La correspondencia de Hitchin–Kobayashi

Guillermo Gallego

29 de septiembre de 2020

1. Esbozo de la demostración

Fijemos durante todo el texto un fibrado complejo $E \to X$ de rango n y grado d y una métrica hermítica H en E. Una vez estos datos son fijados, las diferentes estructuras holomorfas $\mathcal{E}$ en E pueden ser identificadas con las conexiones unitarias en E. Análogamente, las diferentes estructuras de fibrado de Higgs $(\mathcal{E}, \varphi)$ en E pueden ser identificadas con pares (A, φ), donde A es una conexión unitaria en E y el campo de Higgs $\varphi \in \Omega^{1,0}(X, \mathrm{End}E)$ es una sección diferenciable de $\mathrm{End}E \otimes K$ con la condición adicional de que $\bar{\partial}_A \varphi = 0$. Denotamos por $\mathscr{H}$ el conjunto de estos pares.

Definimos el lagrangiano

$$J(A, \varphi) = \int_X \|F_A + [\varphi, \varphi^\dagger]\|^2,$$

en la órbita $\mathscr{O}(A_0, \varphi_0)$ bajo el grupo $\mathscr{G}_c^2$ de un par (A_0, φ_0). Supongamos que $\{(A_n, \varphi_n)\}_n$ es una sucesión minimizante para J en esta órbita. En particular, existe un número $M > 0$ tal que

$$\|F_{A_n} + [\varphi_n, \varphi_n^\dagger]\|^2 < M,$$

para todo n.

Teorema 1.1 (Uhlenbeck)**.** *Supongamos que $\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}^1$ es una sucesión de conexiones unitarias L_1^2 en (E, H), con las $\|F_{A_n}\|_{L^2}$ acotadas. Entonces, existen una subsucesión $\{A_{n_i}\}_i$ y transformaciones gauge $g_i \in \mathscr{G}_c^2$, para cada i tales que la sucesión $\{g_i \cdot A_{n_i}\}_i$ converge débilmente en L_1^2.*

Supongamos que existiese una cota para las $\|F_{A_n}\|_{L^2}$ en la sucesión previamente definida. En tal caso podemos asumir que $\{A_n\}_n$ converge débilmente en L_1^2 a una conexión A. Por otra parte si suponemos que existe una cota para las $\|\varphi_n\|_{L_1^2}$, entonces, por la débil compacidad de L_1^2 existe una subsucesión débilmente convergente de las $\{\varphi_n\}_n$. Pasando a una subsucesión, obtenemos un par (A, φ), con $A \in \mathscr{A}^2$ y $\varphi \in L_1^2(X, \mathrm{End}E \otimes K)$.

Proposición 1.2 (Atiyah–Bott)**.** *Para $k \geq 2$, cada $\mathscr{G}_c^k$-órbita en $\mathscr{A}^{k-1}$ contiene una conexión C^∞.*

Demostración. Hacer. □

En consecuencia, existe una transformación gauge $g \in \mathscr{G}_c^2$ tal que la conexión $g \cdot A$ es C^∞ y, por tanto, define una estructura holomorfa $\mathcal{E}_A$ en E. Por otra parte, como $\bar{\partial}_A \varphi = 0$, la regularidad elíptica implica que φ es C^∞; de modo que el par $(\mathcal{E}_A, \varphi)$ es, en efecto, un fibrado de Higgs.

Lema 1. *Existe un homomorfismo de fibrados de Higgs $f : (\mathcal{E}_{A_0}, \varphi_0) \to (\mathcal{E}_A, \varphi)$.*

Demostración. Consideremos la conexión en E^* inducida por la conexión A_n en E. Esta conexión, junto a la conexión A_0 en E inducen una conexión A_nA_0 en $E^* \otimes E$ con un operador asociado

$$\bar{\partial}_{A_nA_0} : \Omega^0(X, E^* \otimes E) \longrightarrow \Omega^{0,1}(X, E^* \otimes E).$$

Ahora, podemos escribir

$$\bar{\partial}_{AA_0} = \bar{\partial}_{A_nA_0} + \beta_n,$$

para $\beta_n \to 0$ débilmente en L_1^2. La regularidad elíptica de $\bar{\partial}_{AA_0}$ proporciona

$$\|f\|_{L_1^2} \leq C(\|\bar{\partial}_{AA_0} f\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}),$$

para $f \in \Omega^0(X, \operatorname{End} E)$. Tomemos ahora f_n tales que que $\bar{\partial}_{A_nA_0} f_n = 0$ y $\|f_n\|_{L^2} = 1$. Entonces,

$$\|f_n\|_{L_1^2} \leq C(\|[\beta_n, f_n\|_{L^2} + 1) \leq C_1 \|\beta_n\|_{L^4} \|f_n\|_{L^4} + C_2.$$

