# Una invitación al programa de Langlands geométrico

Guillermo Gallego

Universidad Complutense de Madrid

12 de mayo de 2022
Seminario Antonio Giraldo y Sonia Sastre
Facultad de Informática UPM

# Índice

# Extensiones de cuerpos

- Sea $K$ un cuerpo (p. ej. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

# Extensiones de cuerpos

- Sea $K$ un cuerpo (p. ej. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).
- Una extensión de $K$ es

$$K \longrightarrow F,$$

$F$ otro cuerpo.

# Extensiones de cuerpos

- Sea $K$ un cuerpo (p. ej. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).
- Una extensión de $K$ es

$$K \longrightarrow F,$$

  $F$ otro cuerpo.
- OBS 1: Todo homomorfismo de cuerpos es inyectivo.

# Extensiones de cuerpos

- Sea $K$ un cuerpo (p. ej. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).
- Una extensión de $K$ es
$$K \longrightarrow F,$$
  $F$ otro cuerpo.
- OBS 1: Todo homomorfismo de cuerpos es inyectivo.
- OBS 2: $F$ es un $K$-espacio vectorial.

## Extensiones de cuerpos

- Sea $K$ un cuerpo (p. ej. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).
- Una extensión de $K$ es
$$K \longrightarrow F,$$
$F$ otro cuerpo.
- OBS 1: Todo homomorfismo de cuerpos es inyectivo.
- OBS 2: $F$ es un $K$-espacio vectorial.
- La extensión $F|K$ es finita si $\dim_K F < \infty$.

# Extensiones de cuerpos

- Sea $K$ un cuerpo (p. ej. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).
- Una extensión de $K$ es
$$K \longrightarrow F,$$
$F$ otro cuerpo.
- OBS 1: Todo homomorfismo de cuerpos es inyectivo.
- OBS 2: $F$ es un $K$-espacio vectorial.
- La extensión $F|K$ es finita si $\dim_K F < \infty$.

## Ejemplo

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

# Extensiones de cuerpos

- Sea $K$ un cuerpo (p. ej. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).
- Una extensión de $K$ es
$$K \longrightarrow F,$$
$F$ otro cuerpo.
- OBS 1: Todo homomorfismo de cuerpos es inyectivo.
- OBS 2: $F$ es un $K$-espacio vectorial.
- La extensión $F|K$ es finita si $\dim_K F < \infty$.

**Ejemplo**

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

- El cierre algebraico $\overline{K}$ de un cuerpo $K$ es la menor extensión $K'|K$ tal que para todo $p \in K[T]$, $p$ tiene raíces en $K'$.

# Extensiones de cuerpos

- Sea $K$ un cuerpo (p. ej. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).
- Una extensión de $K$ es
$$K \longrightarrow F,$$
$F$ otro cuerpo.
- OBS 1: Todo homomorfismo de cuerpos es inyectivo.
- OBS 2: $F$ es un $K$-espacio vectorial.
- La extensión $F|K$ es finita si $\dim_K F < \infty$.

**Ejemplo**

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

- El cierre algebraico $\bar{K}$ de un cuerpo $K$ es la menor extensión $K'|K$ tal que para todo $p \in K[T]$, $p$ tiene raíces en $K'$. (Por ejemplo, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$, por el Teorema Fundamental del Álgebra).

# El grupo de Galois

- El grupo de Galois de una extensión $F|K$ se define como

$$\mathrm{Gal}(F|K) = \mathrm{Aut}_K(F) = \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}(F) : \begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\sigma"] & & F \\ & K \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \text{ conmuta.} \right\}$$

# El grupo de Galois

- El grupo de Galois de una extensión $F|K$ se define como

$$\mathrm{Gal}(F|K) = \mathrm{Aut}_K(F) = \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}(F) : \begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\sigma"] & & F \\ & K \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \text{ conmuta.} \right\}$$

## Ejemplo (Cuerpo ciclotómico)

Sea $n$ un número natural y $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$.

- El grupo de Galois de una extensión $F|K$ se define como

$$\mathrm{Gal}(F|K) = \mathrm{Aut}_K(F) = \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}(F) : \begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\sigma"] & & F \\ & K \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \text{ conmuta.} \right\}$$

### Ejemplo (Cuerpo ciclotómico)

Sea $n$ un número natural y $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$. El $n$-ésimo cuerpo ciclotómico es el cuerpo $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ generado por $\zeta_n$.

- El grupo de Galois de una extensión $F|K$ se define como

$$\operatorname{Gal}(F|K) = \operatorname{Aut}_K(F) = \left\{ \sigma \in \operatorname{Aut}(F) : \begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\sigma"] & & F \\ & K \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \text{ conmuta.} \right\}$$

### Ejemplo (Cuerpo ciclotómico)

Sea $n$ un número natural y $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$. El $n$-ésimo cuerpo ciclotómico es el cuerpo $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ generado por $\zeta_n$.

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_n) = \varphi(n) = |\{a < n : \gcd(a, n) = 1\}|.$$

# El grupo de Galois

- El grupo de Galois de una extensión $F|K$ se define como

$$\mathrm{Gal}(F|K) = \mathrm{Aut}_K(F) = \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}(F) : \begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\sigma"] & & F \\ & K \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \text{ conmuta.} \right\}$$

## Ejemplo (Cuerpo ciclotómico)

Sea $n$ un número natural y $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$. El $n$-ésimo cuerpo ciclotómico es el cuerpo $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ generado por $\zeta_n$.

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_n) = \varphi(n) = |\{a < n : \gcd(a, n) = 1\}|.$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/n)^{\times} &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)|\mathbb{Q}) \\ a \mod n &\longmapsto (\zeta_n \mapsto \zeta_n^a). \end{aligned}$$

# Índice

# Cuerpos de números

- Un cuerpo de números es una extensión finita de $\mathbb{Q}$.

# Cuerpos de números

- Un cuerpo de números es una extensión finita de $\mathbb{Q}$.

## Problema MUY DIFÍCIL

Estudiar $\mathrm{Gal}(\bar{K}|K)$, para $K$ un cuerpo de números.

# Cuerpos de números

- Un cuerpo de números es una extensión finita de $\mathbb{Q}$.

**Problema MUY DIFÍCIL**

Estudiar $\mathrm{Gal}(\bar{K}|K)$, para $K$ un cuerpo de números.

**Problema más tratable**

Estudiar el grupo abelianizado $\mathrm{Gal}(\bar{K}|K)^{\mathrm{ab}}$, para $K$ un cuerpo de números.

# Cuerpos de números

- Un cuerpo de números es una extensión finita de $\mathbb{Q}$.

**Problema MUY DIFÍCIL**

Estudiar $\mathrm{Gal}(\bar{K}|K)$, para $K$ un cuerpo de números.

**Problema más tratable**

Estudiar el grupo abelianizado $\mathrm{Gal}(\bar{K}|K)^{\mathrm{ab}}$, para $K$ un cuerpo de números.

