

Estadística



- <u>Estadística descriptiva:</u> Recopilar información de la muestra usando estadísticos: tabla de frecuencias, media, varianza, desviación típica...

<u>Media:</u> $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ <u>Varianza:</u> $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

<u>Desviación típica:</u> $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ ← (insesgado)

- <u>Inferencia estadística:</u> Deducir cuál es f_X y sus parámetros

- <u>Teorema central del límite</u> (IDEA)

Cuando la muestra es muy grande, se puede aproximar a una normal $N(\mu, \sigma)$ con $\mu = \bar{x}$ y $\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.