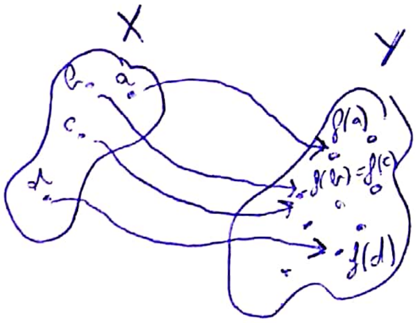
CLASE 3

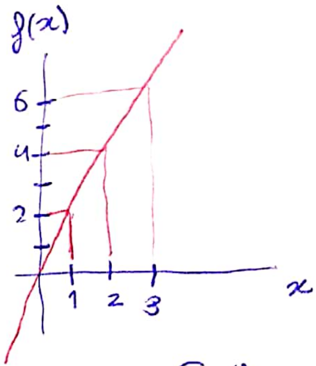
· Funciones

Una función ~~asigna~~ es una relación entre dos conjuntos que a cada elemento del primero le asigna un único elemento del segundo:

$$X \xrightarrow{f} Y$$
$$x \longmapsto f(x)$$



Ejemplo



$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$2 \longmapsto 4$$
$$4 \longmapsto 8$$
$$5 \longmapsto 10$$
etc.

en general: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2\cdot x$, es decir

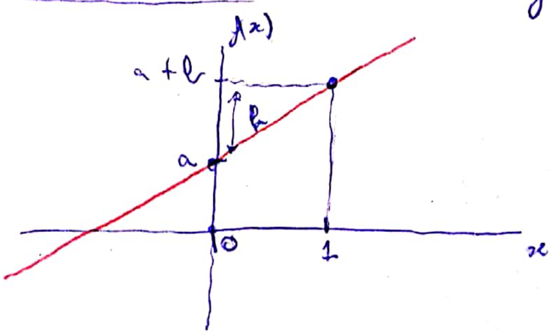
$$\boxed{f(x) = 2x}.$$

Gráfica: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$

~~Una función~~ Nos interesan las funciones $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplos:

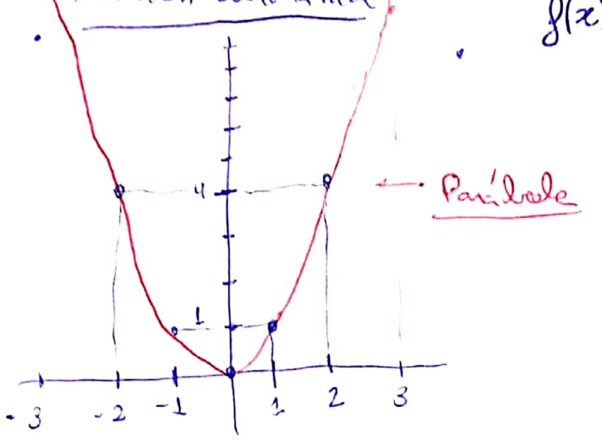
· Funciones lineales: Son de la forma $f(x) = \overset{\text{ordenada en el origen}}{a} + \overset{\text{pendiente}}{b}x$



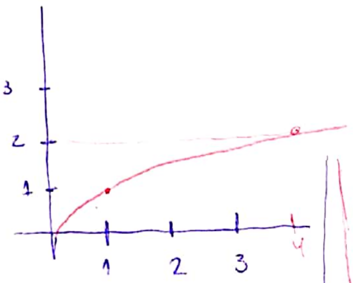
Hablar más sobre la pendiente: $b = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

("Grado de inclinación") ¿Escalado?