Como la inclusión $L_1^2 \subset L^4$ es compacta, $\|\beta_n\|_{L^4} \to 0$, de modo que obtenemos una cota L_1^2 en f_n, que por tanto tiene una subsucesión convergente. Como $\|f_n\|_{L^2} = 1$ y la inclusión $L_1^2 \subset L^2$ es compacta, el límite débil f es no nulo.

En nuestro caso podemos tomar las f_n como los automorfismos $(\mathcal{E}_{A_0}, \varphi_0) \to (\mathcal{E}_{A_n}, \varphi_n)$ inducidos por las transformaciones gauge que llevan el par (A_0, φ_0) a los pares (A_n, φ_n). Por definición, estos automorfismos satisfacen $\bar{\partial}_{A_nA_1} f_n = 0$ y $\varphi_0 f_n - f_n \varphi_n = 0$. Como f_n y φ_n convergen débilmente en L_1^2 y la inclusión $L_1^2 \subset L^4$ es compacta,

$$0 = \|\varphi_0 f_n - f_n \varphi_n\|_{L^2} \to \|\varphi_0 f - f \varphi_n\|_{L^2}.$$

Por tanto, en el límite tenemos que

$$\varphi_0 f - f \varphi_n \text{ y } \bar{\partial}_{AA_0} f = 0.$$

En otras palabras, f define un homomorfismo de fibrados de Higgs $(\mathcal{E}_{A_0}, \varphi_0) \to (\mathcal{E}_A, \varphi)$. $\square$

Basta demostrar ahora que el homomorfismo f es, de hecho, un isomorfismo suponiendo que el fibrado de Higgs de partida $(\mathcal{E}_{A_0}, \varphi_0)$ es estable. En efecto, supongamos que no lo es y definamos $\mathcal{S} = \ker f$ y $\mathcal{Q} = \mathcal{E}_{A_0}/\mathcal{S}$. El fibrado $\mathcal{Q}$ es un subhaz de $\mathcal{E}_A$, de modo que podemos tomar su saturación $\mathcal{M}$ y el cociente $\mathcal{N} = \mathcal{E}_A/\mathcal{M}$. Como f es un homomorfismo de fibrados de Higgs, tenemos que $\varphi \circ f = f \circ \varphi_0$, de modo que el subfibrado $\mathcal{S}$ es φ_0-invariante y el subfibrado $\mathcal{M}$ es φ-invariante. Obtenemos entonces la siguiente factorización

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{A_0} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow f & & \downarrow & & \\
0 & \longleftarrow & \mathcal{N} & \longleftarrow & \mathcal{E}_A & \longleftarrow & \mathcal{M} & \longleftarrow & 0.
\end{array}$$

De este diagrama deducimos que $\mu(\mathcal{M}) \geq \mu(Q) > \mu(E)$. La clave es emplear ahora las *cotas de Donaldson*:

Lema 2 (Cotas de Donaldson). *En la situación del diagrama anterior, si el par (E_{A_0}, φ_0) es estable, entonces*

$$J_0 \leq J(A, \varphi) < J_1$$

con

$$\begin{aligned}
J_0 &= \operatorname{rango}(\mathcal{M})(\mu(\mathcal{M}) - \mu(E)) + \operatorname{rango}(\mathcal{N})(\mu(E) - \mu(\mathcal{N})) \\
J_1 &= \operatorname{rango}(\mathcal{S})(\mu(E) - \mu(\mathcal{S})) + \operatorname{rango}(\mathcal{Q})(\mu(\mathcal{Q}) - \mu(E)).
\end{aligned}$$

Ahora, por otra parte, $\operatorname{rango}(\mathcal{Q}) = \operatorname{rango}(\mathcal{M})$, $\operatorname{rango}(\mathcal{S}) = \operatorname{rango}(\mathcal{N})$, $\deg(\mathcal{Q}) \leq \deg(\mathcal{M})$ y $\deg(\mathcal{S}) \geq \deg(\mathcal{N})$, de modo que $J_1 \leq J_0$, y obtenemos una contradicción. Concluimos entonces que f es un isomorfismo.

