Notas de álgebra homológica

Guillermo Gallego

Índice general

Capítulo 1

Categorías y functores

Localmente pequeña, objeto final e inicial, factoriza, producto y coproducto (usar pr1 y pr2).

diagramas cartesianos y productos fibrados

retractos y secciones

transformaciones naturales

Yoneda, functores representables

poner de ejemplo la categoria de R-módulos

Capítulo 2

Categorías abelianas

Las categorías abelianas son el contexto general adecuado para la formulación del álgebra homológica. Esto quiere decir que en una categoría abeliana tiene sentido hablar del núcleo, la imagen y el conúcleo de un morfismo, existe la noción de sucesión exacta y, en particular, de sucesión exacta corta, y podemos considerar complejos de cadenas (y de cocadenas) y tomar su homología (respectivamente, su cohomología). Estos objetos de homología y cohomología tendrán las propiedades esperadas, como la functorialidad y la existencia de una sucesión exacta larga en homología asociada a una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. De manera muy laxa, podemos entender las categorías abelianas como aquellas categorías en las que se cumple el «lema de la serpiente».

Los ejemplos más sencillos de categorías abelianas son la categoría $\mathbf{Vect}_k$, formada por los espacios vectoriales sobre un cuerpo k, con las aplicaciones lineales entre ellos, y la categoría $\mathbf{Ab}$ de los grupos abelianos. Estas dos categorías son ejemplos particulares de categorías $\mathbf{Mod}_R$, formadas por los módulos sobre un anillo conmutativo R. En efecto, $\mathbf{Vect}_k = \mathbf{Mod}_k$, mientras que $\mathbf{Ab} = \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$, donde $\mathbb{Z}$ denota el anillo de los números enteros. Esta observación sugiere que tal vez bastaría trabajar con las categorías de la forma $\mathbf{Mod}_R$, sin embargo, existen otras categorías abelianas interesantes en diversos campos que a priori no son de esta forma. Algunos ejemplos de estas categorías son la categoría $\mathbf{Sh}(X)$, de los haces de grupos abelianos sobre X, donde X es un espacio topológico (o, más generalmente, una categoría equipada con una topología de Grothendieck). Otros ejemplos muy comunes vienen dados en el caso que $(X, \mathscr{O}_X)$ es un espacio anillado y se consideran la categoría $\mathbf{Mod}_{\mathscr{O}_X}$, de los haces de $\mathscr{O}_X$-módulos, o la categoría $\mathbf{Coh}(X)$ de los haces de $\mathscr{O}_X$-módulos coherentes.

2.1. Categorías aditivas

Sea $\mathscr{A}$ una categoría localmente pequeña.

Definición 2.1.1. Decimos que $\mathscr{A}$ es *preaditiva* si, para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$ es un grupo abeliano (cuya operación denotamos por $+$) y, para cualquier otro $Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, la aplicación de composición

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Z)$$

es bilineal. Esto quiere decir que

$$(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h,$$
$$f\circ (h+k) = f\circ h + f\circ k,$$

para $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Y,Z)$ y $h,k \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)$.

Dada otra categoría preaditiva $\mathscr{B}$, decimos que un functor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es *aditivo* si la aplicación inducida $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(X),F(Y))$ es un homomorfismo de grupos abelianos para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$.

Una observación que se deduce inmediatamente de la definición es que, si X e Y son objetos de una categoría preaditiva $\mathscr{A}$, como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)$ es un grupo abeliano, éste contiene al menos al elemento neutro $0 : X \to Y$.

Definición 2.1.2. Un *objeto cero* en una categoría preaditiva $\mathscr{A}$ es un elemento $0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ tal que $\mathrm{id}_0 = 0 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(0,0)$.

Proposición 2.1.3. *Supongamos que* $\mathscr{A}$ *una categoría preaditiva y* $0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. 0 *es un objeto inicial,*

2. 0 *es un objeto final,*

3. 0 *es un objeto cero.*

En particular, si existe un objeto cero en $\mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, *entonces es único salvo isomorfismo. Además, un morfismo* $f : X \to Y$ *factoriza por* 0 *si y sólo si* $f = 0 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)$.

Demostración. Claramente, tanto **1** como **2** implican **3**, ya que si 0 es un objeto final o inicial, se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(0,0) = \{\mathrm{id}_0\}$. Ahora, si $\mathrm{id}_0 = 0$, $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(0,X)$, entonces, como la composición es bilineal

$$f = f\circ \mathrm{id}_0 = f \circ 0 = 0.$$

Por tanto, $f = 0$, luego 0 es inicial en $\mathscr{A}$. Análogamente, tomando $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,0)$, tenemos que 0 es final. Los objetos finales e iniciales son únicos salvo isomorfismo, lo que garantiza que 0 lo es. Finalmente, si $f : X \to Y$ es igual a $g\circ h$, para $h : X \to 0$ y $g : 0 \to Y$, como 0 es un objeto final e inicial, tenemos que $g = 0$ y $h = 0$, luego $f = 0$, por bilinealidad. □

Proposición 2.1.4. *Sea* $\mathscr{A}$ *una categoría preaditiva y* $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. *Entonces existe el producto* $X\times Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ *si y sólo si existe el coproducto* $X \sqcup Y$. *En ese caso, además* $X\times Y$ *y* $X \sqcup Y$ *son isomorfos.*

Demostración. Supongamos que existe $X\times Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$. Consideremos las aplicaciones $i_1 = (\mathrm{id}_X, 0) : X \to X\times Y$ e $i_2 = (0, \mathrm{id}_Y) : Y \to X\times Y$. Nótese además que

$$i_1 \circ \mathrm{pr}_1 + i_2\circ \mathrm{pr}_2 = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{X\times Y}.$$

Vamos a verificar ahora que $(X\times Y, i_1, i_2)$ cumple la propiedad universal del coproducto. Para ello, consideremos $Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y morfismos $f_1 : X \to Z$ y $f_2 : Y \to Z$.

Supongamos ahora que existiera f tal que $f \circ i_1 = f_1$ y $f \circ i_2 = f_2$. Entonces, por la bilinealidad,

$$f = f \circ \mathrm{id}_{X\times Y} = f \circ (i_1 \circ \mathrm{pr}_1 + i_2 \circ \mathrm{pr}_2) = f_1 \circ \mathrm{pr}_1 + f_2 \circ \mathrm{pr}_2 .$$

Esta fórmula prueba la existencia y unicidad de tal f. Por tanto, $X \sqcup Y$ existe y, de hecho, es isomorfo a $X \times Y$. En la otra dirección el argumento es completamente análogo. □

Definición 2.1.5. Dados dos objetos X e Y de una categoría preaditiva, definimos la *suma directa* $X \oplus Y$ como el producto $X \times Y$ equipado de los morfismos pr_1, pr_2, i_1 e i_2 canónicamente asociados a este objeto como producto y coproducto, respectivamente.

