Geometría Algebraica y Geometría Analítica

Guillermo Gallego Sánchez

Última versión: 31 de julio de 2020

Índice general

Capítulo I

Teoría de haces

Hay otra cosa entre los antiguos Hobbits que merece mencionarse; un hábito sorprendente: absorbían o inhalaban, a través de pipas de arcilla o madera, el humo de la combustión de una hierba llamada hoja o hierba para pipa, quizás una variedad de la Nicotiana . *Hay mucho misterio en el origen de esta costumbre popular, o de este «arte», como los Hobbits preferían llamarlo.*

1. Prehaces y haces

Sea X un espacio topológico. Denotamos por $\mathbf{Op}(X)$ la categoría cuyos objetos son los subconjuntos abiertos $U \subset X$ y sus morfismos son las inclusiones de unos abiertos en otros.

Definición 1.1. Un *prehaz* en X con valores en una categoría $\mathscr{C}$ es un functor contravariante

$$\mathscr{F} : \mathbf{Op}(X) \longrightarrow \mathscr{C}.$$

Para cada abierto $U \subset X$, los elementos de $\mathscr{F}(U)$ se llaman *secciones* de $\mathscr{F}$ en U. Las imágenes por $\mathscr{F}$ de las inclusiones $U \hookrightarrow V$ se denotan por $r_U^V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$. Si $s \in \mathscr{F}(V)$ es una sección de $\mathscr{F}$ en V y $U \subset V$, denotamos $s|_U = r_U^V(s)$.

Si $\mathscr{C}$ es una subcategoría de **Sets**, un *haz* con valores en $\mathscr{C}$ es un prehaz $\mathscr{F} : \mathbf{Op}(X) \to \mathscr{C}$ que satisface la siguiente propiedad adicional: Dado un recubrimiento por abiertos $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ y una colección de secciones $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$, $i \in I$ tal que, para cada $i, j \in I$

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$$

existe una única sección $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s_i = s|_{U_i}$ para cada $i \in I$.

Un *morfismo de (pre)haces* es simplemente una transformación natural entre (pre)haces.

Observación 1.2. Análogamente, la propiedad de haz puede enunciarse como que el siguiente diagrama es un ecualizador

$$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{r^U_{U_i}} \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i) \underset{r^{U_j}_{U_i\cap U_j}}{\overset{r^{U_i}_{U_i\cap U_j}}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} \mathscr{F}(U_i \cap U_j).$$

Se deduce de la definición que $\mathscr{F}(\varnothing)$ el conjunto con un elemento. En efecto, podemos recubrir $\varnothing = \bigcup_{i\in\varnothing}$, y como $\prod_{i\in\varnothing} = \{\varnothing\}$, tenemos que $\mathscr{F}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

Proposición 1.3. *Sean $\mathscr{F}$ es un haz en un espacio topológico X y U un abierto de X con un recubrimiento por abiertos $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Si $s_1, s_2 \in \mathscr{F}(U)$ son dos secciones tales que $s_1|_{U_i} = s_2|_{U_i}$ para cada $i \in I$, entonces $s_1 = s_2$.*

Demostración. En efecto, si s_1 y s_2 coinciden en todos los U_i, en particular coinciden en las intersecciones, de modo que por ser $\mathscr{F}$ un haz existe una única sección $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_1|_{U_i}$ para cada $i \in I$. Por tanto, $s_1 = s_2 = s$. □

Ejemplo 1.4. A parte de los ejemplos triviales, el ejemplo más típico de haz es el de las funciones continuas: si X e Y son espacios topológicos, el prehaz

$$\begin{aligned} C_X(-, Y) : \mathbf{Op}(X) &\longrightarrow \mathbf{Sets} \\ U &\longmapsto C(U, Y), \end{aligned}$$

donde $C(U, Y)$ denota el conjunto de funciones continuas $U \to Y$, y los homomorfismos incluidos por las restricciones son las funciones. Es inmediato comprobar que este prehaz es, de hecho, un haz.

Definición 1.5. Sea $\mathscr{F}$ un prehaz en un espacio topológico X. Definimos la *espiga* de $\mathscr{F}$ en un punto x como el límite directo

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathscr{F}(U).$$

Es decir, un elemento de $\mathscr{F}_x$ está representado por un par (U, s), con U un entorno abierto de x y s un elemento de $\mathscr{F}(U)$. Dos pares (U, s) y (V, t) definen el mismo elemento de $\mathscr{F}_x$ si y sólo si existe un entorno abierto de x, $W \subset U \cap V$, tal que $s|_W = t|_W$. Por definición, para cada entorno abierto U de x, tenemos un morfismo natural $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$.

El espacio étalé asociado a un prehaz

Definición 1.6. Sea X un espacio topológico. Un *espacio étalé* sobre X es un par (F, p), donde F es un espacio topológico y $p : F \to X$ un homeomorfismo local. En otras palabras, para cada punto $x \in X$ existe un entorno abierto U de x tal que $p : p^{-1}(U) \to U$ es un homeomorfismo.

Si $U \subset X$ es un subconjunto abierto, una *sección local* de F en U es una aplicación continua $s : U \to F$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_U$. El conjunto de las secciones de F en un abierto $U \subset X$ se denota por $\Gamma(U, F)$.

Proposición 1.7. *Si X es un espacio topológico y $p : F \to X$ es un espacio étalé sobre X, el prehaz $U \mapsto \Gamma(U, F)$, con los homomorfismos de restricción de aplicaciones, es un haz.*

Demostración. En efecto, por definición las secciones $U \to F$ en particular son aplicaciones continuas, luego cumplen la condición de haz. □

Sean X un espacio topológico, $\mathscr{C}$ una subcategoría de **Sets** y $\mathscr{F} : \mathbf{Op}(X) \to \mathscr{C}$ un prehaz con valores en $\mathscr{C}$. Para cada abierto U de X y para cada $s \in \mathscr{F}(U)$ podemos definir la función

$$\begin{aligned} \tilde{s} : U &\longrightarrow \tilde{\mathscr{F}} \\ x &\longmapsto s_x, \end{aligned}$$

donde s_x es la imagen de s por el morfismo natural $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$. Se define el *espacio étalé asociado a* $\mathscr{F}$ como el espacio

$$\tilde{\mathscr{F}} = \coprod_{x \in X} \mathscr{F}_x,$$

con $p : \tilde{\mathscr{F}} \to X$ la aplicación que manda un punto $y \in \mathscr{F}_x$ a x y con la topología generada por los abiertos de la forma

$$\{\tilde{s}(U) : U \subset X \text{ abierto}, s \in \mathscr{F}(U)\}.$$

Proposición 1.8. *La aplicación $p : \tilde{\mathscr{F}} \to X$ es un homeomorfismo local. Por tanto, $\tilde{\mathscr{F}}$ es un espacio étalé sobre X.*

Demostración. En efecto, p es continua, ya que si $U \subset \tilde{\mathscr{F}}$ es un abierto, $p^{-1}(U) = \coprod_{x \in U} \mathscr{F}_x$. Ahora, si $x \in U$ y $s_x \in p^{-1}(U)$, podemos tomar un representante (s, V) de s_x, para $V \subset U$ un entorno de x, de modo que el abierto $\tilde{s}(V) \subset p^{-1}(U)$ es un entorno de s_x. Más aún, $p(\tilde{s}(V)) = V$ y $\tilde{s} : V \to \tilde{s}(V)$ es continua y una inversa de p. Por tanto, p es un homeomorfismo local. □

Si $\mathscr{F}$ es un prehaz y $\tilde{\mathscr{F}}$ es su espacio étalé, el haz de secciones $\Gamma(-, \tilde{\mathscr{F}})$ se llama el *haz asociado a* $\mathscr{F}$.

Proposición 1.9. *Si $\mathscr{F}$ es un haz, entonces la aplicación $\mathscr{F} \to \Gamma(-, \tilde{\mathscr{F}})$ que, para cada abierto U de X tiene la forma*

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(U) &\longrightarrow \Gamma(U, \tilde{\mathscr{F}}) \\ s &\longmapsto \tilde{s}, \end{aligned}$$

es un isomorfismo de haces.

Demostración. Basta ver que cada una de las $\mathscr{F}(U) \to \Gamma(U, \tilde{\mathscr{F}})$ es biyectiva. En efecto, es inyectiva, porque si $s_1, s_2 \in \mathscr{F}(U)$ son tales que $\tilde{s}_1 = \tilde{s}_2$, entonces en todos los puntos $x \in X$ tenemos que $s_{1,x} = s_{2,x}$. Pero entonces, para cada $x \in U$ existe un entorno abierto V^x de x de modo que $s_1|_{V^x} = s_2|_{V^x}$. Por tanto, $s_1 = s_2$.

Para ver que es sobreyectiva tomemos una sección $\sigma \in \Gamma(U, \tilde{\mathscr{F}})$. Para cada $x \in U$ hay un entorno V de x y $s \in \mathscr{F}(V)$ tal que $\sigma(x) = s_x$. Por tanto, las secciones σ y $\tilde{s}$ coinciden en el punto x. Ahora, como σ y $\tilde{s}$ son inversas locales del homeomorfismo local π, deben coincidir en un entorno W de x. Así, obtenemos un recubrimiento por abiertos $U = \bigcup_{x \in X} W^x$ y una familia de secciones $s^x \in \mathscr{F}(W^x)$ tal que $\tilde{s^x} = \sigma|_{W^x}$. Por tanto, $\tilde{s^x}|_{W^x \cap W^y} = \tilde{s^y}|_{W^x \cap W^y}$, y, como ya hemos visto que la aplicación $s \mapsto \tilde{s}$ es inyectiva, tenemos que $s^x|_{W^x \cap W^y} = s^y|_{W^x \cap W^y}$. Ahora, por ser $\mathscr{F}$ un haz, existe una $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{W^x} = s^x$. Por tanto,

$$\tilde{s}|_{W^x} = \widetilde{s|_{W^x}} = \tilde{s^x} = \sigma|_{W^x}.$$

De nuevo, por ser $\mathscr{F}$ un haz, tenemos que $\tilde{s} = \sigma$, luego $s \mapsto \tilde{s}$ es sobreyectiva. □

Observación 1.10. Recordemos que una base $\mathfrak{B}$ de un espacio topológico X es un subconjunto de la topología de X tal que, para todo punto $x \in X$ y para todo entorno U de x, existe un elemento $B_x \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_x$ y $B_x \subset U$. Por tanto, si $\mathscr{F}$ es un haz en X, para cualquier $x \in X$, podemos obtener la espiga de $\mathscr{F}$ en x tomando el límite solo en los abiertos de la base,

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U) = \varinjlim_{x \in B \in \mathfrak{B}} \mathscr{F}(B).$$

Consideremos ahora en el espacio étalé, $\tilde{\mathscr{F}} = \prod_{x \in X} \mathscr{F}_x$, la topología generada por los abiertos de la forma

$$\{\tilde{s}(B) : B \subset \mathfrak{B}, s \in \mathscr{F}(B)\}.$$

Llamemos a esta nueva topología $\tau_{\mathfrak{B}}$, mientras que τ denota la topología definida previamente para el espacio étalé. Claramente, $\tau_{\mathfrak{B}} \subset \tau$. Veamos ahora que todo abierto $V \in \tau$ está en $\tau_{\mathfrak{B}}$. En efecto, si $V \in \tau$ y $s_x \in V$, entonces existe un entorno $\tilde{s}(U) \subset V$ de s_x. Ahora, si tomo $B_x \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_x$ y $B_x \subset U$, tengo que $s_x = \tilde{s}(x) \in \tilde{s}(B_x)$. Por tanto, $\tilde{s}(B_x) \subset \tilde{s}(U) \subset V$. Tenemos entonces que $\tau \subset \tau_{\mathfrak{B}}$, luego $\tau = \tau_{\mathfrak{B}}$. La conclusión que debemos sacar de esto es que *un haz está completamente determinado por su valor en los abiertos de una base*.