2. Cotas para la curvatura y los campos de Higgs

El primer hueco a rellenar en la demostración del teorema consiste en demostrar que existe una cota para las $\|F_{A_n}\|_{L^2}$ y para las $\|\varphi_n\|_{L^2_1}$.

Para ello, supongamos que A es una conexión unitaria en E y, tomando otra conexión en el fibrado canónico K, formamos una conexión B en $\operatorname{End} E \otimes K$. Supongamos ahora que $\varphi \in \Omega^0(X, \operatorname{End} E \otimes K)$ es una sección diferenciable de $\operatorname{End} E \otimes K$ tal que $\bar{\partial}_B \varphi = 0$. Usando la métrica hermítica inducida en $\operatorname{End} E$ formamos $\langle \partial_B \varphi, \varphi \rangle \in \Omega^{1,0}(X)$ y

$$\bar{\partial} \langle \partial_B \varphi, \varphi \rangle = \langle \bar{\partial}_B \partial_B \varphi, \varphi \rangle - \langle \partial_B \varphi, \partial_B \varphi \rangle \in \Omega^{1,1}(X).$$

Ahora, como $\partial_B \bar{\partial}_B + \bar{\partial}_B \partial_B = d_B^2 = F_B$, y supusimos que $\bar{\partial}_B \varphi = 0$, tenemos que

$$\bar{\partial} \langle \partial_B \varphi, \varphi \rangle = \langle F_B \varphi, \varphi \rangle - \langle \partial_B \varphi, \partial_B \varphi \rangle \in \Omega^{1,1}(X).$$

Si integramos sobre X, el teorema de Stokes nos proporciona la *fórmula de Weitzenböck*:

$$\int_X \langle \partial_B \varphi, \partial_B \varphi \rangle = \int_X \langle F_B \varphi, \varphi \rangle.$$

Por la forma en la que la conexión A induce la conexión en $\operatorname{End} E$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_X \langle \partial_B \varphi, \partial_B \varphi \rangle &= \int_X \langle F_B \varphi, \varphi \rangle \\ &= \int_X \langle [F_A, \varphi], \varphi \rangle + (2g-2) \int_X \omega_X \langle \varphi, \varphi \rangle \\ &= \int_X \langle F_A, [\varphi, \varphi^\dagger] \rangle + (2g-2) \int_X \omega_X \langle \varphi, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que

$$0 \leq \langle F_A, [\varphi, \varphi^\dagger] \rangle_{L^2} + C \|\varphi\|_{L^2}^2.$$

Luego,

$$0 \leq \langle F_A + [\varphi, \varphi^\dagger], [\varphi, \varphi^\dagger] \rangle_{L^2} - \|[\varphi, \varphi^\dagger]\|_{L^2}^2 + C \|\varphi\|_{L^2}^2.$$

Por otra parte, en una sucesión minimizante $\{(A_n, \varphi_n)\}_n$ tenemos que $\|F_{A_n} + [\varphi_n, \varphi_n^\dagger]\|_{L^2} < M$, de modo que

$$\langle F_{A_n} + [\varphi_n, \varphi_n^\dagger], [\varphi_n, \varphi_n^\dagger] \rangle_{L^2} \leq M \|[\varphi_n, \varphi_n^\dagger]\|_{L^2}.$$

Juntando esta acotación a la anterior, obtenemos la desigualdad

$$\|[\varphi_n, \varphi_n^\dagger]\|_{L^2}^2 \leq C_1 + C_2 \|\varphi_n\|_{L^2}^2. \tag{1}$$

Basta entonces obtener una cota uniforme en las $\|\varphi_n\|_{L^2}^2$.

La obtención de esta cota se basa en el siguiente lema:

Lema 3. *Dada una matriz A, existen constantes $C_1, C_2 > 0$, dependiendo sólo de los autovalores de A tales que*

$$\left\| [A, A^\dagger] \right\|^2 \geq C_1 \left\| A \right\|^4 - C_2 (1 + \left\| A \right\|^2).$$

Demostración. hacer. □

De este modo, como los autovalores de un campo de Higgs φ se preservan bajo transformaciones gauge, obtenemos una desigualdad

$$\left\| [\varphi_n, \varphi_n^\dagger] \right\|^2 \geq C_1 \left\| \varphi_n \right\|^4 - C_2 (1 + \left\| \varphi_n \right\|^2).$$

Integrando, obtenemos

$$\left\|[\varphi_n, \varphi_n^\dagger]\right\|_{L^2}^2 \geq C_1 \int_X \|\varphi_n\|^4 - C_2 \left(\int_X \omega_X + \|\varphi_n\|_{L^2}^2 \right).$$