Proposición 2.1.6. *Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son dos categorías preaditivas y $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es un functor aditivo, entonces envía el cero al cero y las sumas directas a las sumas directas.*

Demostración. Que envía sumas directas a sumas directas es inmediato por la functorialidad de F aplicada a la propiedad universal del producto. Ahora, como $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(0,0) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(0), F(0))$ es un homomorfismo de grupos abelianos,

$$\mathrm{id}_{F(0)} = F(\mathrm{id}_0) = F(0) = 0,$$

luego $F(0)$ es un objeto cero en $\mathscr{B}$. □

Definición 2.1.7. Decimos que una categoría $\mathscr{A}$ es *aditiva* si

1. es preaditiva,
2. tiene un objeto cero $0 \in \mathscr{A}$, y
3. tiene sumas directas finitas, esto es, para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Obj}(A)$ existe la suma directa $X \oplus Y \in \mathrm{Obj}(A)$.

2.2. Núcleos y conúcleos

Sean $\mathscr{A}$ una categoría preaditiva, $X, Y \in \mathscr{A}$ dos objetos y $f : X \to Y$ un morfismo. Podemos definir los functores $K_f : \mathscr{A} \to \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}$ y $C_f : \mathscr{A} \to \mathbf{Ab}$ como sigue. Si $Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, definimos $K_f(Z)$ y $C_f(Z)$ como

$$K_f(Z) = \ker(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Z, X) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Z, Y))$$
$$C_f(Z) = \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Z) \xrightarrow{-\circ f} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Y, Z)).$$

Ahora, si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(V, W)$, definimos

$$\begin{aligned} K_f(g) : K_f(W) &\longrightarrow K_f(V) \\ h &\longmapsto h \circ g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_f(g) : C_f(V) &\longrightarrow C_f(W) \\ h &\longmapsto g \circ h. \end{aligned}$$

Supongamos que el functor K_f es representable. En ese caso existe un objeto $\ker f \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y un isomorfismo natural $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \ker f) \to K_f$. Además, asociado al morfismo $\mathrm{id}_{\ker f}$, tenemos un morfismo $i_f : \ker f \to X$ con $f \circ i_f = 0$ definido por

$$i_f = \Phi_{\ker f}(\mathrm{id}_{\ker f}) \in K_f(\ker f).$$

Dualmente, si el functor C_f es representable existe un objeto $\operatorname{coker} f \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ y un isomorfismo natural $\Psi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\operatorname{coker} f, -) \to C_f$, y podemos definir un morfismo $p_f : Y \to \operatorname{coker} f$ con $p_f \circ f = 0$ como

$$p_f = \Psi_{\operatorname{coker} f}(\mathrm{id}_{\operatorname{coker} f}) \in C_f(\operatorname{coker} f).$$

Nótese que el lema de Yoneda garantiza que si K_f o C_f son representables entonces $\ker f$ y $\operatorname{coker} f$ son únicos salvo isomorfismo. Por tanto, damos la siguiente definición.

Definición 2.2.1. Si el functor K_f es representable, definimos el *núcleo de f* como el par $(\ker f, i_f)$. Por otra parte, si C_f es representable, definimos el *conúcleo de f* como el par $(\operatorname{coker} f, p_f)$.

Proposición 2.2.2. *El núcleo de f, si existe, cumple la siguiente propiedad universal: si $i : Z \to X$ cumple que $f \circ i = 0$, entonces existe un único morfismo $g : Z \to \ker f$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, "i_f"] & X \\ & Z. \arrow[u, "i"'] \arrow[ul, dashed, "g"] \end{tikzcd}$$

Además, i_f es un monomorfismo.

Dualmente, si existe el conúcleo de f, cumple la siguiente propiedad universal: si $p : Y \to Z$ cumple que $p \circ f = 0$, entonces existe un único morfismo $g : \operatorname{coker} f \to Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, "p"] & \operatorname{coker} f \arrow[dl, dashed, "g"] \\ Z. & \end{tikzcd}$$

Además, p_f es un epimorfismo.

Demostración. Lo demostramos para el núcleo; para el conúcleo los argumentos son totalmente análogos. Si $i : Z \to X$ cumple que $f \circ i = 0$, entonces $i \in K_f(Z)$. Por tanto, existe $g \in \mathrm{Hom}(Z, \ker f)$ tal que $\Phi_Z(g) = i$. Veamos que, en efecto, $i = i_f \circ g$. Esto se debe a que, como Φ es una transformación natural, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} K_f(Z) \arrow[r, "\Phi_Z"] & \mathrm{Hom}(Z, \ker f) \\ K_f(\ker f) \arrow[u, "-\circ g"] \arrow[r, "\Phi_{\ker f}"] & \mathrm{Hom}(\ker f, \ker f). \arrow[u, "-\circ g"'] \end{tikzcd}$$

Por tanto

$$i = \Phi_Z(g) = \Phi_Z(\mathrm{id}_X \circ g) = \Phi_{\ker f}(\mathrm{id}_X) \circ g = i_f \circ g.$$

Ahora, dadas $h_1, h_2 : Z \to \ker f$ tales que $i_f \circ h_1 = i_f \circ h_2$, entonces $i = i_f \circ (h_1 - h_2) = 0$. Por tanto, $f \circ i = 0$. Por lo que acabamos de ver, existe una única $g : Z \to \ker f$ tal que $i = i_f \circ g$. Pero, como $i = 0$, tenemos que $g = 0$, de modo que $h_1 - h_2 = 0$. Concluimos que $h_1 = h_2$. □

Ejemplo 2.2.3. Supongamos que X e Y son dos objetos de una categoría preaditiva y que la suma directa $X \oplus Y$ existe. Entonces es fácil comprobar que $i_1 : X \to X \oplus Y$ es el núcleo de $\mathrm{pr}_2 : X \oplus Y \to Y$ y, dualmente, $\mathrm{pr}_1 : X \oplus Y \to X$ es el conúcleo de $i_2 : Y \to X \oplus Y$.

2.3. Categorías abelianas

Definición 2.3.1. Sean $\mathscr{A}$ una categoría preaditiva y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathscr{A}$. Si existe el núcleo de f, la *coimagen* $\mathrm{coim}\, f$ *de* f es el conúcleo del morfismo $i_f : \ker f \to X$, supuesto que existe. Si existe el conúcleo de f, la *imagen* $\mathrm{im}\, f$ *de* f es el núcleo del morfismo $p_f : Y \to \mathrm{coker}\, f$.