Imágenes directas e inversas

Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre dos espacios topológicos. Para cualquier haz $\mathscr{F}$ en X podemos definir el *haz imagen directa* $f_*\mathscr{F}$ que a cada abierto $U \subset Y$ le asocia el conjunto $f_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(f^{-1}(V))$. En particular, si $i : Z \hookrightarrow X$ es una inmersión cerrada y $\mathscr{F}$ es un haz en Z podemos *extenderlo por* 0 *a* X si consideramos el haz $i_*\mathscr{F}$. Por otra parte, si $\mathscr{G}$ es un haz en Y y consideramos el prehaz

$$U \longmapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathscr{G}(U),$$

el haz asociado se denota por $f^{-1}\mathscr{G}$ y se llama el *haz imagen inversa*. Nótese que, si $p : \tilde{\mathscr{G}} \to Y$ es el espacio étalé asociado a $\mathscr{G}$, el espacio étalé $\widetilde{f^{-1}\mathscr{G}}$ asociado a su imagen inversa cumple la propiedad universal de que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{f^{-1}\mathscr{G}} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathscr{G}} \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado en la categoría de espacios topológicos. Esta es, por tanto, otra forma de definir el haz $f^{-1}\mathscr{G}$. La asignación $\mathscr{F} \mapsto f_*\mathscr{F}$ da un functor de la categoría de haces en X a la categoría de haces en Y. Análogamente, $\mathscr{G} \mapsto g^{-1}\mathscr{G}$ da un functor de la categoría de haces en Y a la categoría de haces en X.

Proposición 1.11. *Los functores f_* y f^{-1} son adjuntos, es decir,*

$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

Demostración. HACER □

2. Haces de módulos

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico. Un *haz de anillos en* X es un haz $\mathscr{A}$ con valores en la categoría de los anillos conmutativos con unidad. Si $\mathscr{A}$ es un haz de anillos en X, el par $(X, \mathscr{A})$ se llama un *espacio anillado*.

Definición 2.2. Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio anillado. Un *haz de* $\mathscr{A}$*-módulos* (o $\mathscr{A}$*-módulo*) es un haz de grupos abelianos $\mathscr{F}$ en X tal que:

1. Para cada abierto $U \subset X$, el grupo abeliano $\mathscr{F}(U)$ es un $\mathscr{A}(U)$-módulo.
2. Para cada inclusión de abiertos $U \subset V$, los homomorfismos $r_U^V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ son $\mathscr{A}(U)$-lineales.

Si, en particular, para cada $U \subset X$, $\mathscr{F}(U) \subset \mathscr{A}(U)$, entonces decimos que $\mathscr{F}$ es un *haz de ideales de* $\mathscr{A}$.

Un morfismo de haces $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ entre dos haces de $\mathscr{A}$-módulos es un *morfismo de haces de* $\mathscr{A}$*-módulos* si para cada abierto $U \subset X$, la aplicación $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ es un homomorfismo de $\mathscr{A}(U)$-módulos.

Ejemplo 2.3. Las construcciones típicas de la categoría de los módulos sobre un anillo conmutativo pueden generalizarse a la categoría de haces de módulos:

- Si $\{\mathscr{F}_\alpha\}$ es una familia de haces de $\mathscr{A}$-módulos, su suma directa $\bigoplus_\alpha \mathscr{F}_\alpha$ también es un haz de $\mathscr{A}$-módulos: $(\bigoplus_\alpha \mathscr{F}_\alpha)(U) = \bigoplus_\alpha \mathscr{F}_\alpha(U)$. De forma análoga podemos definir los productos directos, límites directos y límites inversos.

- Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son $\mathscr{A}$-módulos, el conjunto de morfismos de $\mathscr{A}$-modulos entre $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$, $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ es un grupo abeliano. Por otra parte, podemos definir el prehaz
$$U \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}|_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U),$$
que es un haz y se denota por $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$. Todo elemento de la espiga $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_x$ define un único homomorfismo $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x, \mathscr{G}_x)$, sin embargo, ésta no es necesariamente una correspondencia biyectiva.

- Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son $\mathscr{A}$-módulos, definimos su producto tensorial $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}$ como el haz asociado al prehaz
$$U \longmapsto \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathscr{A}(U)} \mathscr{G}(U).$$

- Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de $\mathscr{A}$-módulos. Definimos el *núcleo de* φ como el prehaz
$$U \longmapsto \ker(\varphi(U)),$$
que es un haz. De forma análoga, definimos los *prehaces imagen y conúcleo* como $U \longmapsto \operatorname{im}(\varphi(U))$ y $U \longmapsto \operatorname{coker}(\varphi(U))$. Estos dos prehaces no son haces en general [EJEMPLO], así que definimos sus *haces imagen*, $\operatorname{im}\varphi$, y *conúcleo*, $\operatorname{coker}\varphi$, como los haces asociados a estos prehaces. Decimos que φ es *inyectivo* si $\ker\varphi = 0$ y decimos que es *sobreyectivo* si $\operatorname{im}\varphi = \mathscr{G}$. Análogamente, decimos que una sucesión
$$\cdots \longrightarrow \mathscr{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathscr{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathscr{F}_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

es exacta en $\mathscr{F}_i$ si $\ker \varphi_i = \operatorname{im} \varphi_{i-1}$. Esto es equivalente a que la sucesión inducida en las espigas

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{F}_{i-1,x} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathscr{F}_{i,x} \xrightarrow{\varphi_i} \mathscr{F}_{i+1,x} \longrightarrow \cdots$$

sea exacta en $\mathscr{F}_{i,x}$ para todo $x \in X$. Nótese sin embargo, que esto no implica que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{F}_{i-1}(U) \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathscr{F}_i(U) \xrightarrow{\varphi_i} \mathscr{F}_{i+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

sea exacta en todos los abiertos $U \subset X$. De hecho, es sencillo probar que una sucesión exacta corta $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ induce una sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}''(U)$$

en cada abierto $U \subset X$, pero no es necesario que el homomorfismo $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}''(U)$ sea sobreyectivo. Precisamente, la cohomología de haces se encarga de «medir» este «fallo en la exactitud» en la transición local-global.

Si $(X, \mathscr{A})$ e $(Y, \mathscr{B})$ son espacios anillados, definimos un *morfismo de espacios anillados* como un par $(f, f^\#)$, con $f : X \to Y$ una aplicación continua y $f^\# : \mathscr{B} \to f_*\mathscr{A}$ un morfismo de haces de anillos sobre Y. Si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{A}$-módulo, entonces $f_*\mathscr{F}$ es un $f_*\mathscr{A}$-módulo. Además, por medio del morfismo $f^\# : \mathscr{B} \to f_*\mathscr{A}$, podemos dotar a $f_*\mathscr{F}$ de una estructura de $\mathscr{B}$-módulo de forma natural. Por otra parte, supongamos que $\mathscr{G}$ es un $\mathscr{B}$-módulo. Por ser f_* y f^{-1} functores adjuntos, el morfismo $f^\# : \mathscr{B} \to f_*\mathscr{A}$ induce un morfismo $f^{-1}\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ de haces de anillos en X. Por tanto, $f^{-1}\mathscr{G}$ es un $f^{-1}\mathscr{B}$-módulo. Definimos el *$\mathscr{A}$-módulo imagen inversa $f^*\mathscr{G}$* como el haz de $\mathscr{A}$-módulos

$$f^*\mathscr{G} = f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathscr{B}} \mathscr{A}.$$

Haces coherentes

Definición 2.4. Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio anillado. Sea $\mathscr{F}$ un haz de $\mathscr{A}$-módulos.

1. Decimos que $\mathscr{F}$ es de *tipo finito* si para cada $x \in X$ existe un entorno $U \subset X$ de x y un homomorfismo sobreyectivo $\mathscr{A}^q|_U \to \mathscr{F}|_U$, para cierto $q \in \mathbb{N}$.

2. Decimos que $\mathscr{F}$ es de *relación de tipo finito* si, para todo $p \in \mathbb{N}$ y para todo homomorfismo $\alpha : \mathscr{A}^p \to \mathscr{F}$, $\ker \alpha$ es un haz de $\mathscr{A}$-módulos de tipo finito.

3. Decimos que $\mathscr{F}$ es *coherente* si es de tipo finito y de relación de tipo finito.

Observación 2.5. En particular, nótese que si $\mathscr{A}$ es un haz de anillos, siempre es de tipo finito como $\mathscr{A}$-módulo. Por tanto, $\mathscr{A}$ será coherente como $\mathscr{A}$-módulo si y sólo si es de relación de tipo finito. En tal caso decimos que $\mathscr{A}$ es un *haz de anillos coherente*.

Veamos algunas de las propiedades básicas de los haces coherentes. En primer lugar, nótese que si $\mathscr{F}$ es un haz de tipo finito, $x \in X$ es un punto y $U \subset X$ es un entorno de x en el que hay homomorfismo sobreyectivo $\varphi : \mathscr{A}^q|_U \to \mathscr{F}|_U$, las secciones

$$s_1 = \varphi(1, 0, \ldots, 0), \ldots, s_q = \varphi(0, \ldots, 0, 1)$$

generan el haz $\mathscr{F}|_U$. En particular, $s_1(x),\dots,s_q(x)$ generan la espiga $\mathscr{F}_x$.

Entendamos ahora qué quiere decir que un haz $\mathscr{F}$ sea de relación de tipo finito. Si consideramos un homomorfismo $\alpha : (\mathscr{A})^p \to \mathscr{F}$ y llamamos $f_1 = \alpha(1,0,\dots,0),\dots,f_p = \alpha(0,\dots,0,1)$, por linealidad un $g = (g^1,\dots,g^p) \in (\mathscr{F})^p$ está en $\ker\alpha$ si se cumple la relación

$$\sum_i g^i f_i = 0.$$

Probar que $\ker\alpha$ es de tipo finito es lo mismo que demostrar que localmente hay entornos U tales que $\ker\alpha|_U$ está generado por una cantidad finita de elementos $g_1,\dots,g_q \in (\mathscr{A})^p|_U$.

Proposición 2.6. *Sea $\mathscr{F}$ un haz de tipo finito. Si $s_1,\dots,s_p \in \mathscr{F}(U)$ son secciones de $\mathscr{F}$ definidas en un entorno U de un punto $x \in X$ tales que $s_1(x),\dots,s_p(x)$ generan la espiga $\mathscr{F}_x$, entonces existe un entorno $V \subset U$ de x de forma que $s_1(y),\dots,s_p(y)$ generan $\mathscr{F}_y$ para cualquier $y \in V$.*

Demostración. Por ser $\mathscr{F}$ de tipo finito, existen unas secciones $t_1,\dots,t_q \in \mathscr{F}(W)$ definidas en un entorno W de x tales que $t_1(y),\dots,t_q(y)$ generan la espiga $\mathscr{F}_y$ para cada $y \in W$. Ahora, por hipótesis, existen unas secciones $f_{ij} \in \mathscr{A}(W')$ definidas en un cierto entorno $W' \subset W$ tales que $t_i(x) = \sum_j f_{ij}(x)s_j(x)$. Por tanto, existe un entorno $V \subset W'$ de x en el que $t_i = \sum_j f_{ij}s_j$. En particular, para cada punto $y \in V$, $t_i(y) = \sum_j f_{ij}(y)s_j(y)$. Pero, como las $t_i(y)$ generan $\mathscr{F}_y$, también lo hacen las $s_j(y)$. □

Proposición 2.7. *Todo subhaz de tipo finito de un haz coherente es un haz coherente.*

Demostración. Claramente, dada una aplicación $\mathscr{A}^p \to \mathscr{G}$, si $\mathscr{G}$ es un subhaz de otro haz $\mathscr{F}$, entonces el núcleo de esa aplicación coincide con el núcleo de la aplicación $\mathscr{A}^p \to \mathscr{F}$ obtenida al componer con la inclusión $\mathscr{G} \hookrightarrow \mathscr{F}$. Por tanto, si $\mathscr{F}$ es un haz de relación de tipo finito, también lo es cualquier subhaz suyo. □

Proposición 2.8. *Si un $\mathscr{A}$-módulo $\mathscr{F}$ es coherente, localmente es isomorfo al conúcleo de un homomorfismo $\varphi : \mathscr{A}^p \to \mathscr{A}^q$.*

Demostración. Si $\mathscr{F}$ es coherente, por ser de tipo finito, tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker\pi \xhookrightarrow{\iota} \mathscr{A}^q|_U \xrightarrow{\pi} \mathscr{F}|_U \longrightarrow 0.$$

Ahora, por ser $\ker\pi$ de tipo finito tenemos otra sucesión exacta (tal vez reduciendo el entorno U)

$$\mathscr{A}^p|_U \xrightarrow{\varpi} \ker\pi \longrightarrow 0.$$

Llamando $\varphi = \iota \circ \varpi$, uniendo estas sucesiones exactas obtenemos la sucesión exacta

$$\mathscr{A}^p|_U \xrightarrow{\varphi} \mathscr{A}^q|_U \xrightarrow{\pi} \mathscr{F}|_U \longrightarrow 0,$$

de modo que $\mathscr{F}|_U \cong \operatorname{coker}\varphi$. □

Veamos ahora cómo las típicas construcciones de los haces de módulos nos permiten obtener unos haces coherentes a partir de otros. El resultado clave es el siguiente teorema.