- $\mathrm{Gal}(\bar{K}|K)^{\mathrm{ab}}$ es el grupo de Galois de $K^{\mathrm{ab}}$ la mayor extensión $K'|K$ tal que $\mathrm{Gal}(K'|K)$ es abeliano.

# Cuerpos de números

- Un cuerpo de números es una extensión finita de $\mathbb{Q}$.

**Problema MUY DIFÍCIL**

Estudiar $\mathrm{Gal}(\bar{K}|K)$, para $K$ un cuerpo de números.

**Problema más tratable**

Estudiar el grupo abelianizado $\mathrm{Gal}(\bar{K}|K)^{\mathrm{ab}}$, para $K$ un cuerpo de números.

- $\mathrm{Gal}(\bar{K}|K)^{\mathrm{ab}}$ es el grupo de Galois de $K^{\mathrm{ab}}$ la mayor extensión $K'|K$ tal que $\mathrm{Gal}(K'|K)$ es abeliano.
- El estudio de $\mathrm{Gal}(\bar{K}|K)^{\mathrm{ab}}$ se conoce como la teoría de cuerpos de clases.

# Ejemplo: $K = \mathbb{Q}$

## Teorema (Kronecker-Weber)

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N}, \lambda^n = 1\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}(\zeta_n),$$

*identificando* $\mathbb{Q}(\zeta_m) \hookrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_n)$ *si* $m|n$.

# Ejemplo: $K = \mathbb{Q}$

## Teorema (Kronecker-Weber)

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N}, \lambda^n = 1\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}(\zeta_n),$$

*identificando* $\mathbb{Q}(\zeta_m) \hookrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_n)$ *si* $m|n$.

En consecuencia, tenemos que

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}|\mathbb{Q}) = \varprojlim (\mathbb{Z}/n)^\times = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in (\mathbb{Z}/n)^\times, p_{nm}(x_n) = x_m\right\},$$

donde el límite se toma con respecto del sistema $p_{nm} : (\mathbb{Z}/n)^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/m)^\times$ si $m|n$.

# Números $p$-ádicos

- Sea $p$ un número primo.

# Números $p$-ádicos

- Sea $p$ un número primo.
- Un número $p$-ádico es una serie formal de la forma

$$a_k p^k + a_{k+1} p^{k+1} + \cdots ,$$

para $k \in \mathbb{Z}$ y con los $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

# Números $p$-ádicos

- Sea $p$ un número primo.
- Un número $p$-ádico es una serie formal de la forma

$$a_k p^k + a_{k+1} p^{k+1} + \cdots ,$$

  para $k \in \mathbb{Z}$ y con los $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.
- El conjunto de los números $p$-ádicos se denota por $\mathbb{Q}_p$.

# Números $p$-ádicos

- Sea $p$ un número primo.
- Un número $p$-ádico es una serie formal de la forma

$$a_k p^k + a_{k+1} p^{k+1} + \cdots ,$$

  para $k \in \mathbb{Z}$ y con los $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.
- El conjunto de los números $p$-ádicos se denota por $\mathbb{Q}_p$.
- $\mathbb{Q}_p$ admite de forma natural una suma y una multiplicación que le dan estructura de cuerpo.

# Números $p$-ádicos

- Sea $p$ un número primo.
- Un número $p$-ádico es una serie formal de la forma

$$a_k p^k + a_{k+1} p^{k+1} + \cdots ,$$

para $k \in \mathbb{Z}$ y con los $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.
- El conjunto de los números $p$-ádicos se denota por $\mathbb{Q}_p$.
- $\mathbb{Q}_p$ admite de forma natural una suma y una multiplicación que le dan estructura de cuerpo.
- Se definen los enteros $p$-ádicos como los elementos del subanillo $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ definido por

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ a_k p^k + a_{k+1} p^{k+1} + \cdots \in \mathbb{Q}_p : k \geq 0 \right\} .$$

# Números $p$-ádicos

- Sea $p$ un número primo.
- Un número $p$-ádico es una serie formal de la forma

$$a_k p^k + a_{k+1} p^{k+1} + \cdots ,$$

  para $k \in \mathbb{Z}$ y con los $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.
- El conjunto de los números $p$-ádicos se denota por $\mathbb{Q}_p$.
- $\mathbb{Q}_p$ admite de forma natural una suma y una multiplicación que le dan estructura de cuerpo.
- Se definen los enteros $p$-ádicos como los elementos del subanillo $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ definido por

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ a_k p^k + a_{k+1} p^{k+1} + \cdots \in \mathbb{Q}_p : k \geq 0 \right\} .$$

- $\mathbb{Q}_p = \mathrm{qf}(\mathbb{Z}_p)$.

# Los enteros de Prüfer

- El teorema de Kronecker-Weber implica que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}|\mathbb{Q})$ es el grupo de unidades del anillo

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n,$$

conocido como el anillo de enteros de Prüfer.

# Los enteros de Prüfer

- El teorema de Kronecker-Weber implica que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}|\mathbb{Q})$ es el grupo de unidades del anillo

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n,$$

  conocido como el anillo de enteros de Prüfer.
- Ahora, todo $n \in \mathbb{N}$ puede descomponerse en factores primos como $n = \prod_{p \text{ primo}} p^{n_p}$.

# Los enteros de Prüfer

- El teorema de Kronecker-Weber implica que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}|\mathbb{Q})$ es el grupo de unidades del anillo

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n,$$

  conocido como el anillo de enteros de Prüfer.
- Ahora, todo $n \in \mathbb{N}$ puede descomponerse en factores primos como $n = \prod_{p \text{ primo}} p^{n_p}$.
- Por tanto

$$\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \text{ primo}} \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/(p^n) = \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p.$$

# Los enteros de Prüfer

- El teorema de Kronecker-Weber implica que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}|\mathbb{Q})$ es el grupo de unidades del anillo

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n,$$

conocido como el anillo de enteros de Prüfer.

- Ahora, todo $n \in \mathbb{N}$ puede descomponerse en factores primos como $n = \prod_{p \text{ primo}} p^{n_p}$.
- Por tanto

$$\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \text{ primo}} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/(p^n) = \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p.$$

- Podemos reformular entonces el teorema de Kronecker-Weber como

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}|\mathbb{Q}) = \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p^{\times}.$$

# Valores absolutos

- Deseamos generalizar estos resultados a otros cuerpos de números.

# Valores absolutos

- Deseamos generalizar estos resultados a otros cuerpos de números. Para ello necesitamos hablar de valores absolutos.

# Valores absolutos

- Deseamos generalizar estos resultados a otros cuerpos de números. Para ello necesitamos hablar de valores absolutos.
- Un valor absoluto de un cuerpo $K$ es una aplicación $|-|: K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que, para cualesquiera $x, y \in K$, tenemos
  1. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
  2. $|xy| = |x||y|$,
  3. $|x + y| \geq |x| + |y|$.