Proposición 2.3.2. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo en una categoría preaditiva cuyos núcleo, conúcleo, imagen y coimagen existen. Entonces f factoriza de manera única como $X \to \mathrm{coim}\, f \to \mathrm{im}\, f \to Y$.*

Demostración. Como $f : X \to Y$ cumple que $f \circ i_f = 0$, por la propiedad universal del conúcleo existe un morfismo natural $g : \mathrm{coim}\, f \to Y$ y una factorización única de f por $X \to \mathrm{coim}\, f \to Y$. Ahora, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathrm{coim}\, f \arrow[dl, "g"] \\ Y \arrow[d, "p_f"] & \\ \mathrm{coker}\, f. & \end{tikzcd}$$

Como $p_f \circ f = 0$, por la unicidad en propiedad universal del conúcleo, $p_f \circ g = 0$. Por tanto, podemos aplicar la propiedad universal del núcleo para obtener un único morfismo $h : \mathrm{coim}\, f \to \mathrm{im}\, f$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathrm{im}\, f \arrow[r] & Y \\ & \mathrm{coim}\, f. \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Obtenemos entonces

$$X \longrightarrow \operatorname{coim} f \xrightarrow{h} \operatorname{im} f \longrightarrow Y,$$

una factorización única de f. □

Definición 2.3.3. En el contexto de la proposición anterior, decimos que *se cumple el teorema de isomorfía para* f si el morfismo natural $h : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ es un isomorfismo.

Ejemplo 2.3.4. Supongamos que $\mathscr{A} = \mathbf{Mod}_R$ es la categoría de módulos sobre un anillo conmutativo R. Consideremos dos R-módulos X e Y y una aplicación R-lineal $f : X \to Y$. Claramente, el núcleo, el conúcleo, la coimagen y la imagen de f existen. En efecto

$$\begin{aligned} \ker f &= \{x \in X : f(x) = 0\}, \\ \operatorname{im} f &= \{y \in Y : \text{existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = y\}, \\ \operatorname{coker} f &= Y/\operatorname{im} f = \{y + \operatorname{im} f : y \in Y\}, \\ \operatorname{coim} f &= X/\ker f = \{x + \ker f : x \in X\}, \end{aligned}$$

con las aplicaciones naturales dadas por las inclusiones y las proyecciones al cociente. Observando la demostración de la proposición anterior, es claro que la aplicación $g : \operatorname{coim} f \to Y$ está dada por

$$\begin{aligned} g : \operatorname{coim} f &\longrightarrow Y \\ x + \ker f &\longmapsto f(x), \end{aligned}$$

de modo que la aplicación natural $h : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ es

$$\begin{aligned} h : \operatorname{coim} f &\longrightarrow \operatorname{im} f \\ x + \ker f &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Esta aplicación es obviamente sobreyectiva, y además es inyectiva ya que, si $f(x) = 0$, entonces, por definición, $x \in \ker f$.

Definición 2.3.5. Una categoría $\mathscr{A}$ es una *categoría abeliana* si

1. es aditiva,

2. existe el núcleo y el conúcleo de todos los morfismos de $\mathscr{A}$ y,

3. para todo morfismo de $\mathscr{A}$ se cumple el teorema de isomorfía.

Observación. Nótese que si $\mathscr{A}$ es una categoría preaditiva, su categoría dual $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ es evidentemente preaditiva. Más aún, como las sumas directas son productos y coproductos y el objeto cero es final e inicial, $\mathscr{A}$ es aditiva si y sólo si $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ es aditiva. Finalmente, como el núcleo es dual al conúcleo y la imagen dual a la coimagen, $\mathscr{A}$ es abeliana si y sólo si $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ lo es.

Proposición 2.3.6. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathscr{A}$.*

1. *Son equivalentes*

(a) f *es un monomorfismo,*

(b) $\ker f = 0$,

(c) $\operatorname{im} f$ *es canónicamente isomorfo a* X.

2. *Son equivalentes*

(a) f *es un epimorfismo,*

(b) $\operatorname{coker} f = 0$,

(c) $\operatorname{im} f$ *es canónicamente isomorfo a* Y.

Demostración. Demostramos **1** y la prueba de **2** es totalmente análoga.

(a) $\Rightarrow$ (b). Si f es un monomorfismo, como $f \circ i_f = 0$ tenemos que $i_f = 0$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "0"] & X \\
& \ker f. \arrow[u, "0"'] \arrow[ul, dashed, "\mathrm{id}_{\ker f}"]
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del núcleo, $\mathrm{id}_{\ker f} = 0$, luego $\ker f = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Tomemos $h_1, h_2 : Z \to X$ dos morfismos tales que $f \circ h_1 = f \circ h_2$. Entonces $f \circ (h_1 - h_2) = 0$ y, por la propiedad universal del núcleo existe un único morfismo $g : Z \to \ker f$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "i_f"] & X \\
& Z. \arrow[u, "h_1 - h_2"'] \arrow[ul, dashed, "g"]
\end{tikzcd}$$

Ahora, si $\ker f = 0$, entonces $h_1 - h_2 = 0$, luego f es un monomorfismo.

(b) $\Rightarrow$ (c). Tomemos la factorización canónica de f dada por $X \to \operatorname{im} f \to \operatorname{coim} f \to Y$. Como $\operatorname{coim} f$ es por definición el conúcleo del morfismo i_f y, por hipótesis, $i_f = 0$, tenemos que existe un único morfismo g tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & \operatorname{coker} i_f \arrow[dl, dashed, "g"] \\
X. &
\end{tikzcd}$$

Ahora, como $\operatorname{im} f$ es por definición $\ker p_f$ y $p_f \circ f = 0$, por la propiedad universal del núcleo existe un único morfismo h tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{im} f \arrow[r] & Y \\
& X. \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dashed, "h"]
\end{tikzcd}$$

Ahora, si $\varphi : \operatorname{im} f \to \operatorname{coim} f$ denota el morfismo natural, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & \operatorname{coim} f \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & \operatorname{im} f \arrow[d] \\
X \arrow[rr, "f"] \arrow[urr, dashed, "h"] & & Y.
\end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana, φ es un isomorfismo. De la unicidad de h se deduce que $\varphi^{-1} \circ h$ ha de ser igual al morfismo natural $X \to \operatorname{coim} f$. Por tanto, g da un isomorfismo entre $\operatorname{coim} f$ y X y por tanto $\varphi^{-1} \circ g : \operatorname{im} f \to X$ es un isomorfismo. □

2.4. Sucesiones exactas

Definición 2.4.1. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y consideremos una sucesión de morfismos

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots .$$

Decimos que la sucesión anterior es *exacta en X_i* si $\ker f_i = \operatorname{im} f_{i-1}$. Decimos que la sucesión es una *sucesión exacta* si es exacta en todos los X_i. Una *sucesión exacta corta* es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0.$$

Proposición 2.4.2. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Una sucesión de morfismos en $\mathscr{A}$*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta si y sólo si

1. *i es un monomorfismo,*

2. *p es un epimorfismo, y*

3. $\operatorname{im} i = \ker p$.