- <u>Función cuadrática</u> $f(x)=x^2$

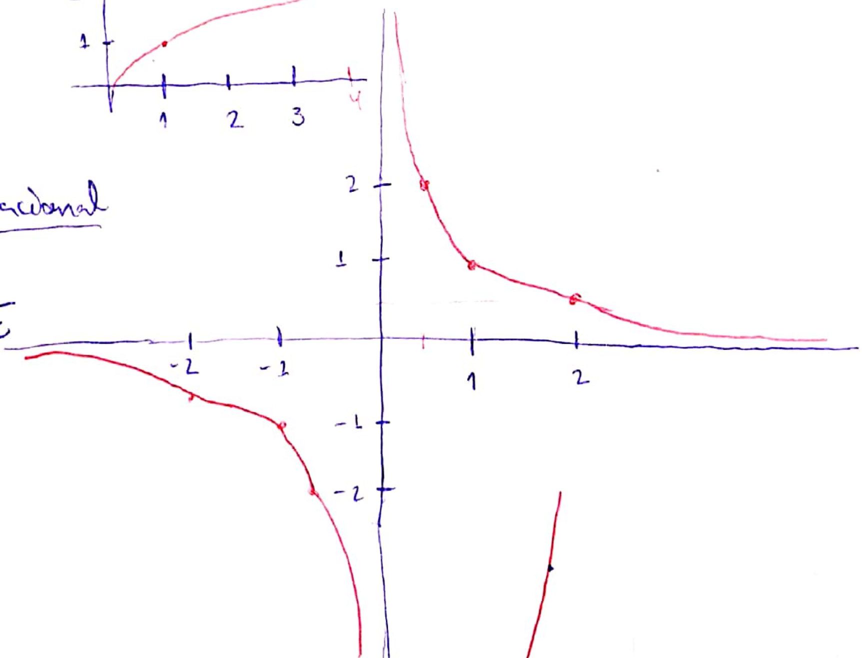


- <u>Raíz cuadrada</u> $f(x)=\sqrt{x}$ (la positiva)



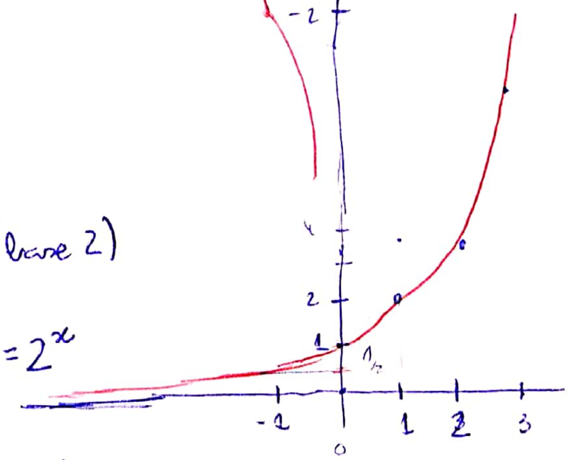
- <u>Función racional</u>

$f(x)=\frac{1}{x}$



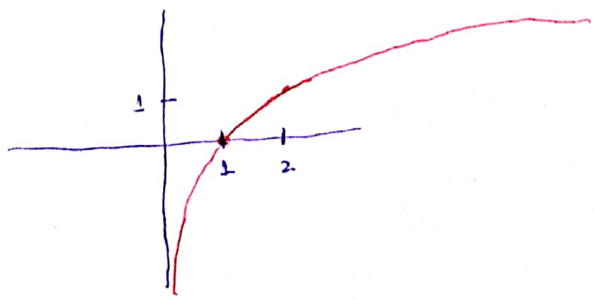
- <u>Exponencial</u> (base 2)

$f(x)=2^x$



- <u>Logarítmica</u> (base 2)