# Valores absolutos

- Deseamos generalizar estos resultados a otros cuerpos de números. Para ello necesitamos hablar de valores absolutos.
- Un valor absoluto de un cuerpo $K$ es una aplicación $|-|: K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que, para cualesquiera $x, y \in K$, tenemos
  1. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
  2. $|xy| = |x||y|$,
  3. $|x + y| \geq |x| + |y|$.
- Dos valores absolutos son equivalentes si existe un número $c > 0$ tal que $|-|_1^c = |-|_2$.

# Valores absolutos

- Deseamos generalizar estos resultados a otros cuerpos de números. Para ello necesitamos hablar de valores absolutos.
- Un valor absoluto de un cuerpo $K$ es una aplicación $|-|: K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que, para cualesquiera $x, y \in K$, tenemos
  1. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
  2. $|xy| = |x||y|$,
  3. $|x+y| \geq |x| + |y|$.
- Dos valores absolutos son equivalentes si existe un número $c > 0$ tal que $|-|_1^c = |-|_2$.

**Teorema (Ostrowski)**

*Todo valor absoluto en $\mathbb{Q}$ es equivalente a uno de los siguientes:*

# Valores absolutos

- Deseamos generalizar estos resultados a otros cuerpos de números. Para ello necesitamos hablar de valores absolutos.
- Un valor absoluto de un cuerpo $K$ es una aplicación $|-| : K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que, para cualesquiera $x, y \in K$, tenemos
  1. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
  2. $|xy| = |x||y|$,
  3. $|x + y| \geq |x| + |y|$.
- Dos valores absolutos son equivalentes si existe un número $c > 0$ tal que $|-|_1^c = |-|_2$.

**Teorema (Ostrowski)**

*Todo valor absoluto en $\mathbb{Q}$ es equivalente a uno de los siguientes:*

- *el valor absoluto trivial, $|0|_0 = 0$ y $|x|_0 = 1$ si $x \neq 0$;*

# Valores absolutos

- Deseamos generalizar estos resultados a otros cuerpos de números. Para ello necesitamos hablar de valores absolutos.
- Un valor absoluto de un cuerpo $K$ es una aplicación $|-| : K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que, para cualesquiera $x, y \in K$, tenemos
  1. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
  2. $|xy| = |x||y|$,
  3. $|x + y| \geq |x| + |y|$.
- Dos valores absolutos son equivalentes si existe un número $c > 0$ tal que $|-|_1^c = |-|_2$.

**Teorema (Ostrowski)**

*Todo valor absoluto en $\mathbb{Q}$ es equivalente a uno de los siguientes:*

- *el valor absoluto trivial, $|0|_0 = 0$ y $|x|_0 = 1$ si $x \neq 0$;*
- *el valor absoluto real, $|x|_\infty = |x|$;*

# Valores absolutos

- Deseamos generalizar estos resultados a otros cuerpos de números. Para ello necesitamos hablar de valores absolutos.
- Un valor absoluto de un cuerpo $K$ es una aplicación $|-|: K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que, para cualesquiera $x, y \in K$, tenemos
  1. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
  2. $|xy| = |x||y|$,
  3. $|x + y| \geq |x| + |y|$.
- Dos valores absolutos son equivalentes si existe un número $c > 0$ tal que $|-|_1^c = |-|_2$.

**Teorema (Ostrowski)**

*Todo valor absoluto en $\mathbb{Q}$ es equivalente a uno de los siguientes:*

- *el valor absoluto trivial, $|0|_0 = 0$ y $|x|_0 = 1$ si $x \neq 0$;*
- *el valor absoluto real, $|x|_\infty = |x|$;*
- *para cada número primo $p$, el valor absoluto $p$-ádico, $|x|_p = p^{-n}$, donde $n$ es el único número entero tal que $x = p^n \frac{a}{b}$, con $a$ y $b$ coprimos y no divisibles por $p$.*

# Adèles

- Dado un cuerpo $K$, se define su anillo de enteros como

$$\mathcal{O}_K = \{x \in K : \exists p \in \mathbb{Z}[t] \text{ mónico}, p(x) = 0\}.$$

# Adèles

- Dado un cuerpo $K$, se define su anillo de enteros como

$$\mathcal{O}_K = \{x \in K : \exists p \in \mathbb{Z}[t] \text{ mónico}, p(x) = 0\} .$$

- Un lugar de un cuerpo $K$ es una clase de equivalencia de valores absolutos de $K$.

# Adèles

- Dado un cuerpo $K$, se define su anillo de enteros como

$$\mathcal{O}_K = \{x \in K : \exists p \in \mathbb{Z}[t] \text{ mónico}, p(x) = 0\} .$$

- Un lugar de un cuerpo $K$ es una clase de equivalencia de valores absolutos de $K$.
- Si $v$ es un lugar de un cuerpo $K$, la compleción de $K$ con respecto de $v$ está bien definida y se denota por $K_v$.

# Adèles

- Dado un cuerpo $K$, se define su anillo de enteros como

$$\mathcal{O}_K = \{x \in K : \exists p \in \mathbb{Z}[t] \text{ mónico}, p(x) = 0\} .$$

- Un lugar de un cuerpo $K$ es una clase de equivalencia de valores absolutos de $K$.
- Si $v$ es un lugar de un cuerpo $K$, la compleción de $K$ con respecto de $v$ está bien definida y se denota por $K_v$. Denotamos por $\mathcal{O}_v$ al anillo de enteros de $K_v$.

# Adèles

- Dado un cuerpo $K$, se define su anillo de enteros como

$$\mathcal{O}_K = \{x \in K : \exists p \in \mathbb{Z}[t] \text{ mónico}, p(x) = 0\}.$$

- Un lugar de un cuerpo $K$ es una clase de equivalencia de valores absolutos de $K$.
- Si $v$ es un lugar de un cuerpo $K$, la compleción de $K$ con respecto de $v$ está bien definida y se denota por $K_v$. Denotamos por $\mathcal{O}_v$ al anillo de enteros de $K_v$.
- Se define el anillo de adèles de un cuerpo $K$ como

$$\mathbb{A}_K = \left\{ (x_v)_{v \text{ lugar de } K} \in \prod_{v \text{ lugar de } K} K_v : x_v \in \mathcal{O}_v \text{ para todo } v \text{ salvo para una cantidad finita} \right\}.$$

# Los adèles de $\mathbb{Q}$

## Ejemplo

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \left\{ ((x_p)_{p \text{ primo}}, x_\infty) \in \left( \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Q}_p \right) \times \mathbb{R} : x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para casi todo } p \right\}.$$

### Ejemplo

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \left\{ ((x_p)_{p \text{ primo}}, x_\infty) \in \left( \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Q}_p \right) \times \mathbb{R} : x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para casi todo } p \right\}.$$

- Podemos considerar la inmersión diagonal $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$, y el cociente

$$\mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \cong \hat{\mathbb{Z}} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

# Los adèles de $\mathbb{Q}$

## Ejemplo

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \left\{ ((x_p)_{p \text{ primo}}, x_\infty) \in \left( \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Q}_p \right) \times \mathbb{R} : x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para casi todo } p \right\}.$$

- Podemos considerar la inmersión diagonal $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$, y el cociente

$$\mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \cong \hat{\mathbb{Z}} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

- En particular, obtenemos $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times \cong \hat{\mathbb{Z}}^\times \times \mathbb{R}_{>0}$, cuyo grupo de componentes conexas es igual a $\hat{\mathbb{Z}}^\times$.