Equivalentemente, la sucesión anterior es exacta corta si y sólo si existen isomorfismos naturales $X \to \ker p$ y $\operatorname{coker} i \to Z$ tales que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "p_i"] & Z \arrow[r] & 0 \\
& \ker p \arrow[ur, "i_p"] & & \operatorname{coker} i. \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Además, si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathscr{A}$, las siguientes sucesiones son exactas

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} f \longrightarrow B \xrightarrow{p_f} \operatorname{coker} f \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{i_f} A \longrightarrow \operatorname{im} f \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{i_f} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{p_f} \operatorname{coker} f \longrightarrow 0.$$

Demostración. **3** es la definición de la exactitud en Y. La exactitud en X es equivalente a $\ker i = 0$, esto es, **1**. Por otra parte, la exactitud en Y es equivalente a

$$\operatorname{im} p = \ker(0 : Z \to 0) = Z.$$

Ahora,

$$Z = \operatorname{im} p = \ker(p_p : Z \to \operatorname{coker} p).$$

Esto es cierto si y sólo si $p_p = 0$ que, por la propiedad universal del conúcleo, equivale a $\operatorname{coker} p = 0$.

Para la segunda caracterización, claramente una sucesión de esa forma es exacta corta, puesto que $i_p = \ker p \to Y$ es un monomorfismo, $p_i = Y \to \operatorname{coker} i$ es un epimorfismo y, por definición $\operatorname{im} i_p = \ker(Y \to \operatorname{coker} i_p)$. Recíprocamente, supongamos que la sucesión es exacta. Como i es un monomorfismo, X es canónicamente isomorfo a $\operatorname{im} i = \ker p$. Por otra parte, como p es un epimorfismo, Z es canónicamente isomorfo a $\operatorname{im} p$. Por definición, $\operatorname{coim} p = \operatorname{coker} i_p$ y, por ser $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, $\operatorname{im} p$ es canónicamente isomorfo a $\operatorname{coim} p$; luego Z es canónicamente isomorfo a $\operatorname{coker} i_p$, que a su vez es canónicamente isomorfo a $\operatorname{coker} i$, por lo que ya hemos probado para $\ker p$.

Como $\operatorname{im} f = \ker p_f$ por definición, la sucesión es exacta en B, además el morfismo $\operatorname{im} f \to B$ es un monomorfismo, mientras que, como ya vimos, p_f es un epimorfismo. Análogamente, $\operatorname{coim} f = \operatorname{coker} i_f$ por definición. Como $\operatorname{im} f$ es canónicamente isomorfo a $\operatorname{coim} f$, la sucesión es exacta en A y el morfismo $A \to \operatorname{im} f$ es un epimorfismo. Además, el morfismo i_f es un monomorfismo, como ya vimos. Para la última sucesión, la exactitud en A es evidente, mientras que la exactitud en B se sigue de la segunda caracterización y de la primera sucesión exacta. □

Definición 2.4.3. Si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta corta en una categoría abeliana, el elemento Z se llama el *cociente de Y por X* y se denota Y/X.

En efecto, que tiene sentido hablar de «el» cociente, porque, por lo visto en la proposición anterior, Y/X es canónicamente isomorfo a $\operatorname{coker}(X \to Y)$, que está definido por una propiedad universal. Una vez introducida esta notación, de la última sucesión exacta de la proposición anterior, podemos obtener el «teorema de isomorfía» en su forma habitual

$$\operatorname{im} f \cong A/\ker f.$$

Además, de la penúltima sucesión exacta de la proposición anterior deducimos que

$$\operatorname{coker} f \cong B/\operatorname{im} f.$$

Nótense las semejanzas con la categoría $\mathbf{Mod}_R$ de módulos sobre un anillo conmutativo R.

Ejemplo 2.4.4. Tomemos dos objetos X e Y en una categoría abeliana y consideremos su suma directa $X \oplus Y$. Tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i_1} X \oplus Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} 0.$$

En efecto, $i_1 : X \to X \oplus Y$ es el núcleo de $\mathrm{pr}_2 : X \oplus Y \to Y$, mientras que pr_2 es el conúcleo de i_1.

Definición 2.4.5. Una sucesión exacta corta $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es *escindida* si existe un isomorfismo $X \oplus Z \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[dr, "i_1"'] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \\
& & X \oplus Z. \arrow[u] \arrow[ur, "\mathrm{pr}_2"] & &
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.4.6 (Lema de escisión). *Sea* $0 \to X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \to 0$ *una sucesión exacta corta. Son equivalentes:*

1. *la sucesión es escindida,*

2. *existe un retracto de i, es decir, un morfismo $r : Y \to X$ tal que $r \circ i = \mathrm{id}_X$, y*

3. *existe una sección de p, es decir, un morfismo $s : Z \to Y$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_Z$.*

Demostración. Claramente, **1** implica **2** y **3**, si tomamos $r = \mathrm{pr}_1 : X \oplus Z \to X$ y $s = i_2 : Z \to X \oplus Z$. Veamos que **2** implica **1** y el argumento para **3** implica **1** es dual. Definimos $P = i \circ r : Y \to Y$. Nótese que

$$r \circ (\mathrm{id}_Y - P) = r - r \circ i \circ r = r - \mathrm{id}_X \circ r = r - r = 0.$$

Por tanto, $\mathrm{id}_Y - P$ define un morfismo $Y \to \ker r$. Ahora, dados dos morfismos $f : A \to \ker r$ y $g : A \to X$, existe un único morfismo $h : A \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\ker r & Y \arrow[l, "\mathrm{id}_Y - P"'] \arrow[r, "r"] & X \\
& A. \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

En efecto, este morfismo es exactamente $h = i_r \circ f + i \circ g$, con $i_r : \ker r \to Y$ el monomorfismo natural. Por tanto, existe un isomorfismo natural $X \oplus \ker r \to Y$ y tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{\cong} X \oplus \ker r \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \ker r \longrightarrow 0.$$

Deducimos entonces que Z es isomorfo a $\ker r$ y por tanto Y es isomorfo a $X \oplus Z$. $\square$

2.5. Productos fibrados y amalgamados

Definición 2.5.1. Sean X, Y, Z y W objetos en una categoría abeliana.

Dados morfismos $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$, definimos el *producto de X e Y fibrado por Z* como el objeto

$$X \times_Z Y = \ker \varphi,$$

con $\varphi : X \oplus Y \to Z$ el morfismo inducido por f y $-g$, junto con las aplicaciones $p_1 = \mathrm{pr}_1 \circ i_\varphi : X \times_Z Y \to X$ y $p_2 = \mathrm{pr}_2 \circ i_\varphi : X \times_Z Y \to Y$.