Teorema 2.9. *Sea*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de homomorfismos de haces. Si dos de los tres haces $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H}$ son coherentes, el tercero también lo es.

Demostración. HACER □

Corolario 2.10. *La suma directa de una familia finita de haces coherentes es un haz coherente.*

Corolario 2.11. *Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo entre haces coherentes. El núcleo, el conúcleo y la imagen de φ son también haces coherentes.*

Demostración. Como $\mathscr{F}$ es coherente, $\operatorname{im}\varphi$ es de tipo finito y por tanto coherente, ya que es un subhaz de $\mathscr{G}$. Ahora, tenemos las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \operatorname{im}\varphi \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{im}\varphi \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi \longrightarrow 0.$$

Por el Teorema 2.9, tenemos que $\ker\varphi$ y $\operatorname{coker}\varphi$ son coherentes. □

Corolario 2.12. *Si un haz de anillos $\mathscr{A}$ es coherente como $\mathscr{A}$-módulo, entonces un $\mathscr{A}$-módulo es coherente si y sólo si es localmente isomorfo al conúcleo de un homomorfismo $\varphi : \mathscr{A}^p \to \mathscr{A}^q$.*

Demostración. En efecto, por la Proposición 2.8, si un $\mathscr{A}$-módulo es coherente entonces es localmente isomorfo a un conúcleo de algún $\varphi : \mathscr{A}^p \to \mathscr{A}^q$. Ahora, por ser $\mathscr{A}$ coherente, también lo son $\mathscr{A}^p$ y $\mathscr{A}^q$ y, por el resultado anterior, el conúcleo de un morfismo entre ellos también es coherente. □

Corolario 2.13. *Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos subhaces coherentes de un haz coherente $\mathscr{H}$. Los haces $\mathscr{F}+\mathscr{G}$ y $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ son coherentes.*

Demostración. El haz $\mathscr{F}+\mathscr{G}$ claramente de tipo finito, al serlo $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$, luego es coherente, por ser subhaz de un haz coherente. Por otra parte, $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ es el núcleo de $\mathscr{F} \to \mathscr{H}/\mathscr{G}$. □

Proposición 2.14. *Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son dos haces coherentes de $\mathscr{A}$-módulos, $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{G}$ es un haz coherente.*

Demostración. HACER □

Proposición 2.15. *Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos haces de $\mathscr{A}$-módulos, con $\mathscr{F}$ coherente. Para cada $x \in X$, el módulo $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})_x$ es isomorfo a* $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x, \mathscr{G}_x)$.

Proposición 2.16. *Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son coherentes, el haz $\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ es coherente.*

Proposición 2.17. *Sean $\mathscr{A}$ un haz coherente de anillos y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{A}$-módulo coherente. El subhaz de $\mathscr{A}(U)$ que a cada abierto $U \subset X$ le asigna el* ideal anulador *de $\mathscr{F}(U)$ como $\mathscr{A}(U)$-módulo:*

$$\operatorname{Ann}(\mathscr{F}(U)) = \{a \in \mathscr{A}(U) : af = 0 \ \forall f \in \mathscr{F}(U)\}$$

es un haz coherente de ideales de $\mathscr{A}$.

Demostración. Claramente, $\operatorname{Ann}(\mathscr{F}(U))$ es el núcleo del homomorfismo

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(U) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}(U)}(\mathscr{F}(U), \mathscr{F}(U)) \\ a &\longmapsto (f \mapsto af). \end{aligned}$$

Por tanto, $\operatorname{Ann}(\mathscr{F})$ es el núcleo de un homomorfismo $\mathscr{A} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ entre haces coherentes, luego es coherente. □

Proposición 2.18. *Sea X un espacio topológico e $i : Y \hookrightarrow X$ un subespacio cerrado suyo. Sea $\mathscr{A}$ un haz de anillos sobre Y. Un $\mathscr{A}$-módulo $\mathscr{F}$ es de tipo finito si y sólo si el $i_*\mathscr{A}$-módulo $i_*\mathscr{F}$ es de tipo finito. Igualmente, $\mathscr{F}$ es coherente como $\mathscr{A}$-módulo si y sólo si $i_*\mathscr{F}$ es coherente como $i_*\mathscr{A}$-módulo. En particular, $\mathscr{A}$ es coherente como $\mathscr{A}$-módulo si y sólo si $i_*\mathscr{A}$ es coherente como $i_*\mathscr{A}$-módulo.*

Demostración. Sea U un abierto de X y sea $V = U \cap Y = i^{-1}(U)$. Todo homormofismo $\varphi : \mathscr{A}^p|_V \to \mathscr{F}|_V$ define un homomorfismo $i_*\varphi : (i_*\mathscr{A})^p|_U \to i_*\mathscr{F}|_U$ y recíprocamente. Además, φ es sobreyectivo si y sólo si $i_*\varphi$ lo es. El resto se demuestra de la misma forma. □

Teorema 2.19. *Sea $\mathscr{A}$ un haz coherente de anillos y sea $\mathscr{I}$ un haz coherente de ideales de $\mathscr{A}$. Un haz de $\mathscr{A}/\mathscr{I}$-módulos $\mathscr{F}$ es coherente si y sólo si es coherente como $\mathscr{A}$-módulo. En particular, $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ es un haz de anillos coherente.*

Demostración. Claramente, ser de tipo finito sobre $\mathscr{A}$ y sobre $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ son nociones equivalentes. Sean $\mathscr{F}$ un haz coherente como $\mathscr{A}$-módulo y $\alpha : (\mathscr{A}/\mathscr{I})^q \to \mathscr{F}$. La proyección canónica al cociente induce la aplicación sobreyectiva $\pi : \mathscr{A}^q \to (\mathscr{A}/\mathscr{I})^q$, que envía $\ker(\pi\circ\alpha)$ a $\ker\alpha$. Como $\mathscr{F}$ es coherente como $\mathscr{A}$-módulo, $\ker(\pi \circ \alpha)$ es de tipo finito de modo que tenemos una sucesión exacta $\mathscr{A}^p \to \ker(\pi \circ \alpha) \to \ker\alpha \to 0$. En particular tenemos una aplicación sobreyectiva $\mathscr{A}^p \to \ker\alpha$. Por tanto, $\mathscr{F}$ es coherente como $\mathscr{A}/\mathscr{I}$-módulo.

Como $\mathscr{A}$ e $\mathscr{I}$ son coherentes como $\mathscr{A}$-módulos, su cociente es coherente como $\mathscr{A}$-módulo, ya que tenemos la sucesión exacta $0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}/\mathscr{I} \to 0$. Por lo que acabamos de probar, $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ es también coherente como $\mathscr{A}/\mathscr{I}$-módulo. Ahora, si $\mathscr{F}$ es coherente sobre $\mathscr{A}/\mathscr{I}$, es localmente isomorfo al conúcleo de un homomorfismo $\varphi : (\mathscr{A}/\mathscr{I})^q \to (\mathscr{A}/\mathscr{I})^p$ y, como $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ es coherente sobre $\mathscr{A}$, $\mathscr{F}$ también es coherente sobre $\mathscr{A}$. □

3. Cohomología de haces

Haces fofos

Sea X un espacio topológico.

Definición 3.1. Un haz $\mathscr{F}$ en X es *fofo* si para cada inclusión de abiertos $U \hookrightarrow V$, la aplicación $r_U^V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ es sobreyectiva.

Proposición 3.2. *Sea $0 \to \mathscr{F}' \xrightarrow{i} \mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{F}'' \to 0$ una sucesión exacta de haces de grupos abelianos. Si el haz $\mathscr{F}'$ es fofo, entonces, para todo abierto U, también es exacta la sucesión inducida*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}'(U) \xrightarrow{\ i\ } \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\ p\ } \mathscr{F}''(U) \longrightarrow 0.$$

Demostración. Basta ver que p es sobreyectiva. Tomemos $s'' \in \mathscr{F}''(U)$ y consideremos la familia de los pares (V,s), con $V \subset U$ un abierto y $s \in \mathscr{F}(V)$, que cumplen que $p(s) = s''|_V$. Podemos dotar a esta familia de un orden parcial: $(V_1,s_1) < (V_2,s_2)$ si y sólo si $V_1 \subset V_2$ y $s_1 = s_2|_{V_1}$. Ahora, si $\{(V_\alpha,s_\alpha)\}_\alpha$ es una cadena en esta conjunto parcialmente ordenado, podemos considerar el conjunto abierto $\bigcup_\alpha V_\alpha$. Por ser $\mathscr{F}$ un haz, las s_α definen una única sección $s \in \mathscr{F}(\bigcup_\alpha V_\alpha)$ tal que $s_\alpha = s|_{U_\alpha}$, de modo que $(\bigcup_\alpha V_\alpha, s_\alpha)$ es una cota superior de la cadena $\{(V_\alpha,s_\alpha)\}_\alpha$. Por el lema de Zorn, la familia tiene un elemento maximal (V,s).

Supongamos que $V \neq U$. Entonces, para cada punto $x \in U \setminus V$, como $\mathscr{F}_x \to \mathscr{F}''_x$ es sobreyectiva, existe un entorno W de x y $t \in \mathscr{F}(W)$ tal que $p(t) = s''$. La sucesión es exacta en $\mathscr{F}(U)$ y $p(s-t)=0$ en $V\cap W$, existe un $s'\in\mathscr{F}'(V\cap W)$ tal que $i(s')=s-t$ en $V\cap W$. Además, como $\mathscr{F}'$ es fofo podemos tomar este s' en $\mathscr{F}'(W)$, de modo que $i(s'|_{V\cap W})=s-t$. Pero entonces, $t+i(s')\in\mathscr{F}(W)$ y $s\in\mathscr{F}(V)$ coinciden en $V\cap W$, de modo que, por ser $\mathscr{F}$ un haz, definen una única sección $f\in\mathscr{F}(V\cup W)$, que cumple que $p(f)=s''$ y que $f|_V=s$. Hemos encontrado entonces un par $(V\cup W,f)>(V,s)$, contradiciendo la maximalidad de (V,s). □

Corolario 3.3. *Si $0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ es una sucesión exacta y $\mathscr{F}'$ y $\mathscr{F}$ son fofos, entonces también lo es $\mathscr{F}''$.*

Demostración. Tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{F}(X) & \longrightarrow & \mathscr{F}''(X) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathscr{F}(U) & \longrightarrow & \mathscr{F}''(U) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

con filas exactas. Como la columna de la izquierda es sobreyectiva, la aplicación $\mathscr{F}''(X)\to\mathscr{F}''(U)$ es sobreyectiva. Por tanto, $\mathscr{F}''$ es fofo. □

Corolario 3.4. *Dada una sucesión exacta de haces fofos*

$$0\longrightarrow\mathscr{F}_0\longrightarrow\mathscr{F}_1\longrightarrow\mathscr{F}_2\longrightarrow\cdots,$$

también es exacta la sucesión inducida en las secciones globales

$$0\longrightarrow\mathscr{F}_0(X)\longrightarrow\mathscr{F}_1(X)\longrightarrow\mathscr{F}_2(X)\longrightarrow\cdots.$$

Demostración. Si definimos $\mathscr{G}_i=\ker(\mathscr{F}_i\to\mathscr{F}_{i+1})$, podemos descomponer la sucesión exacta larga en sucesiones exactas cortas

$$0\longrightarrow\mathscr{G}_i\longrightarrow\mathscr{F}_i\longrightarrow\mathscr{G}_{i+1}\longrightarrow 0.$$

Por inducción en i, podemos mostrar que los $\mathscr{G}_i$ son fofos. En efecto, para $i=1$, $\mathscr{G}_1=\mathscr{F}_0$, que es fofo por hipótesis. Ahora, si $\mathscr{G}_i$ es fofo, entonces, por el corolario anterior, también lo es $\mathscr{G}_{i+1}$. Obtenemos entonces, para cada i, una sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow\mathscr{G}_i(X)\longrightarrow\mathscr{F}_i(X)\longrightarrow\mathscr{G}_{i+1}(X)\longrightarrow 0.$$

Juntando estas sucesiones obtenemos la sucesión exacta buscada. □

Definición 3.5. Si $\mathscr{F}$ un haz en X, definimos su *haz de Godement* $G(\mathscr{F})$ como el haz de *secciones discontinuas* del espacio étalé $\tilde{\mathscr{F}}$. Esto es, para cada $U\subset X$

$$G(\mathscr{F})(U)=\left\{s:U\to\tilde{\mathscr{F}}:\pi\circ f=\mathrm{id}_U\right\},$$

y los homomorfismos de restricción están dados simplemente por la restricción de aplicaciones.