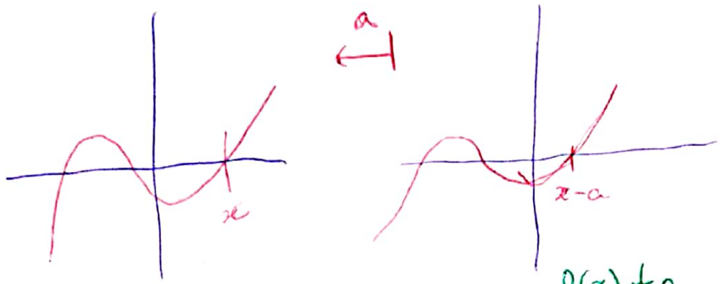
$f(x)=\log_2 x$

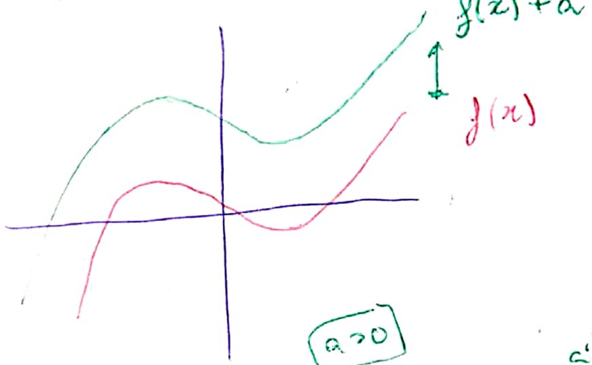


- Transformaciones de funciones

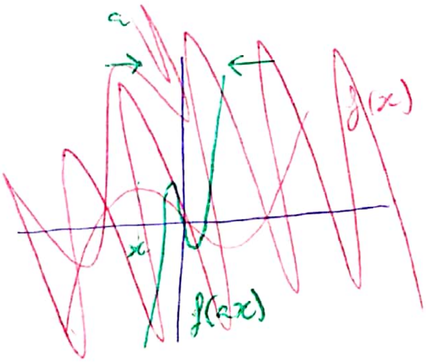
$f(x) \rightsquigarrow f(x+a)$

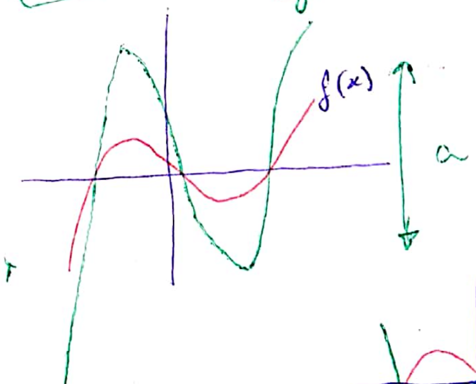
$\boxed{a>0}$

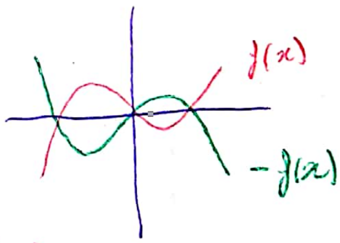




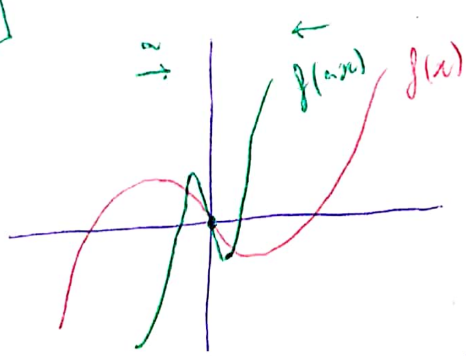
$\boxed{a>0}$

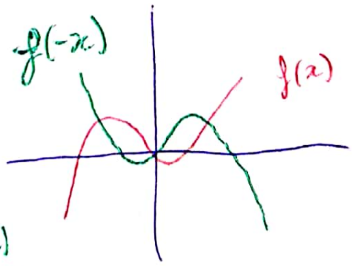




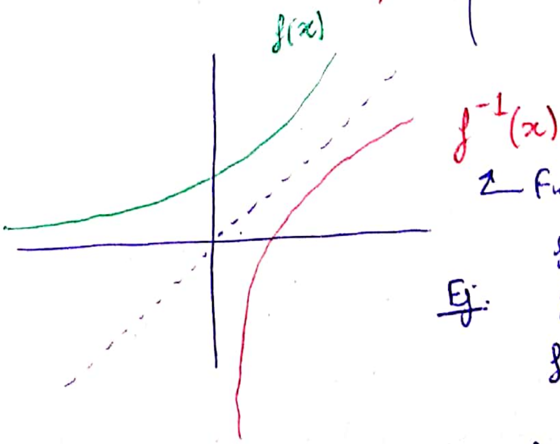


$\boxed{a>0}$





(Si $f(-x)=f(x)$ es simétrica (par))



1 Función inversa: $f^{-1}(f(x))=x$

Ej.