Dualmente, dados morfismos $h : W \to X$ y $k : W \to Y$, definimos el *producto de X e Y amalgamado con W* como el objeto

$$X \sqcup_W Y = \operatorname{coker} \psi,$$

con $\psi : W \to X \oplus Y$ el morfismo inducido por h y $-k$, junto con las aplicaciones $j_1 : p_\psi \circ i_1 : X \to X \sqcup_W Y$ y $j_2 : p_\psi \circ i_2 : Y \to X \sqcup_W Y$.

Para que las definiciones estén justificadas, debemos demostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

es cartesiano, y que el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"] & Y \arrow[d, "j_2"] \\ X \arrow[r, "j_1"] & X \sqcup_W Y \end{tikzcd}$$

es cocartesiano. Veámoslo para el primero, siendo el otro dual. En efecto, supongamos que existe un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z. \end{tikzcd}$$

Consideremos $u : W \to X \oplus Y$ el morfismo inducido por q_1 y q_2. Tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi \circ u &= (f \circ \mathrm{pr}_1 - g \circ \mathrm{pr}_2) \circ (i_1 \circ q_1 + i_2 \circ q_2) \\ &= f \circ \mathrm{pr}_1 \circ i_1 \circ q_1 - g \circ \mathrm{pr}_2 \circ i_1 \circ q_1 + f \circ \mathrm{pr}_1 \circ i_2 \circ q_2 - g \circ \mathrm{pr}_2 \circ i_2 \circ q_2 \\ &= f \circ q_1 - g \circ q_2 = 0. \end{aligned}$$

Por la propiedad universal del núcleo, existe un único homomorfismo $h : W \to \ker \varphi$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \ker \varphi \arrow[r, "i_\varphi"] & X \oplus Y \\ & W. \arrow[u, "u"] \arrow[ul, dashed, "h"] \end{tikzcd}$$

Además, para $i = 1, 2$, tenemos

$$p_i \circ h = \mathrm{pr}_i \circ i_\varphi \circ h = \mathrm{pr}_i \circ u = q_i.$$

Esto prueba que el primer diagrama es cartesiano.

Supongamos ahora que tenemos el siguiente cuadrado conmutativo en una categoría abeliana

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "k"] & Z. \end{tikzcd}$$

De las propiedades universales del núcleo y del conúcleo, se deduce inmediatamente que existen morfismos $\ker f \to \ker k$ y $\operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} k$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "a"] & W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, "h"] & \operatorname{coker} f \arrow[d, "b"] \\ \ker k \arrow[r, "i_k"] & X \arrow[r, "k"] & Z \arrow[r, "p_k"] & \operatorname{coker} k. \end{tikzcd}$$

Nótese además que, si g es un monomorfismo, entonces a lo es y, dualmente, si h es un epimorfismo, también lo es b.

Lema 1. *Si el cuadrado anterior es cartesiano, entonces a es un isomorfismo. Dualmente, si el diagrma anterior es cocartesiano, entonces b es un isomorfismo.*

Demostración. Consideremos el morfismo $i_1 \circ i_k : \ker k \to X \oplus Y$. Tenemos que, si denotamos $\varphi = k \circ \mathrm{pr}_1 - h \circ \mathrm{pr}_2$, entonces

$$\varphi \circ i_1 \circ i_k = k \circ i_k = 0.$$

Por la propiedad universal del núcleo de φ, existe un morfismo único $s : \ker k \to \ker \varphi$ tal que $i_\varphi \circ t = i_1 \circ i_k$. Ahora, por definición $\ker \varphi = X \times_Z Y$, de modo que, si el cuadrado es cartesiano, existe un isomorfismo natural $\ker \varphi \to W$, llamamos t a la composición de s con este isomorfismo. Además, t cumple $f \circ t = 0$ y $g \circ t = i_k$. Ahora, por la propiedad universal del núcleo de f, existe un morfismo único $u : \ker k \to \ker f$ tal que $t = i_f \circ u$. Se sigue que

$$g \circ i_f \circ u \circ a = g \circ t \circ a = i_k \circ a = g \circ i_f$$

y que

$$f \circ i_f \circ u \circ a = f \circ t \circ a = 0 = f \circ i_f,$$

de modo que, por la unicidad en la propiedad universal del producto fibrado

$$i_f \circ u \circ a = i_f.$$

Ahora, como i_f es un monomorfismo, tenemos que $u \circ a = \mathrm{id}_{\ker f}$. Por otra parte,

$$i_k \circ a \circ u = g \circ i_f \circ u = g \circ t = i_k,$$

luego, como i_k es un monomorfismo, $a \circ u = \mathrm{id}_{\ker k}$. Concluimos que a da un isomorfismo entre $\ker f$ y $\ker k$. La demostración para b es dual. □

Proposición 2.5.2. *Si el cuadrado anterior es cartesiano y k es un epimorfismo, entonces es cocartesiano y f es un epimorfismo. Dualmente, si el cuadrado es cocartesiano y g es un monomorfismo, entonces es cartesiano y h es un monomorfismo.*

Demostración. Consideremos el morfismo $\psi = (i_1 \circ g - i_2 \circ f) : W \to X \oplus Y$ y el morfismo $v = (k \circ \mathrm{pr}_1 + h \circ \mathrm{pr}_2) : X \oplus Y \to Z$. Si k es un epimorfismo, también lo es v. Ahora,

$$v \circ \psi = k \circ g - h \circ f = 0.$$

Juntanto todo, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$W \xrightarrow{\psi} X \oplus Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0.$$

Esto demuestra que Z es isomorfo a $\operatorname{coker} \psi = X \sqcup_W Y$, de modo que el diagrama es cocartesiano. Por el lema anterior, existe un isomorfismo $\operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} k$. Por tanto, $\operatorname{coker} f = 0$ y f es un epimorfismo. El otro argumento es dual. □

En otras palabras, acabamos de demostrar que si $X \to Z$ es un epimorfismo, para cualquier $Y \to Z$, el morfismo natural $X \times_Z Y \to Y$ es un epimorfismo. Dualmente, si $W \to X$ es un monomorfismo, para cualquier $W \to Y$, el morfismo natural $Y \to X \sqcup_W Y$ es un monomorfismo.