Claramente, el haz de Godement es un haz. Más aún, es evidente que los homomorfismos de restricción son sobreyectivos, ya que como no exigimos ninguna propiedad extra a las secciones, podemos extenderlas de cualquier manera. Por tanto, el haz de Godement es fofo. Además, hay una inmersión natural $\mathscr{F}\hookrightarrow G(\mathscr{F})$. En resumen, hemos demostrado lo siguiente

Proposición 3.6. *Todo haz $\mathscr{F}$ admite una inclusión en un haz fofo, $\mathscr{F}\hookrightarrow G(\mathscr{F})$.*

Cohomología de haces

Las propiedades de los haces fofos nos van a permitir construir los grupos de cohomología de haces. En primer lugar, vamos a definir qué es lo que entendemos por una teoría de cohomología de haces y después demostraremos la existencia de una teoría con dichas características.

Definición 3.7. Sea X un espacio topológico, **Ab** la categoría de los grupos abelianos y $\mathbf{Ab}(X)$ la categoría de los haces de grupos abelianos sobre X. Una *teoría de cohomología de haces* en X es una colección de functores

$$\begin{aligned} H^i : \mathbf{Ab}(X) &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ \mathscr{F} &\longmapsto H^i(X, \mathscr{F}), \end{aligned}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$, que tiene las siguientes propiedades

1. $H^0(X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$,
2. Si $\mathscr{F}$ es un haz fofo, entonces $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$ para cada $i > 0$.
3. Para cada sucesión exacta corta de haces $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ y para cada $i \in \mathbb{N}$, existe un homomorfismo $\delta^i : H^i(X, \mathscr{H}) \to H^{i+1}(X, \mathscr{F})$ tal que:

(a) La sucesión inducida

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & H^0(X,\mathscr{G}) \arrow[r] & H^0(X,\mathscr{H}) \arrow[dll, rounded corners] \\ & H^1(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & H^1(X,\mathscr{G}) \arrow[r] & H^1(X,\mathscr{H}) \arrow[dll, rounded corners] \\ & H^2(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & \cdots & \end{tikzcd}$$

es exacta.

(b) Un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{F}' \arrow[r] & \mathscr{G}' \arrow[r] & \mathscr{H}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(X,\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X,\mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X,\mathscr{H}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X,\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & H^0(X,\mathscr{F}') \arrow[r] & H^0(X,\mathscr{G}') \arrow[r] & H^0(X,\mathscr{H}') \arrow[r] & H^1(X,\mathscr{F}') \arrow[r] & \cdots . \end{tikzcd}$$

Teorema 3.8. *Si X es un espacio topológico, existe una teoría de cohomología de haces H^i : $\mathbf{Ab}(X) \to \mathbf{Ab}$.*

Demostración. En primer lugar, vamos a construir los functores H^i. Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en X y sea $\mathscr{R}^0 = G(\mathscr{F})$ su haz de Godement. Definimos $\mathscr{F}^1 = G(\mathscr{F})/\mathscr{F}$, de modo que tenemos la sucesión exacta $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{R}^0 \to \mathscr{F}^1 \to 0$. Seguidamente, definimos $\mathscr{R}^1 = G(\mathscr{F}^1)$ y $\mathscr{F}^2 = \mathscr{R}^1/\mathscr{F}^1$, y tenemos otra sucesión exacta $0 \to \mathscr{F}^1 \to \mathscr{R}^1 \to \mathscr{F}^2 \to 0$. Procediendo por inducción, definimos $\mathscr{R}^i = G(\mathscr{F}^i)$ y $\mathscr{F}^{i+1} = \mathscr{R}^i/\mathscr{F}^i$, de modo que para cada $i > 0$ tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}^i \longrightarrow \mathscr{R}^i \longrightarrow \mathscr{F}^{i+1} \longrightarrow 0.$$

Juntando todas estas sucesiones exactas cortas, obtenemos una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{R}^0 \longrightarrow \mathscr{R}^1 \longrightarrow \mathscr{R}^2 \longrightarrow \cdots.$$

Esta sucesión se llama la *resolución de Godement*. Tomando secciones globales obtenemos un complejo

$$\mathscr{R}^0(X) \longrightarrow \mathscr{R}^1(X) \longrightarrow \mathscr{R}^2(X) \longrightarrow \cdots.$$

Definimos el *i-ésimo grupo de cohomología de haces de $\mathscr{F}$* precisamente como el i-ésimo grupo de cohomología de este complejo, es decir

$$H^i(X,\mathscr{F}) = H^i(\mathscr{R}^\bullet(X)) = \frac{\ker(\mathscr{R}^i(X) \to \mathscr{R}^{i+1}(X))}{\operatorname{im}(\mathscr{R}^{i-1}(X) \to \mathscr{R}^i(X))}.$$

Además, para cada morfismo de haces de grupos abelianos $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, podemos definir

$$\begin{aligned} f^0 : G(\mathscr{F}) &\longrightarrow G(\mathscr{G}) \\ s_x &\longmapsto (f \circ s)_x, \end{aligned}$$

para s una sección discontinua de $\tilde{\mathscr{F}}$. Esta aplicación desciende a los cocientes y, si denotamos por $\mathscr{R}^q(\mathscr{F})$ y $\mathscr{R}^q(\mathscr{G})$ a los elementos de las resoluciones de Godement de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$, respectivamente, repitiendo el proceso obtenemos un morfismo

$$f^q : \mathscr{R}^q(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{R}^q(\mathscr{G}),$$

para cada $q \geq 0$. Esto induce un morfismo de complejos $\mathscr{R}^\bullet(\mathscr{F})(X) \to \mathscr{R}^\bullet(\mathscr{G})(X)$ que a su vez induce un morfismo en todas las cohomologías, $f^q : H^q(X,\mathscr{F}) \to H^q(X,\mathscr{G})$. La functorialidad de esta asignación se concluye de la functorialidad de todas las construcciones. De modo que ya tenemos un functor $H^i : \mathbf{Ab}(X) \to \mathbf{Ab}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Veamos que este functor tiene las propiedades deseadas:

1. Ya vimos que tomar secciones globales respeta las sucesiones exactas por la izquierda, de modo que, como $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{R}^0 \to \mathscr{R}^1$ es exacta en $\mathscr{R}^0$, también es exacta $0 \to \mathscr{F}(X) \to \mathscr{R}^0(X) \to \mathscr{R}^1(X)$, de modo que

$$H^0(X,\mathscr{F}) = H^0(\mathscr{R}^\bullet(X)) = \ker(\mathscr{R}^0(X) \to \mathscr{R}^1(X)) = \mathscr{F}(X).$$

2. Si $\mathscr{F}$ es fofo, por el Corolario 3.4, la resolución de Godement induce una sucesión exacta en las secciones globales

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(X) \longrightarrow \mathscr{R}^0(X) \longrightarrow \mathscr{R}^1(X) \longrightarrow \mathscr{R}^2(X) \longrightarrow \cdots.$$

Como esta sucesión es exacta, sus grupos de cohomología son nulos para $i > 0$. Por tanto, para todo $i > 0$,

$$H^i(X,\mathscr{F}) = H^i(\mathscr{R}^\bullet(X)) = 0.$$

3. Si $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ es una sucesión exacta corta de haces, entonces es exacta en cada espiga, de modo que también es exacta la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow G(\mathscr{F})(X) \longrightarrow G(\mathscr{G})(X) \longrightarrow G(\mathscr{H})(X) \longrightarrow 0.$$

Además, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G(\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & G(\mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d] & G(\mathscr{H}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Las filas y las columnas de este diagrama son exactas, luego, por el lema de la serpiente, la sucesión $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{G}_1 \to \mathscr{H}_1 \to 0$ también es exacta. Repitiendo el proceso, obtenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow \mathscr{R}^\bullet(\mathscr{F})(X) \longrightarrow \mathscr{R}^\bullet(\mathscr{G})(X) \longrightarrow \mathscr{R}^\bullet(\mathscr{H})(X) \longrightarrow 0.$$

Esta sucesión induce una sucesión exacta larga en sus grupos de cohomología, de modo que obtenemos la sucesión exacta larga

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & H^0(X,\mathscr{G}) \arrow[r] & H^0(X,\mathscr{H}) \arrow[dll, out=-10, in=170] \\
 & H^1(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & H^1(X,\mathscr{G}) \arrow[r] & H^1(X,\mathscr{H}) \arrow[dll, out=-10, in=170] \\
 & H^2(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & \cdots . &
\end{tikzcd}$$

Esto prueba la propiedad 3.(a). La propiedad 3.(b) se deduce de la propiedad análoga para la sucesión exacta larga en cohomología de complejos. □

Observación 3.9. La construcción que hemos dado de los grupos de cohomología por medio de la resolución de Godement es sólo una de las múltiples maneras que existen de construir una teoría de cohomología de haces. Otras formas de construir la cohomología incluyen por ejemplo la de Grothendieck, como los functores derivados del functor tomar secciones, es decir por medio de resoluciones inyectivas, que es prácticamente igual que la nuestra; y la definición tomando límite por refinamiento en los grupos de cohomología de Čech. Veremos más sobre cohomología de Čech a continuación. Lo importante que hay que notar es que realmente da igual cómo uno construya la cohomología, ya que las únicas propiedades necesarias de la cohomología en todos los resultados que veremos a continuación son los axiomas dados en la Definición 3.7. El teorema de de Rham nos va a mostrar cómo realmente lo «único» que necesitamos para calcular los grupos de cohomología es una resolución acíclica.

Definición 3.10. Un haz $\mathscr{F}$ es *acíclico* si $H^i(X,\mathscr{F}) = 0$ para cada $i > 0$. Una *resolución acíclica* de un haz $\mathscr{F}$ es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{R}^0 \longrightarrow \mathscr{R}^1 \longrightarrow \mathscr{R}^2 \longrightarrow \cdots$$

tal que todos los $\mathscr{R}^i$ son acíclicos.

El siguiente resultado (que puede entenderse como una «versión abstracta» del teorema de de Rham, ya que éste es un corolario suyo) muestra cómo para calcular cohomología no es necesario tomar exactamente la resolución de Godement sino que cualquier resolución acíclica nos sirve.

Teorema 3.11 (Teorema de de Rham)**.** *Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos y sea una resolución acíclica suya*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{R}^0 \longrightarrow \mathscr{R}^1 \longrightarrow \mathscr{R}^2 \longrightarrow \cdots .$$

Se tiene que, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$H^i(X,\mathscr{F}) \cong H^i(\mathscr{R}^\bullet(X)).$$

Demostración. Podemos descomponer la resolución acíclica en sucesiones exactas $0 \to \mathscr{G}^i \to \mathscr{R}^i \to \mathscr{G}^{i+1} \to 0$, donde $\mathscr{G}^i = \ker(\mathscr{R}^i \to \mathscr{R}^{i+1})$, para cada $i \geq 0$. En particular, nótese que $\mathscr{G}^0 = \mathscr{F}$. Tomando la sucesión exacta larga en cohomología y usando que $\mathscr{R}^i$ es acíclico, sacamos dos conclusiones: que, para cada $p > 0$, tenemos un isomorfismo

$$H^p(X,\mathscr{G}^{i+1}) \cong H^{p+1}(X,\mathscr{G}^i);$$

y que tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{G}^i(X) \longrightarrow \mathscr{R}^i(X) \longrightarrow \mathscr{G}^{i+1}(X) \longrightarrow H^1(X,\mathscr{G}^i) \longrightarrow 0.$$

De aquí tenemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\ker(\mathscr{R}^i(X) \to \mathscr{G}^{i+1}(X)) \cong \mathscr{G}^i(X),$$

$$\operatorname{coker}(\mathscr{R}^i(X) \to \mathscr{G}^{i+1}(X)) \cong H^1(X,\mathscr{G}^i).$$

Por tanto,

$$H^i(\mathscr{R}^\bullet(X)) = \frac{\mathscr{G}^i(X)}{\operatorname{im}(\mathscr{R}^{i-1}(X) \to \mathscr{G}^i(X))} = \operatorname{coker}(\mathscr{R}^{i-1}(X) \to \mathscr{G}^i(X)) \cong H^1(X,\mathscr{G}^{i-1}).$$

De modo que tenemos

$$H^i(X,\mathscr{F}) = H^i(X,\mathscr{G}^0) \cong H^{i-1}(X,\mathscr{G}^1) \cong H^{i-2}(X,\mathscr{G}^2) \cong \cdots \cong H^1(X,\mathscr{G}^{i-1}) \cong H^i(\mathscr{R}^\bullet(X)),$$

como queríamos probar. □

Cohomología de Čech

Una vez hemos definido los *grupos de cohomología* $H^i(X,\mathscr{F})$, queda la cuestión de cómo podemos calcular estos grupos. Para ello vamos a recurrir a la *cohomología de Čech*. En primer lugar, vamos a introducir una notación: si X es un espacio topológico y $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento por abiertos de X, para cualquier conjunto finito de índices $i_0,\dots,i_p\in I$, denotamos la intersección como

$$U_{i_0,\dots,i_p}=U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p}.$$

Si asumimos el axioma de elección, podemos fijar también un buen orden $<$ en el conjunto de índices I.