# Los adèles de $\mathbb{Q}$

## Ejemplo

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \left\{ ((x_p)_{p \text{ primo}}, x_\infty) \in \left( \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Q}_p \right) \times \mathbb{R} : x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para casi todo } p \right\}.$$

- Podemos considerar la inmersión diagonal $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$, y el cociente

$$\mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \cong \hat{\mathbb{Z}} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

- En particular, obtenemos $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times \cong \hat{\mathbb{Z}}^\times \times \mathbb{R}_{>0}$, cuyo grupo de componentes conexas es igual a $\hat{\mathbb{Z}}^\times$.
- Podemos reformular entonces el teorema de Kronecker-Weber como

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} | \mathbb{Q}) \cong \pi_0(\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times)$$

# La teoría de cuerpos de clases

**Teorema (Teorema fundamental de la CFT)**

*Dado un cuerpo de números K, tenemos que*

$$\mathsf{Gal}(K^{\mathrm{ab}}|K) \cong \pi_0(K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times).$$

# La teoría de cuerpos de clases

## Teorema (Teorema fundamental de la CFT)

*Dado un cuerpo de números K, tenemos que*

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}|K) \cong \pi_0(K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times).$$

## Idea

- Este resultado nos da información «abeliana» sobre $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}|K)$, ya que $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}|K) = G^{\mathrm{ab}}$.

# La teoría de cuerpos de clases

**Teorema (Teorema fundamental de la CFT)**

*Dado un cuerpo de números K, tenemos que*

$$\mathsf{Gal}(K^{\mathrm{ab}}|K) \cong \pi_0(K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times).$$

**Idea**

- Este resultado nos da información «abeliana» sobre $G = \mathsf{Gal}(\bar{K}|K)$, ya que $\mathsf{Gal}(K^{\mathrm{ab}}|K) = G^{\mathrm{ab}}$.
- Ahora queremos obtener información «no abeliana» sobre $G$.

# La teoría de cuerpos de clases

## Teorema (Teorema fundamental de la CFT)

*Dado un cuerpo de números $K$, tenemos que*

$$\mathsf{Gal}(K^{\mathrm{ab}}|K) \cong \pi_0(K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times).$$

## Idea

- Este resultado nos da información «abeliana» sobre $G = \mathsf{Gal}(\bar{K}|K)$, ya que $\mathsf{Gal}(K^{\mathrm{ab}}|K) = G^{\mathrm{ab}}$.
- Ahora queremos obtener información «no abeliana» sobre $G$.
- Una forma de hacer esto es estudiar las representaciones de $G$.

# Índice

# Teoría de representaciones

- Sea $A$ un anillo.

$$\mathrm{GL}_n(A) = \{\text{matrices } n \times n \text{ invertibles con coeficientes en } A\}\,.$$

# Teoría de representaciones

- Sea $A$ un anillo.

$$\mathrm{GL}_n(A) = \{\text{matrices } n \times n \text{ invertibles con coeficientes en } A\}.$$

- Una representación $n$-dimensional (compleja) de un grupo $G$ es un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

- Sea $A$ un anillo.

$$\mathrm{GL}_n(A) = \{\text{matrices } n \times n \text{ invertibles con coeficientes en } A\}\,.$$

- Una representación $n$-dimensional (compleja) de un grupo $G$ es un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

- Como $\mathbb{C}^\times$ es un grupo abeliano, tenemos que

$$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(G^{\mathrm{ab}}, \mathbb{C}^\times).$$

  Es decir, las representaciones 1-dimensionales de $G$ coinciden con las representaciones 1-dimensionales de $G^{\mathrm{ab}}$.

# Teoría de representaciones

- Sea $A$ un anillo.

$$\mathrm{GL}_n(A) = \{\text{matrices } n \times n \text{ invertibles con coeficientes en } A\}.$$

- Una representación $n$-dimensional (compleja) de un grupo $G$ es un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

- Como $\mathbb{C}^\times$ es un grupo abeliano, tenemos que

$$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(G^{\mathrm{ab}}, \mathbb{C}^\times).$$

  Es decir, las representaciones 1-dimensionales de $G$ coinciden con las representaciones 1-dimensionales de $G^{\mathrm{ab}}$.

- Podemos reinterpretar la CFT como una correspondencia

$$\left\{\text{Rep. 1-dimensionales de } \mathrm{Gal}(\bar{K}|K)\right\} \leftrightarrow \left\{\text{«Algunas» rep. 1-dimensionales de } K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times\right\}.$$

# El programa de Langlands

- Para cualquier «espacio» $X$, denotamos por $\mathbb{C}[X]$ el conjunto de las funciones de $X$ a $\mathbb{C}$.

- Para cualquier «espacio» $X$, denotamos por $\mathbb{C}[X]$ el conjunto de las funciones de $X$ a $\mathbb{C}$.
- Idea:

$$\mathrm{Hom}(K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(\mathbb{A}_K, \mathbb{C}^\times) \cap \mathbb{C}[K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times]$$

# El programa de Langlands

- Para cualquier «espacio» $X$, denotamos por $\mathbb{C}[X]$ el conjunto de las funciones de $X$ a $\mathbb{C}$.
- Idea:
$$\mathrm{Hom}(K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(\mathbb{A}_K, \mathbb{C}^\times) \cap \mathbb{C}[K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times]$$
- En general, definimos las representaciones automórficas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ como los elementos del conjunto
$$\mathrm{Hom}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K), \mathbb{C}^\times) \cap \mathbb{C}[\mathrm{GL}_n(K) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)].$$

# El programa de Langlands

- Para cualquier «espacio» $X$, denotamos por $\mathbb{C}[X]$ el conjunto de las funciones de $X$ a $\mathbb{C}$.
- Idea:

$$\mathrm{Hom}(K^{\times} \backslash \mathbb{A}_K^{\times}, \mathbb{C}^{\times}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{A}_K, \mathbb{C}^{\times}) \cap \mathbb{C}[K^{\times} \backslash \mathbb{A}_K^{\times}]$$

- En general, definimos las representaciones automórficas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ como los elementos del conjunto

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K), \mathbb{C}^{\times}) \cap \mathbb{C}[\mathrm{GL}_n(K) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)].$$