2.6. Persiguiendo diagramas

Cuando se estudia álgebra homológica en una categoría abeliana concreta, como pueda ser $\mathbf{Mod}_R$, es habitual demostrar resultados usando argumentos de lo que se conoce como «*diagram chasing*». Esta técnica consiste en elegir elementos en un cierto objeto en un diagrama conmutativo e ir «siguiendo» su imagen por los distintos morfismos del diagrama. Sin embargo, en una categoría abeliana general, a priori no podemos entender los objetos como conjuntos y los morfismos como aplicaciones entre ellos, de modo que estas técnicas no se pueden importar directamente. Se tratará entonces de definir *ad-hoc* la noción de «elemento» para un objeto de una categoría abeliana y probar que esta noción funciona igual que la noción análoga en teoría de conjuntos.

Definición 2.6.1. Sea $\mathscr{A}$ una categoría y X un objeto de $\mathscr{A}$. Un *$\mathscr{A}$-elemento* de X es un morfismo en $\mathscr{A}$ de la forma $x : Z \to X$. Escribimos $x \in_{\mathscr{A}} X$.

Sea $x \in_{\mathscr{A}} X$ un $\mathscr{A}$-elemento de de X y sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathscr{A}$. Definimos la *imagen de x por f* como el $\mathscr{A}$ elemento de Y, $f(x) \in_{\mathscr{A}} Y$ dado por

$$f(x) = f \circ x : Z \longrightarrow Y.$$

Nótese que, en una categoría abeliana, todo objeto X tiene un «elemento cero» $0 : 0 \to X$, y, para cada $x \in_{\mathscr{A}} X$ existe el elemento $-x \in_{\mathscr{A}} X$.

Supongamos ahora que $\mathscr{A}$ es una categoría abeliana. Definimos la siguiente relación de equivalencia: dados $x, y \in_{\mathscr{A}} X$, de la forma $x : Z \to X$ e $y : W \to X$, decimos que $x \equiv y$ si y sólo si existen epimorfismos $p : V \to Z$ y $q : V \to W$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & Z \arrow[d, "x"] \\ W \arrow[r, "y"] & X. \end{tikzcd}$$

En efecto, esta relación es claramente reflexiva y simétrica. Para ver que es transitiva, supongamos que $x \equiv y$ y que $y \equiv z$, para $z : U \to X$. Existen entonces epimorfismos $r : A \to U$ y $s : A \to W$ con $z \circ r = y \circ s$. Ahora, consideramos los morfismos $q : V \to W$ y $s : A \to W$ y tomamos el producto fibrado $V \times_W A$, de forma que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \times_W A \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & Z \arrow[d, "x"] \\ A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"] & W \arrow[r, "y"] \arrow[d, "y"] & X \\ U \arrow[r, "z"] & X. & \end{tikzcd}$$

Como q y s son epimorfismos, los morfismos naturales $V \times_W A \to V$ y $V \times_W A \to A$ son también epimorfismos, de modo que tenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \times_W A \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "x"] \\ U \arrow[r, "z"] & X, \end{tikzcd}$$

en el que los morfismos de $V \times_W A$ a Z y U son epimorfismos. Concluimos que $x \equiv z$.

Ahora, dado un morfismo $f : X \to Y$ en una categoría abeliana, si $x, y \in_{\mathscr{A}} X$ son tales que $x \equiv y$, entonces claramente $f(x) \equiv f(y)$, de modo que el morfismo f define una asignación $F_f : \{\text{elementos de } X\} / \equiv \to \{\text{elementos de } Y\} / \equiv$.

Proposición 2.6.2 (Reglas para perseguir diagramas). *Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana.*

1. *Un morfismo $f : X \to Y$ es un monomorfismo si y sólo si, para todo $x, x' \in_{\mathscr{A}} X$, si $f(x) \equiv f(x')$, entonces $x \equiv x'$. Equivalentemente, f es un monomorfismo si y sólo si, para todo $x \in X$, si $f(x) \equiv 0$, entonces $x \equiv 0$.*

2. *Un morfismo $g : Y \to Z$ es un epimorfismo si y sólo si, para todo $z \in_{\mathscr{A}} Z$ existe un $y \in_{\mathscr{A}} Y$ tal que $g(y) \equiv z$.*

3. *Una sucesión $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ es exacta en Y si y sólo si $g \circ f = 0$ y, para cada $y \in_{\mathscr{A}} Y$ tal que $g(y) \equiv 0$ existe un $x \in_{\mathscr{A}} X$ con $f(x) \equiv y$.*

4. *Dado un morfismo $g : Y \to Z$ y dos $\mathscr{A}$-elementos $a, b \in_{\mathscr{A}} Y$ tales que $g(a) \equiv g(b)$, existe un $\mathscr{A}$-elemento $c \in_{\mathscr{A}} Y$ tal que $g(c) \equiv 0$. Además, para cualquier $f : Y \to W$ con $f(a) \equiv 0$, se tiene que $f(b) \equiv f(c)$ y, para cualquier $h : Y \to V$ con $h(b) \equiv 0$, se tiene que $h(a) \equiv -h(c)$. Denotamos el $\mathscr{A}$-elemento c como $b -_{\mathscr{A}} a \in_{\mathscr{A}} Y$.*

Demostración. La regla **1** es simplemente la definición de monomorfismo. Para **2**, si g no es un epimorfismo, entonces el morfismo id_Z no es de la forma $g \circ y$ para ningún $y \in_{\mathscr{A}} Y$. Por otra parte, si g es un epimorfismo y $z : W \to Z$, podemos tomar el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "y"] & W \arrow[d, "z"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z. \end{tikzcd}$$

Tenemos $y \in_{\mathscr{A}} Y$ y además $z \circ p = g \circ y$. Como g es un epimorfismo, también lo es p y, por tanto, $z \equiv g(y)$.

Veamos ahora la regla **3**. Antes que nada, tomemos la factorización natural de f, $X \xrightarrow{p} \operatorname{im} f \longrightarrow Y$. Supongamos en primer lugar que la sucesión es exacta en Y, esto es $\operatorname{im} f = \ker g$. Entonces podemos escribir la factorización de f como $X \xrightarrow{p} \ker g \xrightarrow{i_g} Y$. Tomemos ahora $y \in_{\mathscr{A}} Y$ tal que $g(y) \equiv 0$. Si escribimos $y : W \to Y$, por la propiedad universal del núcleo de g, existe un morfismo $y' : W \to \ker g$ tal que $y = i_g \circ y'$. Formamos ahora el producto fibrado $X \times_{\ker g} W$ definido por los morfismos p e y', de modo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \times_{\ker g} W \arrow[r, "q"] \arrow[d, "x"] & W \arrow[d, "y'"] \arrow[dr, "y"] & \\ X \arrow[r, "p"] & \ker g \arrow[r, "i_g"] & Y. \end{tikzcd}$$