Sea ahora $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en X. Para cada $p\geq 0$, definimos el grupo abeliano

$$C^p(\mathfrak{U},\mathscr{F})=\prod_{i_0<\cdots<i_p}\mathscr{F}(U_{i_0,\dots,i_p}).$$

Por tanto, un elemento $\alpha\in C^p(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ está determinado por los elementos $\alpha_{i_0,\dots,i_p}\in\mathscr{F}(U_{i_0,\dots,i_p})$ para cada colección $i_0<\cdots<i_p$ de $(p+1)$ elementos de I. Podemos definir entonces una aplicación $d:C^p(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to C^{p+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ que, a cada elemento $\alpha\in C^p(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ lo manda al elemento determinado por

$$(d\alpha)_{i_0,\dots,i_{p+1}}=\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\alpha_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_{p+1}}|_{U_{i_0,\dots,i_{p+1}}},$$

para cada colección $i_0,\dots,i_{p+1}$ de $(p+2)$ elementos de I. Nótese que está bien definida porque $\alpha_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_{p+1}}$ es un elemento de $\mathscr{F}(U_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_{p+1}})$ y al hacer la restricción obtenemos un elemento de $\mathscr{F}(U_{i_0,\dots,i_{p+1}})$. Se comprueba fácilmente que $d^2=0$, de modo que tenemos un complejo de grupos abelianos

$$\cdots\xrightarrow{\ d\ }C^{p-1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})\xrightarrow{\ d\ }C^p(\mathfrak{U},\mathscr{F})\xrightarrow{\ d\ }C^{p+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})\xrightarrow{\ d\ }\cdots.$$

Definición 3.12. Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{U}$ un recubrimiento por abiertos de X. Para cada haz de grupos abelianos $\mathscr{F}$ en X, definimos el *p-ésimo grupo de cohomología de Čech con respecto a* $\mathfrak{U}$, como el p-ésimo grupo de cohomología del complejo $C^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{F})$, es decir,

$$\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathscr{F})=\frac{\ker(d:C^p(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to C^{p+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F}))}{\operatorname{im}(d:C^{p-1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to C^p(\mathfrak{U},\mathscr{F}))}.$$

Observación 3.13. Nótese que para cualquier $\mathfrak{U}$ se tiene $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})=\mathscr{F}(X)$, de modo que $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})=H^0(X,\mathscr{F})$. Esto es cierto ya que, por la definición de haz, podemos ver $\mathscr{F}(X)$ precisamente como el ecualizador de las restricciones $r^{U_i}_{U_{ij}}$ y $r^{U_j}_{U_{ij}}$. Ahora, precisamente la aplicación $d:C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ es

$$d=r^{U_i}_{U_{ij}}-r^{U_j}_{U_{ij}}.$$

Por tanto, $\mathscr{F}(X)=\ker d=\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})$.

Proposición 3.14. *Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de X. Si $\mathscr{F}$ es un haz fofo, entonces $\check{H}^p(X,\mathscr{F})=0$ para todo $p>0$.*

Demostración. En primer lugar, construimos los haces

$$\mathscr{C}^p = \prod_{i_0<\cdots<i_p} f_{i_0,\dots,i_p;*}(\mathscr{F}|_{U_{i_0,\dots,i_p}}),$$

con $f_{i_0,\dots,i_p} : U_{i_0,\dots,i_p} \to X$ las inclusiones, y definimos $d : \mathscr{C}^p \to \mathscr{C}^{p+1}$ por la misma fórmula que $d : C^p(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$. Claramente, para cada p, tenemos $\mathscr{C}^p(X) = C^p(\mathfrak{U},\mathscr{F})$.

A partir de las aplicaciones naturales $\mathscr{F} \to f_{i,*}(\mathscr{F}|_{U_i})$ podemos definir un morfismo de haces $\mathscr{F} \to \mathscr{C}^0$. Precisamente el hecho de que $\mathscr{F}$ sea un haz garantiza que esta aplicación es inyectiva. Tenemos por tanto una sucesión

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{C}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{C}^1 \xrightarrow{d} \cdots.$$

Si vemos que esta sucesión es exacta hemos terminado, puesto que por el Corolario 3.4, al tomar secciones globales tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(X) \longrightarrow C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{d} C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{d} \cdots,$$

de modo que sus p-ésimos grupos de cohomología, para $p > 0$, son nulos. Pero estos grupos de cohomología son por definición $\check{H}^p(X,\mathscr{F})$.

Veamos entonces que la sucesión $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1 \to \cdots$ es exacta. Para ello, basta ver que, para cada $x \in X$, el siguiente complejo de grupos abelianos es exacto

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{C}^0_x \xrightarrow{d} \mathscr{C}^1_x \xrightarrow{d} \cdots.$$

Sea entonces un punto $x \in X$ y supongamos que $x \in U_j$. Ahora, un elemento $\alpha_x \in \mathscr{C}^p_x$ está representado por una sección $\alpha \in \mathscr{C}^p(V)$ para cierto entorno V de x, que podemos tomar suficientemente pequeño como para que $V \subset U_j$. Entonces, para cada colección $i_0 < \cdots < i_{p-1}$ de p elementos de I, tenemos $V \cap U_{i_0,\dots,i_{p-1}} = V \cap U_{j,i_0,\dots,i_{p-1}}$, de modo que podemos definir un elemento $h\alpha \in \mathscr{C}^{p-1}$ por medio de la fórmula

$$(h\alpha)_{i_0,\dots,i_{p-1}} = \alpha_{j,i_0,\dots,i_{p-1}},$$

que tiene sentido si asumimos que un reordenamiento de índices simplemente consiste en multiplicar la sección por (-1) elevado a la paridad de la permutación. Hemos definido entonces una aplicación

$$\begin{aligned} k : \mathscr{C}^p_x &\longrightarrow \mathscr{C}^{p-1}_x \\ \alpha &\longmapsto (k\alpha)_x. \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que esta aplicación cumple que, para cada $p \geq 1$ y $\alpha \in \mathscr{C}^p_x$,

$$(dk + kd)(\alpha) = \alpha.$$

Por tanto, k es un operador de homotopía entre la identidad y la aplicación nula en el complejo $\mathscr{C}^\bullet_x$. Por tanto, los grupos de cohomología de este complejo son nulos, luego el complejo es exacto. □

Definición 3.15. Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en X. Decimos que un recubrimiento por abiertos $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X es un *recubrimiento de Leray para* $\mathscr{F}$ si, para cada colección finita $i_0 < \cdots < i_p$ de elementos de I y para cada $k > 0$, se tiene que

$$H^k(U_{i_0,\dots,i_p}, \mathscr{F}|_{U_{i_0,\dots,i_p}}) = 0.$$

Teorema 3.16 (Teorema de Leray). *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en X. Si $\mathfrak{U}$ es un recubrimiento de Leray para $\mathscr{F}$, entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$,*

$$H^k(X, \mathscr{F}) \cong \check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathscr{F}).$$

Demostración. Todo haz admite una inclusión en un haz fofo, de modo que podemos tomar $\mathscr{G}$ fofo tal que $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{G}$. Si denotamos por $\mathscr{H}$ el conúcleo de esta aplicación, tenemos una sucesión exacta de haces $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$. Si tomamos la sucesión exacta larga en cohomología para cada $U_{i_0,\dots,i_p}$, como $H^k(U_{i_0,\dots,i_p}, \mathscr{F}|_{U_{i_0,\dots,i_p}}) = 0$ para cada $k > 0$, sacamos dos conclusiones: en primer lugar, que, como $\mathscr{G}$ es fofo, para cada $k > 0$, $H^k(U_{i_0,\dots,i_p}, \mathscr{G}|_{U_{i_0,\dots,i_p}}) = 0$, luego

$$H^{k-1}(U_{i_0,\dots,i_p}, \mathscr{H}|_{U_{i_0,\dots,i_p}}) \cong H^k(U_{i_0,\dots,i_p}, \mathscr{F}|_{U_{i_0,\dots,i_p}}) = 0;$$

en segundo lugar, que tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(U_{i_0,\dots,i_p}) \longrightarrow \mathscr{G}(U_{i_0,\dots,i_p}) \longrightarrow \mathscr{H}(U_{i_0,\dots,i_p}) \longrightarrow 0.$$

Tomando productos obtenemos una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{H}) \longrightarrow 0.$$

Toda sucesión exacta corta de complejos induce una sucesión exacta larga en sus cohomologías, de modo que tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \longrightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{H}) \longrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow \cdots.$$

Como $\mathscr{G}$ es fofo, $\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) = 0$ para todo $k > 0$, de modo que concluimos, en primer lugar, que

$$\check{H}^{k-1}(\mathfrak{U}, \mathscr{H}) \cong \check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathscr{F}),$$

y por otra parte, que tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \longrightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{H}) \longrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow 0.$$

Ahora, como para todos los haces $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = H^0(X, \mathscr{F})$, tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{H}) \arrow[r] \arrow[d] & \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(X, \mathscr{F}) \arrow[r] & H^0(X, \mathscr{G}) \arrow[r] & H^0(X, \mathscr{H}) \arrow[r] & H^1(X, \mathscr{F}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Este diagrama induce una aplicación $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{F})$, que es un isomorfismo por ser todas las columnas isomorfismos. Como $\mathfrak{U}$ también es un haz de Leray para $\mathscr{H}$, por el mismo razonamiento obtenemos que $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{H}) \cong H^1(X, \mathscr{H})$. Pero sabemos que $\check{H}^{k-1}(\mathfrak{U}, \mathscr{H}) \cong \check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$. Además, tomando la sucesión exacta larga en cohomología y usando que $\mathscr{G}$ es fofo, tenemos que $H^{k-1}(X, \mathscr{H}) \cong H^k(X, \mathscr{F})$. Prosiguiendo por inducción sobre k, obtenemos que $\check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \cong H^k(X, \mathscr{F})$, como queríamos probar. □

Capítulo II

Haces algebraicos

Aquellos que usaron los nueve anillos fueron poderosos en sus días, reyes, magos y guerreros de antaño. Obtuvieron gloria y riqueza, pero se convirtieron en desgracia. Cayeron bajo la esclavitud del anillo que llevaban y entraron al reino de las sombras. Fueron los Nazgûl, los Espectros del Anillo, los sirvientes más terribles del enemigo; la oscuridad los seguía y clamaban con las voces de la muerte.

---

1. Geometría en el espectro de un anillo

La topología de Zariski

Sea A un anillo conmutativo con unidad (lo que nosotros llamaremos, simplemente, un anillo).

Definición 1.1. Un ideal $\mathfrak{p} \subsetneq A$ es *primo* si cumple la siguiente propiedad: Si a y b son elementos de A tales que $ab \in \mathfrak{p}$, entonces $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$. El conjunto de los ideales de A se llama el *espectro* de A y se denota por $\operatorname{Spec}(A)$.

Proposición 1.2. *Los conjuntos de la forma*

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) : I \subset \mathfrak{p}\},$$

con $I \subset A$ un ideal, son los conjuntos cerrados de una topología en $\operatorname{Spec}(A)$*, llamada la* topología de Zariski.