- Grosso modo, el programa de Langlands conjetura una correspondencia

$$\left\{\text{Rep. } n\text{-dimensionales de } \mathrm{Gal}(\bar{K}|K)\right\} \leftrightarrow \left\{\text{Rep. automórficas de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)\right\}.$$

# El programa de Langlands

- Para cualquier «espacio» $X$, denotamos por $\mathbb{C}[X]$ el conjunto de las funciones de $X$ a $\mathbb{C}$.
- Idea:
$$\mathrm{Hom}(K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(\mathbb{A}_K, \mathbb{C}^\times) \cap \mathbb{C}[K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times]$$
- En general, definimos las representaciones automórficas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ como los elementos del conjunto
$$\mathrm{Hom}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K), \mathbb{C}^\times) \cap \mathbb{C}[\mathrm{GL}_n(K) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)].$$
- Grosso modo, el programa de Langlands conjetura una correspondencia
$$\left\{\text{Rep. } n\text{-dimensionales de } \mathrm{Gal}(\bar{K}|K)\right\} \leftrightarrow \left\{\text{Rep. automórficas de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)\right\}.$$
- En esta charla, nos restringiremos a la correspondencia «sin ramificar», que sólo considera representaciones automórficas en $\mathbb{C}[\mathrm{GL}_n(K) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})]$, para $\mathcal{O} = \prod_{v \text{ lugar de K}} \mathcal{O}_v$.

# Índice

## Cuerpos finitos

- El anillo $\mathbb{Z}/n$ es un cuerpo si y sólo si $n = p$ es un número primo. En tal caso, denotamos el correspondiente cuerpo por $\mathbb{F}_p$.

# Cuerpos finitos

- El anillo $\mathbb{Z}/n$ es un cuerpo si y sólo si $n = p$ es un número primo. En tal caso, denotamos el correspondiente cuerpo por $\mathbb{F}_p$.
- ¿Existen más cuerpos finitos?

# Cuerpos finitos

- El anillo $\mathbb{Z}/n$ es un cuerpo si y sólo si $n = p$ es un número primo. En tal caso, denotamos el correspondiente cuerpo por $\mathbb{F}_p$.
- ¿Existen más cuerpos finitos? Sí, las extensiones finitas de los $\mathbb{F}_p$,

$$\mathbb{F}_q, \text{ para } q = p^n, n \in \mathbb{N}.$$

# Cuerpos de funciones

- Sea $k = \mathbb{F}_q$ un cuerpo finito.

# Cuerpos de funciones

- Sea $k = \mathbb{F}_q$ un cuerpo finito.
- Una curva proyectiva lisa sobre $k$ es un subconjuto $X \subset \mathbb{P}^n_k$, definido por los ceros de un conjunto de polinomios homogéneos, sin singularidades, y de dimensión 1.

# Cuerpos de funciones

- Sea $k = \mathbb{F}_q$ un cuerpo finito.
- Una curva proyectiva lisa sobre $k$ es un subconjuto $X \subset \mathbb{P}^n_k$, definido por los ceros de un conjunto de polinomios homogéneos, sin singularidades, y de dimensión 1.
- Si $U \subset X \subset \mathbb{P}^n_k$ es un abierto de una curva proyectiva lisa, una función $f : U \longrightarrow k$ es regular si $f = g/h$, para $g, h \in k[X_0, \ldots, X_n]$ polinomios homogéneos.

# Cuerpos de funciones

- Sea $k = \mathbb{F}_q$ un cuerpo finito.
- Una curva proyectiva lisa sobre $k$ es un subconjuto $X \subset \mathbb{P}^n_k$, definido por los ceros de un conjunto de polinomios homogéneos, sin singularidades, y de dimensión 1.
- Si $U \subset X \subset \mathbb{P}^n_k$ es un abierto de una curva proyectiva lisa, una función $f : U \longrightarrow k$ es regular si $f = g/h$, para $g, h \in k[X_0, \dots, X_n]$ polinomios homogéneos.
- Definimos el cuerpo de funciones racionales en $X$ como

$$k(X) = \{(U, f) : U \subset X \text{ abierto y } f : U \longrightarrow k \text{ regular}\} /\sim,$$

con la relación $\sim$ dada por $(U, f) \sim (V, g)$ si y sólo si $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$.

# Cuerpos de funciones

- Sea $k = \mathbb{F}_q$ un cuerpo finito.
- Una curva proyectiva lisa sobre $k$ es un subconjuto $X \subset \mathbb{P}^n_k$, definido por los ceros de un conjunto de polinomios homogéneos, sin singularidades, y de dimensión 1.
- Si $U \subset X \subset \mathbb{P}^n_k$ es un abierto de una curva proyectiva lisa, una función $f\colon U \longrightarrow k$ es regular si $f = g/h$, para $g, h \in k[X_0, \ldots, X_n]$ polinomios homogéneos.
- Definimos el cuerpo de funciones racionales en $X$ como

$$k(X) = \{(U, f) : U \subset X \text{ abierto y } f\colon U \longrightarrow k \text{ regular}\} /\sim,$$

con la relación $\sim$ dada por $(U, f) \sim (V, g)$ si y sólo si $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$.
- Los cuerpos $K$ de la forma $K = k(X)$, para $k$ un cuerpo finito y $X$ una curva proyectiva lisa sobre $k$ se llaman cuerpos de funciones.

# Cuerpos de funciones

- Sea $k = \mathbb{F}_q$ un cuerpo finito.
- Una curva proyectiva lisa sobre $k$ es un subconjuto $X \subset \mathbb{P}^n_k$, definido por los ceros de un conjunto de polinomios homogéneos, sin singularidades, y de dimensión 1.
- Si $U \subset X \subset \mathbb{P}^n_k$ es un abierto de una curva proyectiva lisa, una función $f : U \longrightarrow k$ es regular si $f = g/h$, para $g, h \in k[X_0, \ldots, X_n]$ polinomios homogéneos.
- Definimos el cuerpo de funciones racionales en $X$ como

$$k(X) = \{(U, f) : U \subset X \text{ abierto y } f : U \longrightarrow k \text{ regular}\} /\sim,$$

  con la relación $\sim$ dada por $(U, f) \sim (V, g)$ si y sólo si $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$.
- Los cuerpos $K$ de la forma $K = k(X)$, para $k$ un cuerpo finito y $X$ una curva proyectiva lisa sobre $k$ se llaman cuerpos de funciones.

### Ejemplo

$X = \mathbb{P}^1_k$. $k(X) = k(T) = \{p/q : p, q \in k[T], \gcd(p, q) = 1\}$ .

# El programa de Langlands para cuerpos de funciones

- Para cuerpos de funciones, el programa de Langlands conjetura una correspondencia que se expresa igual

$$\left\{\text{Rep. } n\text{-dimensionales de } \mathrm{Gal}(\bar{K}|K)\right\} \leftrightarrow \{\text{Rep. automórficas de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)\},$$

donde $K = k(X)$ es el cuerpo de funciones racionales de una curva proyectiva lisa $X$ sobre un cuerpo finito $k = \mathbb{F}_q$.