Ahora, tenemos que $f(x) \equiv y$, ya que

$$f \circ x = i_g \circ p \circ x = y \circ q$$

y q es un epimorfismo porque lo es p. Supongamos por otra parte que $g \circ f = 0$ y que, para cada $y \in_{\mathscr{A}} Y$ con $g(y) \equiv 0$ existe un $x \in_{\mathscr{A}} X$ con $f(x) \equiv y$. Entonces, como $g \circ f = 0$, usando la propiedad universal del núcleo de g, podemos factorizar f como

$$X \xrightarrow{p} \operatorname{im} f \xrightarrow{j} \ker g \xrightarrow{i_g} Y,$$

para j un monomorfismo. Por otra parte, como $i_g \in_{\mathscr{A}} Y$ y $g \circ i_g = 0$, existe un morfismo $x : V \to X$ tal que $f \circ x \equiv i_g$. Esto es, existen epimorfismos $u : U \to Y$ y $v : U \to \ker g$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rrrr, "u"] \arrow[d, "v"] & & & & \ker g \arrow[d, "i_g"] \\ V \arrow[r, "x"] & X \arrow[r, "p"] & \operatorname{im} f \arrow[r, "j"] & \ker g \arrow[r, "i_g"] & Y. \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del núcleo de g el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rrrr, "u"] \arrow[d, "v"] \arrow[drrr, dashed, "u"] & & & & \ker g \arrow[d, "i_g"] \\
V \arrow[r, "x"] & X \arrow[r, "p"] & \operatorname{im} f \arrow[r, "j"] & \ker g \arrow[r, "i_g"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Como u es un epimorfismo, j también ha de serlo, lo que prueba que j da un isomorfismo natural entre $\operatorname{im} f$ y $\ker g$.

Finalmente, veamos **4**. Que $g(a) \equiv g(b)$ quiere decir que existen epimorfismos p y q tales que $g \circ a \circ p = g \circ b \circ q$. Basta tomar entonces $c = b \circ q - a \circ p \in_{\mathscr{A}} Y$. □

Para concluir la sección, vamos a aplicar las reglas para perseguir diagramas a la demostración de uno de los resultados más básicos e importantes de toda el álgebra homológica: el «lema de la serpiente».

Teorema 2.6.3 (Lema de la serpiente). *Supongamos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo en una categoría abeliana, con las filas exactas,*

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta"] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y_2 \arrow[r, "g_2"] & Z_2,
\end{tikzcd}$$

y consideremos las sucesiones inducidas $\ker \alpha \xrightarrow{a_1} \ker \beta \xrightarrow{b_1} \ker \gamma$ *y* $\operatorname{coker} \alpha \xrightarrow{a_2} \operatorname{coker} \beta \xrightarrow{b_2} \operatorname{coker} \gamma$. *Entonces existe un morfismo natural* $\delta : \ker \gamma \to \operatorname{coker} \alpha$ *tal que la siguiente sucesión es exacta*

$$\ker \alpha \xrightarrow{a_1} \ker \beta \xrightarrow{b_1} \ker \gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \alpha \xrightarrow{a_2} \operatorname{coker} \beta \xrightarrow{b_2} \operatorname{coker} \gamma.$$

Nótese además que si podemos añadir un $0 \to$ antes de X_1, podemos añadir un $0 \to$ antes de $\ker \alpha$ y, dualmente, si podemos añadir un $\to 0$ después de Z_2, podemos añadirlo después de $\operatorname{coker} \gamma$.

Demostración. Dividimos la demostración en varios pasos. Para que nos sirva de referencia, representemos todos los morfismos implicados en el siguiente diagrama conmutativo (que explica el nombre del teorema)

$$\begin{tikzcd}
 & \ker \alpha \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "i_\alpha"] & \ker \beta \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, "i_\beta"] & \ker \gamma \arrow[d, "i_\gamma"] \arrow[dddll, dashed, "\delta"] & \\
 & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta"] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "p_\alpha"] & Y_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "p_\beta"] & Z_2 \arrow[d, "p_\gamma"] & \\
 & \operatorname{coker} \alpha \arrow[r, "a_2"] & \operatorname{coker} \beta \arrow[r, "b_2"] & \operatorname{coker} \gamma. &
\end{tikzcd}$$

Las sucesiones inducidas son exactas. En primer lugar, nótese que $i_\gamma \circ b_1 \circ a_1 = g_1 \circ f_1 \circ i_\alpha = 0$, ya que $g_1 \circ f_1 = 0$, por ser la primera fila exacta. Como i_γ es un monomorfismo, concluimos que $b_1 \circ a_1 = 0$. Ahora, supongamos que $y \in_{\mathscr{A}} \ker b_1$. Entonces $g_1 \circ i_\beta(y) = i_\gamma \circ b_1(y) = 0$. Por tanto, como la sucesión $X_1 \to Y_1 \to Z_1$ es exacta, existe $x \in_{\mathscr{A}} X_1$ tal que $f_1(x) \equiv i_\beta(y)$. Esto prueba que la sucesión $\ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma$ es exacta. La prueba para la otra sucesión es análoga.

Construcción de δ. Construimos U_1 y U_2 el producto fibrado de Y_1 y $\ker\gamma$ y el producto amalgamado de $\operatorname{coker}\alpha$ e Y_2, respectivamente, de modo que tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& U_1 \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"] & \ker\gamma \arrow[d, "i_\gamma"] \\
X_1 \arrow[ur, "i_k"] \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta"] & Z_1 \arrow[d, "\gamma"] \\
X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "p_\alpha"] & Y_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "u"] & Z_2 \\
\operatorname{coker}\alpha \arrow[r, "v"] & U_2. \arrow[ur, "p_v"] &
\end{tikzcd}$$

Nótese que, en efecto, X_1 se identifica con el núcleo de k y Z_2 con el conúcleo de v por las propiedades de los diagramas cartesianos y cocartesianos que vimos en la sección anterior. Llamamos $\delta_0 : U_1 \to U_2$ a la aplicación $\delta_0 = u \circ \beta \circ h$. Además, en el diagrama se ve que $p_v \circ \delta_0 = 0$ y $\delta_0 \circ i_k = 0$. Por las propiedades universales del núcleo y del conúcleo de γ y α, respectivamente, esto implica que δ_0 factoriza de forma única como $\delta_0 = v \circ \delta \circ k$. El morfismo resultante $\delta : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$ es el que estamos buscando.