Demostración. Claramente, $\operatorname{Spec}(A) = V(0)$ y $\varnothing = V(A)$. Ahora,

$$\bigcap_\alpha V(I_\alpha) = V\left(\bigcup_\alpha I_\alpha\right) = V\left(\sum_\alpha I_\alpha\right),$$

$$V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ).$$

De modo que estos conjuntos verifican los axiomas de los conjuntos cerrados. □

Por tanto, para cualquier anillo A, tenemos un espacio topológico Spec(A). Más aún si $f : A \to B$ es un homomorfismo de anillos, entonces tenemos una aplicación inducida

$$\begin{aligned} f^* : \mathrm{Spec}(B) &\longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \\ \mathfrak{p} &\longmapsto f^{-1}(\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

En efecto, $f^{-1}(\mathfrak{p})$ es primo, ya que, si a y b son elementos de B tales que $ab \in f^{-1}(\mathfrak{p})$, entonces $f(ab) = f(a)f(b) \in \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es primo, podemos asumir que $f(a) \in \mathfrak{p}$, sin pérdida de generalidad. Pero entonces, $a \in f^{-1}(\mathfrak{p})$. Más aún, si $I \subset A$ es un ideal y $J \subset B$ es el ideal generado por $f(I)$, entonces

$$(f^*)^{-1}(V(I)) = V(J).$$

En efecto, si $J \subset \mathfrak{p}$, entonces $I \subset f^*(J) \subset f^*(\mathfrak{p})$, de modo que $\mathfrak{p} \in (f^*)^{-1}(V(I))$. Ahora, si $\mathfrak{p} \in (f^*)^{-1}(V(I))$, entonces $I \subset f^*(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p})$, luego $f(I) \subset \mathfrak{p}$. Como J es el ideal generado por $f(I)$, $J \subset \mathfrak{p}$. Hemos probado entonces que f^* es continua, de forma que tenemos un functor contravariante

$$\mathrm{Spec} : \mathbf{Rings} \longrightarrow \mathbf{Top}.$$

A cada ideal $I \subset A$ le hemos asociado un conjunto cerrado $V(I) \subset$ Spec(A). Inversamente, a cada $X \subset$ Spec(A), le vamos a asociar un ideal

$$I(X) = \{f \in A : f \in \mathfrak{p} \ \forall \mathfrak{p} \in X\} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}.$$

Claramente, si $X \subset Y$, entonces $I(Y) \subset I(X)$. Además, si X es cerrado, $V(I(X)) = X$.

Proposición 1.3. *Si $X = V(I)$, entonces*

$$I(X) = \sqrt{I} = \{f \in A : f^r \in I \text{ para algún } r \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Tenemos que

$$I(V(I)) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \bigcap_{I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \bigcup_{g \in I} \bigcap_{g \in \mathfrak{p}} \mathfrak{p}.$$

Basta probar entonces que

$$\bigcap_{g \in \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \{f \in \mathrm{Spec}(A) : f^r = g, \text{ para algún } r \in \mathbb{N}\}.$$

El contenido $\supset$ es obvio. Queremos probar entonces que si $f \in \bigcap_{g \in \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$, existe algún $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r = g$. Supongamos que no. Entonces podemos considerar la familia formada por los ideales $I \subset A$ tales que $g \in I$ y $f^r \notin I$. Esta familia no es vacía porque contiene al ideal (g). Además, la inclusión de ideales induce una relación de orden parcial en esta familia. Ahora, si I_α es una cadena en este conjunto parcialmente ordenado, entonces $\bigcup_\alpha I_\alpha$ es una cota superior de esta cadena, $g \in \bigcup_\alpha I_\alpha$ y $f^r \notin \bigcup_\alpha I_\alpha$, porque f^r no está en ninguno de los I_α. Estamos entonces en condiciones de aplicar el lema de Zorn, de modo que esta familia tiene un elemento maximal. Tomemos uno, $\mathfrak{p}$. Este $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, ya que si $x, y \notin \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p}$ está estrictamente contenido en $\mathfrak{p}+(x)$ y $\mathfrak{p}+(y)$; luego existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $f^m \in \mathfrak{p} + (x)$ y $f^n \in \mathfrak{p} + (y)$. Se sigue que $f^{m+n} \in \mathfrak{p} + (xy)$, de modo que $xy \notin \mathfrak{p}$. Por tanto hemos hallado un ideal primo $\mathfrak{p}$ tal que $g \in \mathfrak{p}$ y $f^r \notin \mathfrak{p}$, lo que contradice que $f \in \bigcap_{g \in \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$. □

Decimos que un ideal es *radical* si $I = \sqrt{I}$. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Corolario 1.4. *Existe una correspondencia biyectiva*

$$\{\textit{Ideales radicales de } A\} \xleftrightarrow{I \mapsto V(I)} \{\textit{Cerrados de } \operatorname{Spec}(A)\}.$$

En particular, esta correspondencia se restringe a

$$\{\textit{Ideales maximales de } A\} \xleftrightarrow{\mathfrak{m} \mapsto V(\mathfrak{m})} \{\textit{Puntos cerrados de } \operatorname{Spec}(A)\}.$$

Demostración. La primera parte es ya inmediata. La segunda parte se sigue simplemente de que, si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal, $V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}$, y, por otra parte, si $V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$, entonces claramente $\mathfrak{p}$ es maximal. □

Ahora, la noetherianidad de un anillo puede verse como una condición topológica:

Definición 1.5. Un espacio topológico X es *noetheriano* si toda cadena descendente de subconjuntos cerrados es estacionaria. En otras palabras, si para toda cadena

$$X \supset Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \cdots,$$

con los Y_i cerrados, existe un n_0 tal que $Y_n = Y_{n_0}$ para todo $n > n_0$.

Proposición 1.6. *Si A es un anillo noetheriano, entonces* $\operatorname{Spec}(A)$ *es un espacio topológico noetheriano.*

Demostración. En efecto, toda cadena

$$\operatorname{Spec}(A) \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots$$

induce una cadena

$$(0) \subset I(Y_1) \subset I(Y_2) \subset \cdots.$$

Como A es noetheriano, existe un n_0 tal que $I(Y_n) = I(Y_{n_0})$ para cada $n \geq n_0$. Como los Y_i son cerrados, esto se traduce en que $Y_n = Y_{n_0}$ para cada $n \geq n_0$. □

Supongamos que $V(I)$ es un cerrado de Zariski de $\operatorname{Spec}(A)$, si denotamos por $V(f)$ el cerrado definido por el ideal principal generado por f, tenemos

$$V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f).$$

Por tanto, el complementario del cerrado $V(I)$ puede escribirse como una unión

$$\operatorname{Spec}(A) \setminus V(I) = \bigcup_{f \in I} (\operatorname{Spec}(A) \setminus V(f)).$$

De donde tenemos lo siguiente.

Proposición 1.7. *Los conjuntos abiertos de la forma*

$$D(f) = \operatorname{Spec}(A) \setminus V(f),$$

forman una base de la topología de Zariski en $\operatorname{Spec}(A)$.

Proposición 1.8. *Si $D(f) \subset D(g)$, entonces existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r = g$.*

Demostración. Si $D(f) \subset D(g)$, entonces $V(f) \supset V(g)$, de modo que si $g \in \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, entonces $f \in \mathfrak{p}$. Por tanto,

$$f \in \bigcap_{g \in \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \{f \in \operatorname{Spec}(A) : f^r = g, \text{ para algún } r \in \mathbb{N}\}.$$

Como queríamos probar. □

Corolario 1.9. *Los abiertos $D(f)$ son compactos. En particular* $\operatorname{Spec}(A)$ *es compacto.*

Demostración. En efecto, si recubrimos $D(f)$ por abiertos básicos tenemos

$$D(f) \subset \bigcup_{i \in J} D(g_i) = \bigcup_{i \in J} (\operatorname{Spec}(A) \setminus V(g_i)) = \operatorname{Spec}(A) \setminus \bigcap_{i \in J} V(g_i) = \operatorname{Spec}(A) \setminus V(I),$$

donde I es el ideal generado por los g_i. Ahora, como $D(f) = \operatorname{Spec}(A) \setminus V(f)$, tenemos que $V(I) \subset V(f)$. Por tanto, $f \in \sqrt{I}$. Tenemos entonces que existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r \in I$. Ahora, como $f^r \in I$, existen $g_1, \ldots, g_n \in \{g_i\}_{i \in I}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $f^r = \sum_{i=1}^n a_i g_i$. De modo que $f^r \in (g_1, \ldots, g_n)$. Ahora, si $(g_1, \ldots, g_n) \subset \mathfrak{p}$ para algún ideal primo $\mathfrak{p}$, entonces $f^r \in \mathfrak{p}$, luego $f \in \mathfrak{p}$ por ser $\mathfrak{p}$ primo. Por tanto, $V(g_1, \ldots, g_n) \subset V(f)$. Concluimos entonces que

$$D(f) \subset D(g_1, \ldots, g_n) = \bigcup_{i=1}^n D(g_i).$$

De modo que hemos obtenido un subrecubrimiento finito de $D(f)$, lo que garantiza que es compacto. □

El haz de estructura

A cada uno de los abiertos $D(f)$ le podemos asignar la *localización*

$$A_f = \left\{ \frac{g}{f^n} : g \in A, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

A la luz de la Proposición 1.8, todas las inclusiones entre abiertos de la base son de la forma $D(f) \subset D(f^r)$, de modo que para cada inclusión tenemos un homomorfismo canónico

$$\begin{aligned} A_{f^r} &\longrightarrow A_f \\ \frac{g}{(f^r)^n} &\longmapsto \frac{g}{f^{r+n}}. \end{aligned}$$

Por la Observación 1.10 del Capítulo I, podemos entonces definir un haz de anillos sobre $\operatorname{Spec}(A)$ como

$$\begin{aligned} \widetilde{A} : \mathbf{Op}(\operatorname{Spec}(A)) &\longrightarrow \mathbf{Rings} \\ D(f) &\longmapsto A_f. \end{aligned}$$

Nótese en particular que, como $\operatorname{Spec}(A) = D(1)$ y $A_1 = A$, tenemos que $\widetilde{A}(\operatorname{Spec}(A)) = A$. De forma completamente análoga, para cada A-módulo M podemos definir el haz de $\widetilde{A}$-módulos

$$\begin{aligned} \widetilde{M} : \mathbf{Op}(\operatorname{Spec}(A)) &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ D(f) &\longmapsto M_f, \end{aligned}$$

donde M_f denota el módulo *localizado*

$$M_f = \left\{ \frac{m}{f^n} : m \in M, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Es inmediato que, al tomar límite directo en torno a un punto $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, obtenemos que la espiga de un haz $\widetilde{M}$ es

$$\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} M_f = M_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{m}{f} : m \in M, f \notin \mathfrak{p} \right\}.$$

En particular,

$$\widetilde{A}_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{f} : a \in A, f \notin \mathfrak{p} \right\}.$$

Definición 1.10. Si $\mathscr{F}$ es un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X, llamamos *soporte* de $\mathscr{F}$ al conjunto

$$\operatorname{Supp}(\mathscr{F}) = \{x \in X : \mathscr{F}_x \neq 0\}.$$

Proposición 1.11. *Si M es un A-módulo finitamente generado, entonces* $\operatorname{Supp}(\widetilde{M}) = V(\operatorname{Ann}(M))$. *Recordamos que* $\operatorname{Ann}(M)$ *es el anulador de M,*

$$\operatorname{Ann}(M) = \{f \in A : fm = 0 \ \forall m \in M\}.$$

Demostración. Lo que tenemos que probar es que, para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, se tiene que $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ si y sólo si $\operatorname{Ann}(M) \subset \mathfrak{p}$. Supongamos entonces que $M_{\mathfrak{p}} = 0$. Como M es finitamente generado, tiene unos generadores $x_1, \ldots, x_n \in M$. Ahora, como $M_{\mathfrak{p}} = 0$, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existen un $f_i \in A \setminus \mathfrak{p}$ y un $r_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{r_i} x_i = 0$. Por tanto, si tomamos $r = \text{máx}_i \{r_i\}$, $f^r m = 0$ para todo $m \in M$, luego $f^r \in \operatorname{Ann}(M)$. Ahora, $f^r \notin \mathfrak{p}$, porque $f \notin \mathfrak{p}$. Veamos la otra implicación. Si $f \in \operatorname{Ann}(M)$ y $f \notin \mathfrak{p}$ entonces, para cada $m \in M$, $fm = 0$, por tanto m va a 0 en $M_{\mathfrak{p}}$. Concluimos entonces que $M_{\mathfrak{p}} = 0$. □