Por otra parte, de la desigualdad de Schwarz obtenemos

$$\int_X \|\varphi_n\|^2 \leq \left(\int_X \omega_X \int_X \|\varphi_n\|^4 \right)^{1/2}.$$

Como hemos asumido que $\int_X \omega_X = 1$, tenemos que

$$\left\|[\varphi_n, \varphi_n^\dagger]\right\|_{L^2}^2 + C_2 \geq \|\varphi_n\|_{L^2}^4 - C_2 \|\varphi_n\|_{L^2}^2 .$$

Usando ahora la desigualdad (1), concluimos que existe una constante C tal que

$$\|\varphi_n\|_{L^2} \leq C.$$

Buscamos ahora una cota para las $\|\varphi_n\|_{L_1^2}$. La desigualdad del Lema 3 da una cota para $\|\varphi_n\|_{L^4}$. Ahora, φ_n satisface la ecuación elíptica $\bar{\partial}_{A_n}\varphi_n = 0$, que puede escribirse como

$$\bar{\partial}\varphi_n + [\alpha_n, \varphi_n] = 0.$$

Como A_n es acotada en L_1^2 y la inclusión $L_1^2 \subset L^4$ es compacta, tenemos una cota L^4 en α_n y en φ_n, y por tanto una cota L^2 en $[\alpha_n, \varphi_n]$. Por otra parte, como $\bar{\partial}$ es un operador elíptico, tenemos una desigualdad

$$\|\varphi_n\|_{L_1^2} \leq C(\left\|\bar{\partial}\varphi_n\right\|_{L^2} + \|\varphi_n\|_{L^2}).$$

Así, las desigualdades (2) y (2) proporcionan una cota L_1^2 para φ_n.

Una vez hemos demostrado estas acotaciones, tenemos los requisitos suficientes para poder aplicar el teorema de Uhlenbeck a nuestra situación.

3. Las cotas de Donaldson

El siguiente hueco que debemos rellenar en la demostración son las cotas de Donaldson. Dividiremos la demostración de estas cotas en dos lemas que procedemos a demostrar a continuación.

Lema 4. *Sea (A, φ) una estructura de fibrado de Higgs en E que puede expresarse como una extensión de fibrados de Higgs $0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{E}_A \to \mathcal{N} \to 0$. Si $\mu(\mathcal{M}) \geq \mu(E)$, entonces,*

$$J(A, \varphi) \geq J_0 = \operatorname{rango} \mathcal{M}(\mu(\mathcal{M}) - \mu(E)) + \operatorname{rango} \mathcal{N}(\mu(E) - \mu(\mathcal{N})).$$

Demostración. Hacer. □

Lema 5. *Supongamos que (A_0, φ_0) es una estructura de fibrado de Higgs estable en E y supongamos por inducción que la correspondencia de Hitchin–Kobayashi ha sido probada para fibrados de rango menor que* rango E. *Si $(\mathcal{E}_{A_0}, \varphi_0)$ puede expresarse como una extensión de fibrados de Higgs $0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{E}_{A_0} \to \mathcal{Q} \to 0$ (de modo que, por la definición de estabilidad $\mu(\mathcal{S}) < \mu(E) < \mu(\mathcal{Q})$), entonces existen un par (A, φ) en la órbita $\mathcal{O}(A_0, \varphi_0)$ tal que*

$$J(A, \varphi) < J_1 = \operatorname{rango}(\mathcal{S})(\mu(E) - \mu(\mathcal{S})) + \operatorname{rango}(\mathcal{Q})(\mu(\mathcal{Q}) - \mu(E)).$$

Demostración. Hacer. □

Volvamos a la situación del diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{S} \arrow[r] & \mathcal{E}_{A_0} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & \mathcal{N} \arrow[l] & \mathcal{E}_A \arrow[l] & \mathcal{M} \arrow[l] & 0. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 5, tenemos que $J_1 > \text{ínf}\, J|_{\mathscr{O}(A_0,\varphi_0)}$. Ahora, si (A,φ) es el límite de una sucesión minimizante en la órbita $\mathscr{O}(A_0,\varphi_0)$, tenemos que

$$J(A,\varphi) \leq \text{ínf}\, J|_{\mathscr{O}(A_0,\varphi_0)} < J_1.$$

Por otra parte, el Lema 4 garantiza que $J(A,\varphi) \geq J_0$, de modo que concluimos que $J_0 \leq J(A,\varphi) < J_1$.