Veamos ahora cómo actúa esta δ en los $\mathscr{A}$-elementos. Si $z \in_{\mathscr{A}} \ker\gamma$, como g_1 es un epimorfismo, existe $y \in_{\mathscr{A}} Y_1$ tal que $g_1(y) = i_\gamma(z)$. Ahora, como

$$g_2 \circ \beta(y) = \gamma \circ g_1(y) = \gamma \circ i_\gamma(z) = 0,$$

tenemos que $\beta(y) \equiv f_2(x)$, para $x \in_{\mathscr{A}} X_2$. Finalmente, obtenemos $\delta(z) = p_\alpha(x)$. Podemos resumir gráficamente este procedimiento en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & z \arrow[d, mapsto, "i_\gamma"] \\
& y \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto, "\beta"] & i_\gamma(z) \arrow[d, mapsto, "\gamma"] \\
x \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "p_\alpha"] & \beta(y) \arrow[r, mapsto, "g_2"] & 0 \\
p_\alpha(x). & &
\end{tikzcd}$$

Fin de la demostración. Probamos la exactitud en $\ker\gamma$, siendo la exactitud en $\operatorname{coker}\alpha$ un argumento dual. En primer lugar, veamos que $\delta \circ b_1 = 0$. En efecto, si $y' \in_{\mathscr{A}} \ker\beta$, tenemos

$$i_\gamma \circ b_1(y') = g_1 \circ i_\beta(y'),$$

de modo que en el diagrama anterior podemos tomar $y = i_\beta(y')$. Pero entonces $\beta(y) \equiv 0$ y, como f_2 es un monomorfismo, concluimos que en el diagrama anterior $x = 0$. Tenemos entonces que $\delta \circ b_1 = 0$. Por otra parte, tomemos $z \in_{\mathscr{A}} \ker\gamma$ tal que $\delta(z) \equiv 0$. Esto quiere decir que el elemento $p_\alpha(x)$ construido en el diagrama anterior cumple $p_\alpha(x) \equiv 0$. Por la exactitud de la sucesión $X_1 \to X_2 \to \operatorname{coker}\alpha$, debe existir $x' \in_{\mathscr{A}} X_1$ tal que $\alpha(x') = x$. Por tanto, $\beta \circ f_1(x') \equiv \beta(y)$. Podemos tomar entonces el $\mathscr{A}$-elemento $y_0 = y -_{\mathscr{A}} f_1(x) \in_{\mathscr{A}} Y_1$, que cumple que $\beta(y_0) \equiv 0$. Por tanto, existe $y_1 \in_{\mathscr{A}} \ker\beta$ tal que $i_\beta(y_1) \equiv y_0$. Además, como $g_1 \circ f_1 = 0$, tenemos que $g_1(y_0) \equiv g_1(y) = i_\gamma(z)$. Obtenemos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
y_1 \arrow[r, mapsto, "b_1"] \arrow[d, mapsto, "i_\beta"] & b_1(y_1) \arrow[d, mapsto, "i_\gamma"] \\
y_0 \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto, "\beta"] & i_\gamma(z) \\
0. &
\end{tikzcd}$$

Pero, como i_γ es un monomorfismo, tenemos que $b_1(y_1) \equiv z$. En resumen, hemos demostrado que, si $\delta(z) = 0$, existe $y_1 \in_{\mathscr{A}} \ker\beta$ tal que $b_1(y_1) = z$. Esto concluye la demostración de la exactitud en $\ker\gamma$. □

HACER:
+ Functores aditivos y teorema de representabilidad?

Capítulo 3

Complejos de cadenas

3.1. La categoría de los complejos de cadenas

Definición 3.1.1. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Un *complejo de cadenas* $C_\bullet$ en $\mathscr{A}$ consiste en

1. una colección de objetos $\{C_n \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}) : n \in \mathbb{Z}\}$ y
2. una colección de morfismos $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$

$$\cdots \xleftarrow[\partial_{-1}]{} C_{-1} \xleftarrow[\partial_0]{} C_0 \xleftarrow[\partial_1]{} C_1 \xleftarrow[\partial_2]{} C_2 \xleftarrow[\partial_3]{} \cdots$$

tales que
$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$
para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Una consecuencia inmediata de la propiedad $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ es que el monomorfismo natural $\operatorname{im} \partial_{n+1} \to C_n$ factoriza por el monomorfismo $\ker \partial_n \to C_n$, de modo que obtenemos de forma natural una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} \partial_{n+1} \longrightarrow \ker \partial_n \longrightarrow H_n(C_\bullet) \longrightarrow 0,$$

donde el conúcleo
$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}}$$
se denomina el *n-ésimo objeto de homología de $C_\bullet$*. Nótese que el complejo $C_\bullet$ es una sucesión exacta en C_n si y sólo si $H_n(C_\bullet) = 0$.

De forma dual puede definirse un *complejo de cocadenas $C^\bullet$* como una sucesión de la forma

$$\cdots \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} \cdots,$$

con $d^{n+1} \circ d^n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, y sus *objetos de cohomología*

$$H^n(C^\bullet) = \frac{\ker d^{n+1}}{\operatorname{im} d^n}.$$

Nótese que no se trata de una noción nueva ya que, si definimos $C_i = C^{-i}$ y $\partial_i = d^{-i}$, tenemos que $C_\bullet$ es un complejo de cadenas.

Definición 3.1.2. Dados dos complejos de cadenas $C_\bullet$ y $D_\bullet$ en una categoría abeliana $\mathscr{A}$, un *morfismo de cadenas* $f : C_\bullet \to D_\bullet$ es una colección de morfismos

$$\{f_n : C_n \to D_n : n \in \mathbb{Z}\}$$

tal que todos los diagramas de la siguiente forma conmutan

$$\begin{tikzcd} C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] & C_n \arrow[l, "\partial_n^C"'] \arrow[d, "f_n"] \\ D_{n-1} & D_n. \arrow[l, "\partial_n^D"] \end{tikzcd}$$

Definimos la *categoría* $\mathbf{Ch}(\mathscr{A})$ *de los complejos de cadenas en* $\mathscr{A}$ como la categoría cuyos objetos son los complejos de cadenas en $\mathscr{A}$ y cuyos morfismos son los morfismos de cadenas.

De las propiedades universales que definen el núcleo y la imagen, se deduce que un morfismo de cadenas $f : C_\bullet \to D_\bullet$ induce de forma natural morfismos $\ker \partial_n^C \to \ker \partial_n^D$ e $\operatorname{im} \partial_n^C \to \operatorname{im} \partial_n^D$, de modo que obtenemos morfismos

$$H_n(f) : H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(D_\bullet).$$

Además, claramente $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$, de modo que H_n define un functor

$$H_n : \mathbf{Ch}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}.$$

El resultado clave sobre la homología que podemos recuperar ahora es la existencia de la sucesión exacta larga:

Teorema 3.1.3 (Sucesión exacta larga en homología). *Supongamos que*

$$A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet$$

es una sucesión de morfismos de cadenas en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, la sucesión

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \longrightarrow 0$$

es exacta. Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe un morfismo $\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ tal que la siguiente sucesión es exacta

$$\cdots \longrightarrow H_n(A_\bullet) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} \cdots .$$