Es fácil ahora comprobar que cuando tenemos ciertas propiedades de finitud en A y M, entonces los haces involucrados en estas construcciones son coherentes:

Proposición 1.12. *Si A es un anillo noetheriano, para todo A-módulo M finitamente generado, $\widetilde{M}$ es un haz coherente de $\widetilde{A}$-módulos. En particular, $\widetilde{A}$ es un haz de anillos coherente.*

Demostración. Veamos en primer lugar que $\widetilde{M}$ es de relación de tipo finito. En particular esto implica que $\widetilde{A}$ es coherente. Queremos mostrar que, para $f_1, \ldots, f_p \in \widetilde{M}$, el subhaz $\mathscr{R}$ formado por los $g = (g_1, \ldots, g_p) \in (\widetilde{A})^p$ que cumplen la relación

$$\sum_i g_i f_i = 0,$$

está localmente generado por una cantidad finita de elementos. Para cada punto $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ puedo escribir $f_i(\mathfrak{p}) = m_i/h_i$, con $m_i \in M$ y $h_i \notin \mathfrak{p}$. Si llamo $h = h_1 \ldots h_p$ y redefino las m_i, puedo escribir $f_i(\mathfrak{p}) = m_i/h$. De forma análoga, dadas $g_1, \ldots, g_p \in A_{\mathfrak{p}}$ tales que $\sum_i g_i f_i = 0$, puedo escribir $g_i = r_i/s$, con $r_i \in A$ y $s \notin \mathfrak{p}$. Por tanto, tengo la relación

$$\frac{\sum_i r_i m_i}{hs} = 0.$$

De modo que, en el abierto $D(hs)$, que es un entorno de $\mathfrak{p}$, tenemos que la relación $\sum_i g_i|_U f_i|_U = 0$ equivale a la relación $\sum_i r_i m_i = 0$. Por tanto

$$\mathscr{R}|_U \cong \left\{(r_1,\dots,r_p) \in A^p : \sum_i r_i m_i = 0\right\}.$$

Ahora, como A es noetheriano, A^p es noetheriano, y por tanto este submódulo suyo es finitamente generado. Por otra parte, como M es finitamente generado, él y todos los M_f son noetherianos y por tanto finitamente generados, de modo que $\widetilde{M}$ es de tipo finito. □

De hecho, veamos que estos son todos los haces coherentes en $\operatorname{Spec}(A)$:

Proposición 1.13. *Si A es un anillo noetheriano y $\mathscr{F}$ es un haz coherente de $\widetilde{A}$-módulos, entonces existe un A-módulo finitamente generado M tal que $\widetilde{M} \cong \mathscr{F}$.*

Demostración. Como $\widetilde{A}$ y $\mathscr{F}$ son coherentes y $\operatorname{Spec}(A)$ es compacto, podemos hallar un recubrimiento finito de $\operatorname{Spec}(A)$ por abiertos de la forma $U_i = D(f_i)$ tal que $\mathscr{F}|_{U_i}$ es isomorfo al conúcleo de un morfismo de haces $(\widetilde{A})^p|_{U_i} \to (\widetilde{A})^q|_{U_i}$. Este morfismo de haces induce un homomorfismo de A-módulos, $A^p_{f_i} \to A^p_{f_i}$. Si M_i denota el conúcleo de este homomorfismo, claramente $\widetilde{M_i} \cong \mathscr{F}|_{U_i}$.

Lema. *Sea $f \in A$.*

1. *Si $s \in \mathscr{F}(\operatorname{Spec}(A))$ cumple que $s|_{D(f)} = 0$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n s = 0$.*
2. *Para toda sección $t \in \mathscr{F}(D(f))$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n t = s|_{D(f)}$ para alguna $s \in \mathscr{F}(\operatorname{Spec}(A))$.*

Demostración del Lema. Sea $s \in \mathscr{F}(\operatorname{Spec}(A))$ tal que $s|_{D(f)} = 0$. Para cada i como antes, $s|_{U_i} = s_i \in M_i$. Ahora, $D(f) \cap U_i = D(ff_i)$, luego $\mathscr{F}|_{D(ff_i)} = (\widetilde{M_i})_f$. Por tanto, la imagen de s_i en $(M_i)_f$ es cero, lo que quiere decir que existe algún $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_i} s_i = 0$. Puedo tomar ahora $n = \max_i\{n_i\}$ y como los U_i recubren $\operatorname{Spec}(A)$, tenemos $f^n s = 0$. Esto prueba el primer apartado.

Para ver la segunda afirmación, consideremos un elemento $t \in \mathscr{F}(D(f))$. Para cada i, tenemos $t|_{U_i} \in \mathscr{F}(D(f) \cap U_i) = (M_i)_f$. Por la definición de localización, existe un elemento $s_i \in M_i$ y un $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $t|_{U_i} = s_i/f^{n_i}$. Igual que antes, tomamos $n = \max_i\{n_i\}$ y definimos las $s_i \in M_i$ de forma que $t|_{U_i} = s_i/f^n$. Ahora, en las intersecciones $D(f) \cap U_i \cap U_j$, tenemos que $s_i = s_j = f^n t|_{U_i \cap U_j}$. Por tanto, $s_i - s_j \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$ cumple que $(s_i - s_j)|_{D(f)} = 0$, de modo que existe un $m_{ij} \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_{ij}}(s_i - s_j) = 0$. De nuevo, tomamos $m = \max_{i,j}\{m_{ij}\}$. Ahora, si pegamos las secciones $f^m s_i$ en cada U_i, podemos obtener una sección global $s \in \mathscr{F}$, que cumple que $s|_{D(f)} = f^{m+n} t$. □

Finalmente, si llamamos $M = \mathscr{F}(\operatorname{Spec}(A))$, podemos definir un morfismo de haces $\widetilde{M} \to \mathscr{F}$ mediante la asignación

$$\begin{aligned} M_f &\longrightarrow \mathscr{F}(D(f)) \\ \frac{m}{f^n} &\longmapsto \frac{1}{f^n} m|_{D(f)}. \end{aligned}$$

Esta aplicación está bien definida porque $\mathscr{F}(D(f))$ es un A_f-módulo y es claramente inyectiva. Ahora, si $t \in \mathscr{F}(D(f))$, por el Lema existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = s|_{D(f)}/f^n$, de modo que la aplicación es también sobreyectiva. □

Cohomología de haces coherentes en el espectro de un anillo noetheriano

El objetivo de este apartado es demostrar el siguiente teorema de anulación, análogo al famoso «*Théorème B*» de Cartan en geometría analítica, sobre el que volveremos más adelante.

Teorema 1.14 (Teorema B, versión algebraica)**.** *Sea A un anillo noetheriano. Para todo haz coherente $\mathscr{F}$ de $\widetilde{A}$-módulos y para todo $i > 0$, tenemos $H^i(\mathrm{Spec}(A), \mathscr{F}) = 0$.*

Para probar este teorema necesitamos introducir una noción algebraica muy importante: la de *módulo inyectivo*.

Definición 1.15. Sea A un anillo. Un A-módulo L es *inyectivo* si, para cualquier homomorfismo inyectivo de A-módulos $j : M' \to M$ y para cualquier homomorfismo de A-módulos $f' : M' \to L$, existe un homomorfismo $f : M \to L$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[dl, dotted] \\ & L. & \end{tikzcd}$$

El resultado clave es el siguiente:

Teorema 1.16. *Todo A-módulo es isomorfo a un submódulo de un A-módulo inyectivo.*

Demostración. HACER □

Definición 1.17. Una *resolución inyectiva* de un A-módulo M es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots,$$

en la que todos los I^i son inyectivos.

Corolario 1.18. *Todo A-módulo M admite una resolución inyectiva.*

Demostración. En primer lugar, tomamos I^0 inyectivo tal que $M \hookrightarrow I^0$. Seguidamente, tomamos I^1 inyectivo tal que $I^0/M \hookrightarrow I^1$. Esto induce una aplicación $d^0 : I^0 \to I^1$. Ahora, tomamos otro módulo inyectivo I^2 tal que $I^1/\mathrm{im}(d^0) \hookrightarrow I^2$ y obtenemos otra aplicación $d^1 : I^1 \to I^2$. Iterando el proceso, obtenemos una resolución inyectiva $0 \to I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^1} \cdots$. □

Ahora, el motivo por el que nos interesan tanto los módulos inyectivos es el siguiente:

Proposición 1.19. *Sea I un módulo inyectivo sobre un anillo noetheriano A. Entonces el haz de $\widetilde{A}$-módulos $\widetilde{I}$ es fofo.*

Demostración. Para probar que $\widetilde{I}$ es fofo, basta mostrar que para cualquier abierto $U \subset \mathrm{Spec}(A)$, la restricción $\widetilde{I}(\mathrm{Spec}(A)) \to \widetilde{I}(U)$ es sobreyectiva. Sea $Y = \mathrm{Supp}(\widetilde{I})$. Si $Y \cap U = \varnothing$ no hay nada que probar. Si $Y \cap U \neq \varnothing$ entonces podemos tomar $f \in A$ tal que $D(f) \subset U$ y $D(f) \cap Y \neq \varnothing$. Llamemos $Z = \mathrm{Spec}(A) \setminus D(f)$ y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{I}(\mathrm{Spec}(A)) \arrow[r] & \widetilde{I}(U) \arrow[r] & \widetilde{I}(D(f)) \\
\Gamma_Z(\mathrm{Spec}(A),\widetilde{I}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \Gamma_Z(U,\widetilde{I}), \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

donde Γ_Z denota las secciones que no son nulas en algún punto de Z. Ahora, dada una sección $s \in \widetilde{I}(U)$, podemos considerar su imagen $s' \in \widetilde{I}(D(f)) = I_f$.

Lema 1. *La localización $I \to I_f$ es sobreyectiva.*

Demostración del Lema 1. Para cada $i > 0$, sea el ideal

$$\mathfrak{b}_i = \left\{a \in A : af^i = 0\right\}.$$

Tenemos una cadena $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2 \subset \cdots$, que para en algún $\mathfrak{b}_r$ por ser A noetheriano. Ahora, para cada $x \in I_f$, por la definición de localización, existe un $y \in I$ tal que $x = y/f^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Sea ahora la aplicación

$$\begin{aligned}
\varphi : (f^{n+r}) &\longrightarrow I \\
f^{n+r} &\longmapsto f^r y.
\end{aligned}$$

Esta aplicación está bien definida porque, si un elemento $a \in (f^{n+r})$ puede escribirse de dos formas como

$$a = bf^{n+r} = cf^{n+r},$$

entonces $(b-c)f^{n+r} = 0$, luego $b - c \in \mathfrak{b}_{n+r}$. Pero, por lo que hemos visto antes, $\mathfrak{b}_{n+r} = \mathfrak{b}_r$, de modo que $(b-c)f^r = 0$. Por tanto,

$$bf^r y = cf^r y = \varphi(a),$$

de modo que φ está bien definida.

Como I es inyectivo, φ se extiende a una aplicación $\psi : A \to I$. Sea $z = \psi(1)$. Entonces $f^{n+r}z = f^{n+r}\psi(1) = \psi(f^{n+r}) = f^r y$, de modo que $z = y/f^n = x$. Concluimos entonces que la localización $I \to I_f$ es sobreyectiva. □

A la luz de este lema, tenemos que $s' = t|_{D(f)}$ para algún $t \in I$. Por tanto $(s - t|_U)|_{D(f)} = 0$. De modo que $s - t|_U \in Z$. Basta probar entonces que $\Gamma_Z(\mathrm{Spec}(A),\widetilde{I}) \to \Gamma_Z(U,\widetilde{I})$ es sobreyectiva.

Lema 2. *El A-módulo*

$$J = \Gamma_Z(\mathrm{Spec}(A),\widetilde{I}) = \{m \in I : f^n m = 0 \textit{ para algún } n > 0\},$$

es inyectivo.