# El programa de Langlands para cuerpos de funciones

- Para cuerpos de funciones, el programa de Langlands conjetura una correspondencia que se expresa igual

$$\left\{\text{Rep. } n\text{-dimensionales de } \mathrm{Gal}(\bar{K}|K)\right\} \leftrightarrow \{\text{Rep. automórficas de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)\},$$

  donde $K = k(X)$ es el cuerpo de funciones racionales de una curva proyectiva lisa $X$ sobre un cuerpo finito $k = \mathbb{F}_q$.
- Los adèles $\mathbb{A}_K$ se definen igual, pero esta vez los valores absolutos admiten una interpretación geométrica.

# El programa de Langlands para cuerpos de funciones

- Para cuerpos de funciones, el programa de Langlands conjetura una correspondencia que se expresa igual

$$\left\{\text{Rep. } n\text{-dimensionales de } \mathrm{Gal}(\bar{K}|K)\right\} \leftrightarrow \{\text{Rep. automórficas de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)\},$$

  donde $K = k(X)$ es el cuerpo de funciones racionales de una curva proyectiva lisa $X$ sobre un cuerpo finito $k = \mathbb{F}_q$.
- Los adèles $\mathbb{A}_K$ se definen igual, pero esta vez los valores absolutos admiten una interpretación geométrica.
- Antes de seguir, tenemos que hablar del functor de puntos.

# El functor de puntos

- Supongamos que $X$ es un conjunto definido por los ceros de un polinomio $f \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ con coeficientes enteros.

# El functor de puntos

- Supongamos que $X$ es un conjunto definido por los ceros de un polinomio $f \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ con coeficientes enteros.
- Podemos considerar el «conjunto de ceros» de $f$ en cualquier anillo $A$

$$X(A) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n : f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Este es el conjunto de $A$-puntos de $X$.

- Supongamos que $X$ es un conjunto definido por los ceros de un polinomio $f \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ con coeficientes enteros.
- Podemos considerar el «conjunto de ceros» de $f$ en cualquier anillo $A$

$$X(A) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A^n : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\} .$$

Este es el conjunto de $A$-puntos de $X$.
- Además, un homomorfismo de anillos $\varphi : A \to B$ induce

$$\begin{aligned} X(\varphi) : X(A) &\longrightarrow X(B) \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)). \end{aligned}$$

# El functor de puntos. Ejemplos

## Ejemplo

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^1 &= \left\{\text{ceros de } f(X,Y) = X^2 + Y^2 - 1\right\}. \\
\mathbf{S}^1(\mathbb{Z}) &= \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}, \\
\mathbf{S}^1(\mathbb{Q}) &= \{\text{Ternas pitagóricas}\}/\mathbb{Z}, \\
\mathbf{S}^1(\mathbb{R}) &= S^1, \\
\mathbf{S}^1(\mathbb{C}) &\cong \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : zw = 1\right\}.
\end{aligned}$$

# El functor de puntos. Ejemplos

## Ejemplo

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^1 &= \left\{\text{ceros de } f(X,Y) = X^2 + Y^2 - 1\right\}.\\
\mathbf{S}^1(\mathbb{Z}) &= \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\},\\
\mathbf{S}^1(\mathbb{Q}) &= \{\text{Ternas pitagóricas}\}/\mathbb{Z},\\
\mathbf{S}^1(\mathbb{R}) &= S^1,\\
\mathbf{S}^1(\mathbb{C}) &\cong \left\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 : zw = 1\right\}.
\end{aligned}$$

- Si $k$ es un cuerpo, y $X$ es un conjunto algebraico definido sobre $k$, podemos considerar $X(k')$ para cualquier extensión de cuerpos $k'|k$.

## Ejemplo

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^1 &= \left\{\text{ceros de } f(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1\right\}. \\
\mathbf{S}^1(\mathbb{Z}) &= \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}, \\
\mathbf{S}^1(\mathbb{Q}) &= \{\text{Ternas pitagóricas}\}/\mathbb{Z}, \\
\mathbf{S}^1(\mathbb{R}) &= S^1, \\
\mathbf{S}^1(\mathbb{C}) &\cong \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : zw = 1\right\}.
\end{aligned}$$

- Si $k$ es un cuerpo, y $X$ es un conjunto algebraico definido sobre $k$, podemos considerar $X(k')$ para cualquier extensión de cuerpos $k'|k$. En particular, $X(\bar{k}) \neq \varnothing$.

# El functor de puntos. Ejemplos

## Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}^1 &= \left\{\text{ceros de } f(X,Y) = X^2 + Y^2 - 1\right\}. \\
\mathbf{S}^1(\mathbb{Z}) &= \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}, \\
\mathbf{S}^1(\mathbb{Q}) &= \{\text{Ternas pitagóricas}\}/\mathbb{Z}, \\
\mathbf{S}^1(\mathbb{R}) &= S^1, \\
\mathbf{S}^1(\mathbb{C}) &\cong \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : zw = 1\right\}.
\end{aligned}
$$

- Si $k$ es un cuerpo, y $X$ es un conjunto algebraico definido sobre $k$, podemos considerar $X(k')$ para cualquier extensión de cuerpos $k'|k$. En particular, $X(\overline{k}) \neq \varnothing$.

## Ejemplo

$X = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = -1\right\}$, $X(\mathbb{R}) = \varnothing$, pero $X(\mathbb{C}) \neq \varnothing$.

# Valores absolutos y puntos de $X$

**Teorema**

*Si $K = k(X)$ es un cuerpo de funciones, existe una biyección $X(\bar{k}) \cong \{\text{Lugares de } K\}$.*

## Valores absolutos y puntos de $X$

**Teorema**

*Si* $K = k(X)$ *es un cuerpo de funciones, existe una biyección* $X(\overline{k}) \cong \{\text{Lugares de } K\}$.

- Si $x \in X(\overline{k})$, en particular $x \in X(k')$ para alguna extensión finita $k'/k$.