$f(x)=x+1 \quad f^{-1}(x)=x-1$

$f(x)=2x \quad f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x$

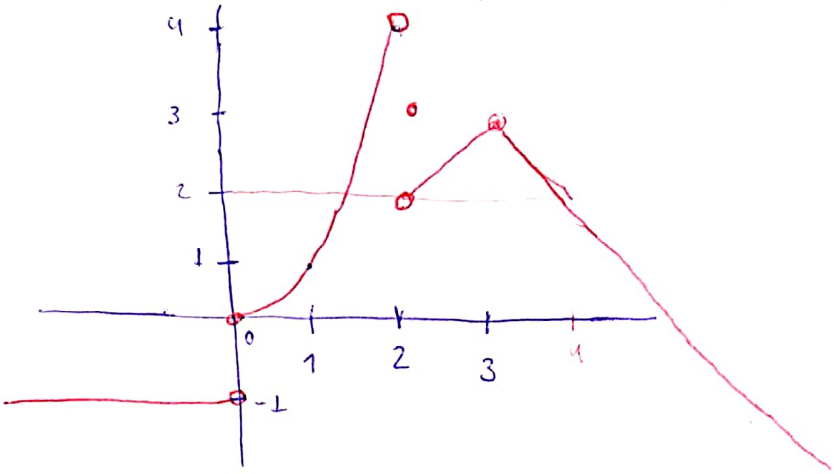
$f(x)=x^2 \quad f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
$(x>0)$

$f(x)=2^x \quad f^{-1}(x)=\log_2 x$.

• Funciones definidas a trozos

Ej

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ x & \text{si } 2<x<3 \\ 6-x & \text{si } x\ge 3 \end{cases} \qquad 3 \text{ si } x=2$$



• Límites:

Intuitivamente: "El valor al que se aproxima la función cuando nos acercamos a un valor" $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Límite por la izq.: " + por la izq. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

Límite por la dcha: " + por la dcha $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

Ej

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4$ $\qquad \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=3$

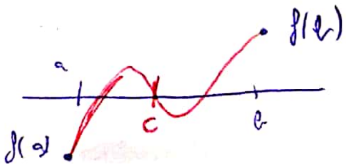
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$ $\qquad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=3$.

• Continuidad:

Una función es continua en un punto a si

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)}.$$

Teorema de Bolzano:



Derivadas

• **Primera idea:** ~~Incremento~~

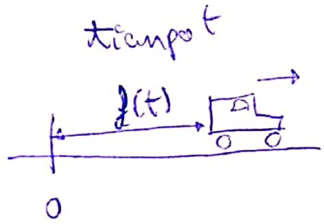
Velocidad media:

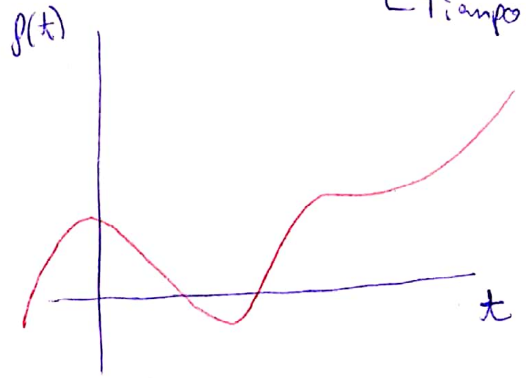
Un coche recorre 100 Km en 30 minutos, ¿qué velocidad media lleva?

$$\frac{100 \text{ Km}}{1/2 \text{ h}} = 200 \text{ Km/h}. \quad \text{(no Reyes)}$$

Idea: ~~Velo~~ Posición del coche: $f(t)$ ← (Desde un origen)

↳ Tiempo





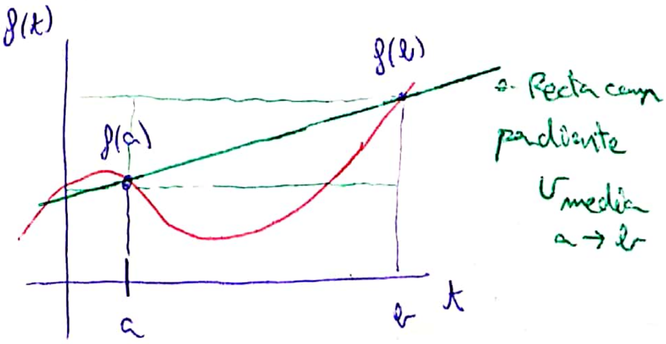
¿Velocidad media entre $t=a$ y $t=b$?

$$v_{\substack{MEDIA\\ a \to b}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Distancia recorrida

tiempo transcurrido

Geométricamente:



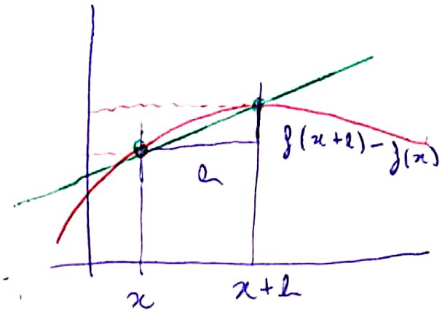
Definición de derivada:

v_{MEDIA} $x \to y$ $\qquad$ v_{MEDIA} $x \to x+h$

(f continua)

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivada de f en x



Teorema del valor medio

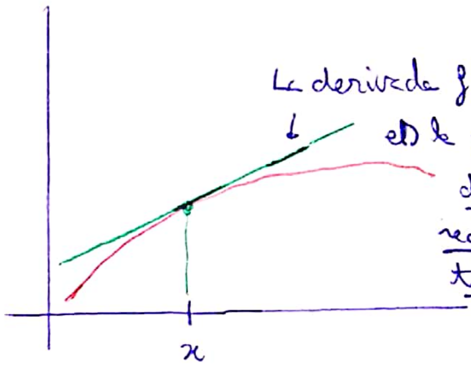
Idea: $f'(x) = \lim_{h \to 0} v$

Función derivada:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x)$$

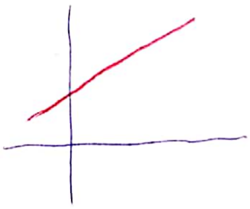
{ En el límite



- Cálculo de derivadas

  - Funciones lineales:

La recta tangente es ella misma:



Si $f(x) = a + bx \Rightarrow f'(x) = b$

Veámoslo: $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a + b(x+h) - (a + bx)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{bx} + bh - \cancel{bx}}{h} = b$$

- Funciones cuadráticas:

$f(x) = x^2$ $\qquad$ $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + h^2 + 2xh - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h + 2x = 2x$$

• Potencias

$f(x)=x^K$ $\quad \boxed{f'(x)= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^K - x^K}{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{K}\binom{K}{n}x^n h^{K-n} - x^K}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{K-1}\binom{K}{n}x^n h^{K-n-1}$

$= \binom{K}{K-1}x^{K-1} = \boxed{Kx^{K-1}}$

• Exponenciales

$f(x)= a^x = e^{\ln a\cdot x}$

$\log_e$

Lo reduzco al caso: $f(x)= e^{ax}$ $\quad \boxed{f'(x)= \lim_{h\to 0}\frac{e^{a(x+h)} - e^{ax}}{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{ax}\cdot e^{ah} - e^{ax}}{h}$

$= \cancel{\lim} \; e^{ax} \lim_{h\to 0}\frac{e^{ah}-1}{h} = \cancel{e^{a}} \; \boxed{ae^{ax}}$

a

[Se puede probar usando $\boxed{e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$]

FUNCIÓN ($f(x)$)	DERIVADA ($f'(x)$)
a	0
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x\cdot\ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\log_a x$ $\left(\ln x/\ln a\right)$	$\frac{1}{x\ln a}$

• Propiedades de la derivada:

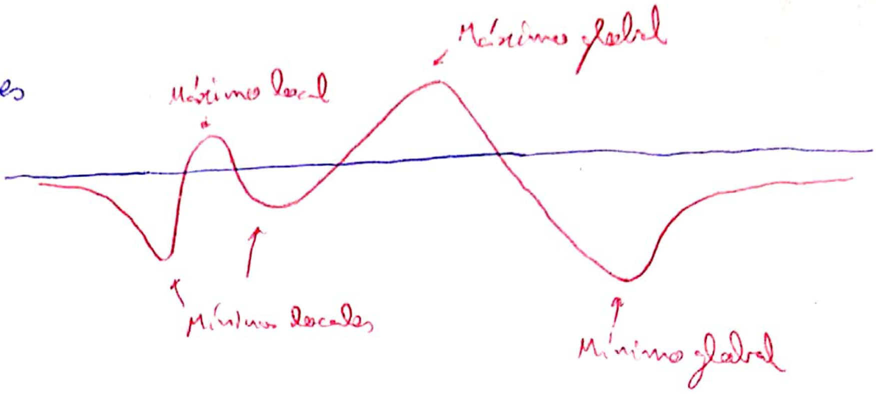
Linealidad: $(f+g)' = f'+g'$

$(Kf)' = Kf'$

Producto: $(fg)' = f'g + fg'$

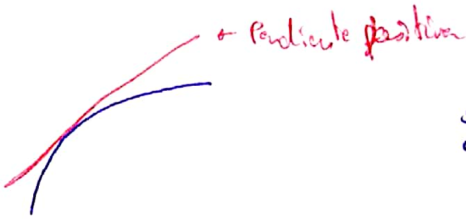
Composición → Regla de la cadena: $(f\circ g)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

· Mínimos locales y globales
máximos



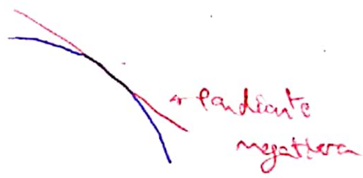
OJO:

Función creciente



$f'(x) > 0$

Función decreciente

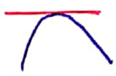


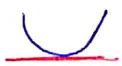
$f'(x) < 0$

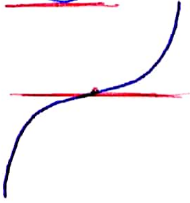
Extremo local:

$f'(x) = 0$

· Si $\boxed{f'(x) = 0}$ puede tener:

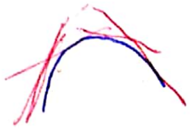
· Máximo local: 

· Mínimo local 

· Punto de inflexión 

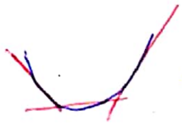
- <u>Segunda derivada:</u> $f''(x)$ → Mide "el cambio" en la derivada

→ Informa sobre la curvatura



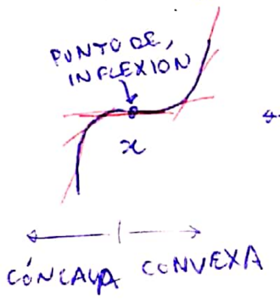
CÓNCAVA

→ La derivada decrece : $f''(x) < 0$



CONVEXA

→ La derivada crece: $f''(x) > 0$



→ La curvatura cambia, la derivada primero decrece y luego crece

$$f''(x) = 0$$

<u>OPTIMIZACIÓN:</u> Objetivo: Minimizar o maximizar una función $f(x)$.

Es decir, hallar sus máximos / mínimos globales.

<u>PASOS</u>:

1. Calcular $f'(x)$
2. Considerar los puntos con $f'(x)=0$.
3. Calcular $f''(x)$.
4. Entre los puntos con $f'(x)=0$:
   - Si $f''(x) < 0$, MÁXIMO LOCAL
   - Si $f''(x) > 0$, MÍNIMO LOCAL
   - Si $f''(x) = 0$, punto de inflexión.
5. Evaluar f en los MÁXIMOS/MÍNIMOS LOCALES y hallar el MÁXIMO/MÍNIMO GLOBAL <u>entre ellos</u>.