# Valores absolutos y puntos de $X$

## Teorema

*Si $K = k(X)$ es un cuerpo de funciones, existe una biyección $X(\bar{k}) \cong \{Lugares\ de\ K\}$.*

- Si $x \in X(\bar{k})$, en particular $x \in X(k')$ para alguna extensión finita $k'/k$.
- La compleción de $K$ con respecto al valor absoluto correspondiente a $x$ es el cuerpo de series de Laurent formales

$$K_x = k((X - x)) = \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} a_n (X - x)^n : a_n \in k, N \in \mathbb{Z} \right\}.$$

# Valores absolutos y puntos de $X$

**Teorema**

*Si $K = k(X)$ es un cuerpo de funciones, existe una biyección $X(\bar{k}) \cong \{$Lugares de $K\}$.*

- Si $x \in X(\bar{k})$, en particular $x \in X(k')$ para alguna extensión finita $k'/k$.
- La compleción de $K$ con respecto al valor absoluto correspondiente a $x$ es el cuerpo de series de Laurent formales

$$K_x = k((X-x)) = \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} a_n (X-x)^n : a_n \in k, N \in \mathbb{Z} \right\}.$$

El correspondiente anillo de enteros está formado por las series de potencias formales

$$\mathcal{O}_x = k[[X-x]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-x)^n : a_n \in k \right\}.$$

# Valores absolutos y puntos de $X$

## Teorema

*Si $K = k(X)$ es un cuerpo de funciones, existe una biyección $X(\bar{k}) \cong \{\text{Lugares de } K\}$.*

- Si $x \in X(\bar{k})$, en particular $x \in X(k')$ para alguna extensión finita $k'/k$.
- La compleción de $K$ con respecto al valor absoluto correspondiente a $x$ es el cuerpo de series de Laurent formales

$$K_x = k((X-x)) = \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} a_n (X-x)^n : a_n \in k, N \in \mathbb{Z} \right\}.$$

  El correspondiente anillo de enteros está formado por las series de potencias formales

$$\mathcal{O}_x = k[[X-x]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-x)^n : a_n \in k \right\}.$$

- En consecuencia: $\mathbb{A}_K = \{(f_x)_{x \in X} : f_x \in K_x, f_x \in \mathcal{O}_x \text{ para casi todo } x\}$.

# Índice

# Superficies de Riemann

- Las curvas proyectivas lisas sobre $\mathbb{C}$ se corresponden con las superficies de Riemann compactas.

## Superficies de Riemann

- Las curvas proyectivas lisas sobre $\mathbb{C}$ se corresponden con las superficies de Riemann compactas.
- Una superficie de Riemann compacta es una terna $X = (S, \mathcal{U}, \{\varphi_U\}_{U\in\mathcal{U}})$, con

# Superficies de Riemann

- Las curvas proyectivas lisas sobre $\mathbb{C}$ se corresponden con las superficies de Riemann compactas.
- Una superficie de Riemann compacta es una terna $X = (S, \mathcal{U}, \{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{U}})$, con
  - $S$ espacio topológico compacto, conexo y $T_2$;

# Superficies de Riemann

- Las curvas proyectivas lisas sobre $\mathbb{C}$ se corresponden con las superficies de Riemann compactas.
- Una superficie de Riemann compacta es una terna $X = (S, \mathcal{U}, \{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{U}})$, con
    - $S$ espacio topológico compacto, conexo y $T_2$;
    - $\mathcal{U}$ recubrimiento por abiertos de $S$;

# Superficies de Riemann

- Las curvas proyectivas lisas sobre $\mathbb{C}$ se corresponden con las superficies de Riemann compactas.
- Una superficie de Riemann compacta es una terna $X = (S, \mathcal{U}, \{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{U}})$, con
  - $S$ espacio topológico compacto, conexo y $T_2$;
  - $\mathcal{U}$ recubrimiento por abiertos de $S$;
  - para cada $U \in \mathcal{U}$, $\varphi_U : U \to \mathbb{C}$ define un homeomorfismo de $U$ con un dominio $D_U \subset \mathbb{C}$ de modo que,

# Superficies de Riemann

- Las curvas proyectivas lisas sobre $\mathbb{C}$ se corresponden con las superficies de Riemann compactas.
- Una superficie de Riemann compacta es una terna $X = (S, \mathcal{U}, \{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{U}})$, con
  - $S$ espacio topológico compacto, conexo y $T_2$;
  - $\mathcal{U}$ recubrimiento por abiertos de $S$;
  - para cada $U \in \mathcal{U}$, $\varphi_U : U \to \mathbb{C}$ define un homeomorfismo de $U$ con un dominio $D_U \subset \mathbb{C}$ de modo que,dado otro $V \in \mathcal{U}$, la función

$$\psi_{UV} : \varphi_U(U \cap V) \subset D_U \overset{\varphi_U^{-1}}{\longrightarrow} U \cap V \overset{\varphi_V}{\longrightarrow} \varphi_V(U \cap V) \subset D_V,$$

    es holomorfa.

# Superficies de Riemann

- Las curvas proyectivas lisas sobre $\mathbb{C}$ se corresponden con las superficies de Riemann compactas.
- Una superficie de Riemann compacta es una terna $X = (S, \mathcal{U}, \{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{U}})$, con
  - $S$ espacio topológico compacto, conexo y $T_2$;
  - $\mathcal{U}$ recubrimiento por abiertos de $S$;
  - para cada $U \in \mathcal{U}$, $\varphi_U : U \to \mathbb{C}$ define un homeomorfismo de $U$ con un dominio $D_U \subset \mathbb{C}$ de modo que,dado otro $V \in \mathcal{U}$, la función

$$\psi_{UV} : \varphi_U(U \cap V) \subset D_U \xrightarrow{\varphi_U^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\varphi_V} \varphi_V(U \cap V) \subset D_V,$$

    es holomorfa.
- En analogía con el caso de cuerpos finitos, para cada punto $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_x &= \mathbb{C}[[X - x]] \cong \mathbb{C}[[T]] := \mathcal{O}, \\ K_x &= \mathbb{C}((X - x)) \cong \mathbb{C}((T)) := K, \\ \mathbb{A}_X &= \mathbb{A}_{\mathbb{C}(X)} = \{(f_x)_{x \in X} : f_x \in K, f_x \in \mathcal{O} \text{ para casi todo } x\}. \end{aligned}$$

# Grupo de Galois y grupo fundamental

- Sea $Y \to X$ un homomorfismo de curvas proyectivas lisas de tal forma que $Y$ es un espacio recubridor de $X$.

# Grupo de Galois y grupo fundamental

- Sea $Y \longrightarrow X$ un homomorfismo de curvas proyectivas lisas de tal forma que $Y$ es un espacio recubridor de $X$. En tal caso $k(Y)|k(X)$ es una extensión y

$$\mathrm{Gal}(k(Y)|k(X)) \cong \mathrm{Deck}(Y|X) = \left\{ f \in \mathrm{Aut}(Y) : \begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \text{ conmuta} \right\}.$$

# Grupo de Galois y grupo fundamental

- Sea $Y \longrightarrow X$ un homomorfismo de curvas proyectivas lisas de tal forma que $Y$ es un espacio recubridor de $X$. En tal caso $k(Y)|k(X)$ es una extensión y

$$\mathrm{Gal}(k(Y)|k(X)) \cong \mathrm{Deck}(Y|X) = \left\{ f \in \mathrm{Aut}(Y) : \begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \text{ conmuta} \right\}.$$

- Podemos pensar en $\mathrm{Gal}(\overline{k(X)}|k(X))$ como un «grupo fundamental» de $X$.