OBS

Maximizar $f \longleftrightarrow$ Minimizar $-f$

• Generalización a varias variables:

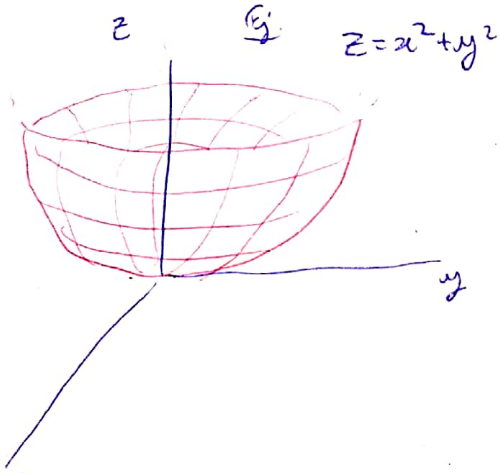
(Lo haremos para 2 y se generaliza fácilmente a más)

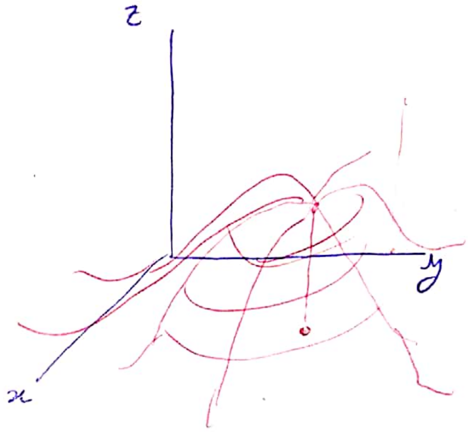
$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

↑ Función de 2 variables

Gráfica: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=f(x,y)\}$

Ej: $z=x^2+y^2$





• Derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

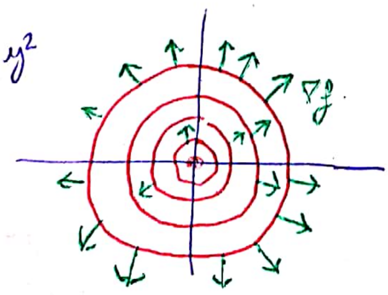
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

"Como derivar respecto de una sola, tratando a la otra como una constante"

• Gradiente: $\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

- Curvas de nivel: Def $C_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=a\}$

Ej. $f=x^2+y^2$



$z=x^2+y^2$

$\nabla f(x,y)=(2x,2y)$

• El gradiente indica la dirección de máximo crecimiento de la función.

· Optimizar una función de varias variables:

→ Método analítico (exacto pero complicado en la práctica)

MÍNIMO

1. Hallar los puntos con $\nabla f(x,y)=0$.

MÁXIMO

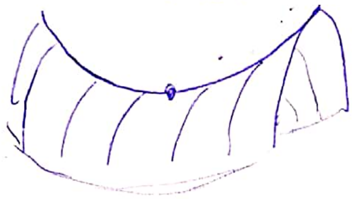
2. Discutir si son máximos o mínimos u otro caso estudiando la matriz hessiana:

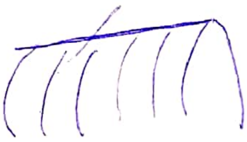
$$\begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x \partial y \\ \partial^2 f/\partial y \partial x & \partial^2 f/\partial y^2 \end{pmatrix}$$

↑

Se estudia su signatura → ÁLGEBRA

"SILLA DE MONTAR"





→ Método numérico (~ hablar algo de métodos numéricos)

El método de la pendiente más pronunciada

(gradient descent o steepest descent)

1. Empezamos en un punto a_0

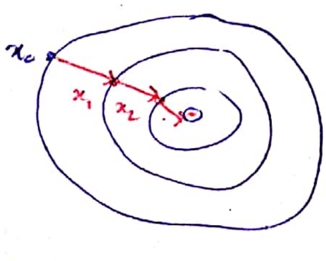
2. f decrece más rápido en la dirección del gradiente: $-\nabla f(a_0)$

3. Fijamos un paso γ (ej. $\gamma = 0{,}01$)

4. ~~Sea~~ $a_1 = a_0 - \gamma \nabla f(a_0)$ → $f(a_1) < f(a_0)$

⋮

Repetimos $a_{n+1} = a_n - \gamma \nabla f(a_n)$ $f(a_n) \leq f(a_{n-1}) \leq \ldots$



Convergencia a un mínimo local (garantizada en casos buenos)

~~f convexa~~

→ Lo programaremos