# Grupo de Galois y grupo fundamental

- Sea $Y \longrightarrow X$ un homomorfismo de curvas proyectivas lisas de tal forma que $Y$ es un espacio recubridor de $X$. En tal caso $k(Y)|k(X)$ es una extensión y

$$\mathrm{Gal}(k(Y)|k(X)) \cong \mathrm{Deck}(Y|X) = \left\{ f \in \mathrm{Aut}(Y) : \begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \text{ conmuta} \right\}.$$

- Podemos pensar en $\mathrm{Gal}(\overline{k(X)}|k(X))$ como un «grupo fundamental» de $X$.
- Obtenemos entonces la siguiente analogía

$$\text{Cuerpos de funciones } K \leftrightarrow \text{Superficies de Riemann } X$$
$$\text{Representaciones de } \mathrm{Gal}(\bar{K}|K) \leftrightarrow \text{Representaciones de } \pi_1(X).$$

# Sistemas locales

- Las representaciones del grupo fundamental pueden interpretarse geométricamente como sistemas locales.

# Sistemas locales

- Las representaciones del grupo fundamental pueden interpretarse geométricamente como sistemas locales.
- Un sistema local en una superficie de Riemann $X$ está dado por
  - un recubrimiento por abiertos $\mathcal{U}$ de $X$,
  - para cada $U \in \mathcal{U}$ un espacio vectorial $\mathcal{F}(U)$,
  - para cada $U, V \in \mathcal{U}$ con $U \cap V \neq \emptyset$, un isomorfismo

$$g_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V).$$

# Sistemas locales

- Las representaciones del grupo fundamental pueden interpretarse geométricamente como sistemas locales.
- Un sistema local en una superficie de Riemann $X$ está dado por
  - un recubrimiento por abiertos $\mathcal{U}$ de $X$,
  - para cada $U \in \mathcal{U}$ un espacio vectorial $\mathcal{F}(U)$,
  - para cada $U, V \in \mathcal{U}$ con $U \cap V \neq \varnothing$, un isomorfismo

$$g_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V).$$

- La monodromía da una equivalencia entre los sistemas locales y las representaciones lineales de $\pi_1(X)$.

# Adèles y fibrados

- Un fibrado holomorfo de rango $n$ sobre una superficie de Riemann $n$ es un espacio topológico $p : E \longrightarrow X$ tal que

# Adèles y fibrados

- Un fibrado holomorfo de rango $n$ sobre una superficie de Riemann $n$ es un espacio topológico $p : E \to X$ tal que
  - para cada $x \in X$ existe un entorno $U$ de $x$ y un homeomorfismo $\varphi_U : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ tal que el diagrama
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$
conmuta;

# Adèles y fibrados

- Un fibrado holomorfo de rango $n$ sobre una superficie de Riemann $n$ es un espacio topológico $p : E \longrightarrow X$ tal que
  - para cada $x \in X$ existe un entorno $U$ de $x$ y un homeomorfismo $\varphi_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^n$ tal que el diagrama
    $$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$
    conmuta;
  - si escribimos $\varphi_U^{-1} \circ \varphi_V(x, v) = (x, g_{UV}(x)v)$, las correspondientes aplicaciones $g_{UV} : U \cap V \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ son holomorfas.

# Adèles y fibrados

- Un fibrado holomorfo de rango $n$ sobre una superficie de Riemann $n$ es un espacio topológico $p : E \longrightarrow X$ tal que
  - para cada $x \in X$ existe un entorno $U$ de $x$ y un homeomorfismo $\varphi_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^n$ tal que el diagrama
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$
conmuta;
  - si escribimos $\varphi_U^{-1} \circ \varphi_V(x, v) = (x, g_{UV}(x)v)$, las correspondientes aplicaciones $g_{UV} : U \cap V \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ son holomorfas.
- Sea
$$\mathrm{Bun}_n(X) = \{\text{Fibrados holomorfos de rango } n \text{ sobre } X\} / \text{isomorfismo}.$$

# Adèles y fibrados

- Un fibrado holomorfo de rango $n$ sobre una superficie de Riemann $n$ es un espacio topológico $p : E \longrightarrow X$ tal que
  - para cada $x \in X$ existe un entorno $U$ de $x$ y un homeomorfismo $\varphi_U : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ tal que el diagrama
    $$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$
    conmuta;
  - si escribimos $\varphi_U^{-1} \circ \varphi_V(x, v) = (x, g_{UV}(x)v)$, las correspondientes aplicaciones $g_{UV} : U \cap V \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ son holomorfas.
- Sea
$$\mathrm{Bun}_n(X) = \{\text{Fibrados holomorfos de rango } n \text{ sobre } X\} / \text{isomorfismo}.$$

**Teorema (Weil)**

*Existe una biyección*
$$\mathrm{Bun}_n(X) \cong \mathrm{GL}_n(K) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_X) / \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}).$$

# El programa de Langlands geométrico

- El último paso para completar el enunciado de la versión geométrica del programa de Langlands consiste en dar un análogo de las representaciones automórficas para $\mathrm{Bun}_n(X)$.

# El programa de Langlands geométrico

- El último paso para completar el enunciado de la versión geométrica del programa de Langlands consiste en dar un análogo de las representaciones automórficas para $\mathrm{Bun}_n(X)$.
- Sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ las funciones automórficas en $\mathrm{GL}_n(K)\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ pueden obtenerse a partir de haces perversos en ese espacio.

- El último paso para completar el enunciado de la versión geométrica del programa de Langlands consiste en dar un análogo de las representaciones automórficas para $\mathrm{Bun}_n(X)$.
- Sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ las funciones automórficas en $\mathrm{GL}_n(K)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ pueden obtenerse a partir de haces perversos en ese espacio.
- Sobre $\mathbb{C}$, la correspondencia de Riemann-Hilbert identifica los haces perversos con los $\mathcal{D}$-módulos.

# El programa de Langlands geométrico

- El último paso para completar el enunciado de la versión geométrica del programa de Langlands consiste en dar un análogo de las representaciones automórficas para $\mathrm{Bun}_n(X)$.
- Sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ las funciones automórficas en $\mathrm{GL}_n(K)\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ pueden obtenerse a partir de haces perversos en ese espacio.
- Sobre $\mathbb{C}$, la correspondencia de Riemann-Hilbert identifica los haces perversos con los $\mathcal{D}$-módulos.
- Finalmente, llegamos a que, para una superficie de Riemann compacta $X$, el programa de Langlands geométrico ha de relacionar objetos de la forma

$$\{\text{Sistemas locales de rango } n \text{ en } X\} \leftrightarrow \{\mathcal{D}\text{-módulos en } \mathrm{Bun}_n(X)\}\,.$$

# Referencias


- Edward Frenkel. *Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory.* `https://arxiv.org/pdf/hep-th/0512172.pdf`.