Demostración del Lema 2. Sean dos módulos $M' \hookrightarrow M$. Queremos probar que todo homomorfismo $\varphi : M' \to J$ se extiende a un homomorfismo $\psi : M \to J$. Por la definición de J, existe un $n > 0$ tal que $f^n\varphi(M') = 0$. Por tanto, $\varphi(f^n M') = 0$ y φ factoriza por $M'/f^n M'$. Consideremos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] & M/f^nM \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, dotted, "\psi'"] & & \\
M' \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\varphi"] & M'/f^nM' \arrow[u, hook] \arrow[r] & J \arrow[r, hook] & I.
\end{tikzcd}$$

Como I es inyectivo, la flecha $M'/f^nM' \to I$ se extiende a un homomorfismo $\psi' : M/f^nM \to I$. Pero $f^n\psi'(m) = \psi'(f^nm) = 0$, luego ψ' factoriza por una aplicación $M/f^nM \to J$. Componiendo con la proyección al cociente $M \to M/f^nM$, tenemos un homomorfismo $\psi : M \to J$. □

Ahora, $\mathrm{Supp}(\widetilde{J}) \subset Y \cap Z$, de modo que basta probar que $\widetilde{J}$ es fofo como haz en $Y \cap Z$. Iterando este proceso, obtenemos una cadena de cerrados

$$Y \supset Y \cap Z \supset Y \cap Z \cap Z_1 \supset Y \cap Z \cap Z_1 \cap Z_2 \supset \cdots.$$

Como $\mathrm{Spec}(A)$ es un espacio topológico noetheriano, esta cadena debe parar en algún $C = Y \cap Z \cap Z_1 \cap \cdots \cap Z_n$. Más aún, este cerrado contiene un solo punto $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, ya que si tuviera dos $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$, podría tomar $f \in \mathfrak{p}_1$ tal que $f \notin \mathfrak{p}_2$ y tendría $C \cap V(f) \subsetneq C$. Este proceso es lo que se conoce como *inducción noetheriana*. Hemos reducido entonces nuestro problema al caso en que I es un módulo inyectivo con $\mathrm{Supp}(\widetilde{I}) = \{\mathfrak{p}\}$. Pero en este caso $\widetilde{I}$ es trivialmente fofo. □

Finalmente, podemos demostrar el Teorema 1.14. Dado un haz coherente $\mathscr{F}$, llamamos $M = \mathscr{F}(\mathrm{Spec}(A))$ y tomamos una resolución inyectiva $0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots$. Esta resolución nos induce una sucesión exacta de haces $0 \to \widetilde{M} \to \widetilde{I^0} \to \widetilde{I^1} \to \cdots$. Esta resolución es acíclica, porque los $\widetilde{I^i}$ son fofos, de modo que, por el teorema de de Rham, para cada $i > 0$,

$$H^i(\mathrm{Spec}(A), \mathscr{F}) \cong H^i(\widetilde{I^\bullet}(X)) = H^i(I^\bullet) = 0,$$

donde los grupos de cohomología $H^i(I^\bullet)$ son nulos porque la resolución inyectiva es por definición una sucesión exacta.

Esquemas

Recordamos que un espacio anillado era un par $(X, \mathscr{A})$, donde $\mathscr{A}$ era un haz de anillos sobre X. Podemos definir también la noción de *espacio localmente anillado*, que es un espacio anillado en el que además, para cada $x \in X$, la espiga $\mathscr{A}_x$ es un anillo local. Recordemos que un *anillo local* es un anillo con uno y sólo un ideal maximal. Un *homomorfismo local* entre dos anillos locales $A \to B$ es un homomorfismo de anillos tal que $f^{-1}(\mathfrak{m}_B) \subset \mathfrak{m}_A$. Definimos por tanto un *morfismo entre dos espacios localmente anillados*, $(X, \mathscr{A})$ e $(Y, \mathscr{B})$, como un morfismo de espacios anillados que en cada espiga induce un homomorfismo local $f : \mathscr{B}_{f(x)} \to \mathscr{A}_x$.

Proposición 1.20.

1. *Si A es un anillo,* $(\mathrm{Spec}(A), \widetilde{A})$ *es un espacio localmente anillado.*

2. *Si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo de anillos, entonces φ induce un morfismo de espacios localmente anillados*

$$(f, f^\#) : (\mathrm{Spec}(B), \widetilde{B}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A), \widetilde{A}).$$

3. *Dados dos anillos A, B, cualquier morfismo de espacios localmente anillados de* $\operatorname{Spec}(B)$ *a* $\operatorname{Spec}(A)$ *está inducido por un único homomorfismo de anillos $\varphi : A \to B$.*

Demostración. HACER □

Lo que esta proposición implica es que hay un functor plenamente fiel de la categoría de los anillos conmutativos a la categoría de los espacios localmente anillados. La «imagen» de este functor es la categoría formada por los *esquemas afines*:

Definición 1.21. Un *esquema afín* es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ que es isomorfo (como espacio localmente anillado) a $(\operatorname{Spec}(A), \widetilde{A})$ para algún anillo A. Un *esquema* es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ en el que, para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U de x de modo que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ es un esquema afín. Los abiertos de este tipo se llaman *abiertos afines*. Si todos los abiertos afines son noetherianos, entonces decimos que X es localmente noetheriano. Un *morfismo de esquemas* es simplemente un morfismo de espacios localmente anillados entre dos esquemas.

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema, llamamos a X el *espacio topológico subyacente* y a $\mathcal{O}_X$ el *haz de estructura*. Por abuso de notación, normalmente usaremos X para referirnos al esquema $(X, \mathcal{O}_X)$.

Observación 1.22. Sean $X = \operatorname{Spec}(A)$ y $D(f) \subset X$ un abierto básico de X. Si consideramos en $D(f)$ la topología inducida por X, este conjunto admite una estructura natural de esquema afín: como $\widetilde{A}|_{D(f)} = \widetilde{A_f}$, se tiene que $(D(f), \widetilde{A_f})$ es isomorfo a $(\operatorname{Spec}(A_f), \widetilde{A_f})$. Por otra parte, si $V(I) \subset X$ es un subconjunto cerrado, entonces también podemos dotar a $V(I)$ naturalmente de la estructura de esquema afín, ya que $V(I)$ está en biyección con $\operatorname{Spec}(A/I)$. Cabe destacar que, aunque los espacios topológicos $\operatorname{Spec}(A/I)$ y $\operatorname{Spec}(A/\sqrt{I})$ son iguales, ciertamente no son iguales los anillos A/I y $A/\sqrt{I}$, de modo que los esquemas afines asociados a los ideales I y $\sqrt{I}$ serán de hecho muy distintos.

Definición 1.23. Si fijamos un esquema S, que llamamos el *esquema base*, entendemos por un *S-esquema* o *esquema sobre S* un morfismo de esquemas $p : X \to S$. Por abuso de notación a veces simplemente denotamos un S-esquema $X \to S$ por X.

Observación 1.24. Si $X = \operatorname{Spec}(A)$ y $S = \operatorname{Spec}(R)$, entonces un morfismo $X \to S$ corresponde unívocamente a un homomorfismo de anillos $R \to A$, de modo que decir que X es un S-esquema es lo mismo que decir que A es una R-álgebra. Más generalmente, si $S = \operatorname{Spec}(R)$, un S-esquema $X \to S$ induce de un homomorfismo de anillos $R \to \mathcal{O}_X(X)$. De hecho, esto es una correspondencia biunívoca. En efecto, si $\varphi : R \to \mathcal{O}_X(X)$ es un homomorfismo de anillos y recubrimos X por abiertos afines $U_i = \operatorname{Spec}(B_i)$, tenemos aplicaciones $\varphi_i = r^X_{U_i} \circ \varphi : R \to B_i$, que inducen morfismos $f_i : U_i \to S$. Ahora, para cualesquiera i, j, dado un punto $x \in U_i \cap U_j$ podemos tomar $g_i \in B_i$ y $g_j \in B_j$, de modo que $U_{ij} = D(g_i) = D(g_j)$ sea un abierto básico contenido en $U_i \cap U_j$ que contiene a x. El abierto U_{ij} es a su vez un esquema afín $\operatorname{Spec}(B_{ij})$ y, de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_j & \longrightarrow & B_{ij} \end{array}$$

se deduce que las f_i coindicen en las intersecciones, luego definen un morfismo $f : X \to S$.

El análogo a la noción de producto cartesiano para esquemas es el *producto fibrado*, que se define por la siguiente propiedad universal.

Definición 1.25. Sea S un esquema y X e Y dos S-esquemas. Definimos el *producto fibrado* de X e Y sobre S, como un esquema $X \times_S Y$ junto con dos morfismos de esquemas $p_1 : X \times_S Y \to X$ y $p_2 : X \times_S Y \to Y$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

y tal que, para cualesquiera otros morfismos $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$, que hacen el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $Z \to X \times_S Y$ de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d] \\ & Y \arrow[r] & S. \end{tikzcd}$$

Es inmediato de la propiedad universal que el producto fibrado, si existe, entonces es único. Veamos que, en efecto, existe:

Teorema 1.26. *Dado un esquema S, para cualesquiera dos S-esquemas X e Y, el producto fibrado $X \times_S Y$ existe.*

Demostración. El primer paso consiste en construir el producto fibrado para esquemas afines. Es decir, asumimos que $X = \operatorname{Spec}(A)$, $Y = \operatorname{Spec}(B)$ y $S = \operatorname{Spec}(R)$. Tenemos entonces que A y B son R-álgebras y tenemos un candidato natural a producto fibrado:

$$X \times_S Y = \operatorname{Spec}(A \otimes_R B),$$

con los morfismos a X e Y inducidos por los homomorfismos $a \mapsto a \otimes 1$ y $b \mapsto 1 \otimes b$. Ahora, para cada esquema Z, un morfismo $Z \to X \times_S Y$ es lo mismo que un homomorfismo de anillos $A \otimes_R B \to \mathcal{O}_Z(Z)$. Pero esto equivale a dar dos morfismos de A y B a $\mathcal{O}_Z(Z)$ que induzcan el mismo homomorfismo en R, de modo que se cumple la propiedad universal. Pegando esta construcción en cada abierto afín, se obtiene el producto deseado. Para más detalles consultar [CITAR Hartshorne Teorema II.3.3]. $\square$

Una vez tenemos la noción de producto fibrado, podemos enunciar el *axioma de separación* en la categoría de los esquemas. A grandes rasgos, se trata de imitar la propiedad de que un espacio topológico sea Hausdorff. Es fácil comprobar que los esquemas no son Hausdorff, sin embargo, podemos definir una propiedad que *diagramáticamente* se comporte como la propiedad T_2 en la categoría de los espacios topológicos.

Definición 1.27. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. El *morfismo diagonal* es el único morfismo $\Delta : X \to X \times_Y X$ cuya composición con las proyecciones $p_1, p_2 : X \times_Y X \to X$ es la identidad $X \to X$. Decimos que el morfismo f es *separado* si el morfismo diagonal Δ es una inmersión cerrada. Un S-esquema X se dice *separado* (sobre S) si $X \to S$ es un morfismo separado.

Proposición 1.28. *Sea $S = \operatorname{Spec}(R)$ un esquema afín y $X \to S$ un S-esquema separado. Sean $U = \operatorname{Spec}(A)$ y $V = \operatorname{Spec}(B)$ abiertos afines de X. Entonces $U \cap V$ también es un abierto afín.*

Demostración. Nótese que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \arrow[r, "\Delta|_{U\cap V}"] \arrow[d, hook] & U \times_S V \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "\Delta"] & X \times_S X.
\end{tikzcd}$$

Ahora, como Δ es una inmersión cerrada, tenemos que $U \cap V = \Delta^{-1}(U \times_S V) \to U \times_S V$ es de la forma $\operatorname{Spec}\left(\frac{A \otimes_R B}{J}\right)$, para cierto ideal $J \subset A \otimes_R B$. Por tanto, $U \cap V$ es afín. □

Ahora, este resultado nos permite calcular la cohomología de haces sobre un esquema separado usando cohomología de Čech. En efecto, del Teorema 1.14, deducimos directamente lo siguiente:

Corolario 1.29. *Sea X un S-esquema separado y localmente noetheriano y sea $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de X por abiertos afines. El recubrimiento $\mathfrak{U}$ es un recubrimiento de Leray para cualquier haz coherente $\mathscr{F}$ en X. Por tanto, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$H^k(X, \mathscr{F}) = \check{H}^k(\mathfrak{U}, \mathscr{F}).$$

Ejemplo: Variedades afines

Sea k un cuerpo y $k[T]$ el anillo de polinomios en una variable con coeficientes en k. Vamos a estudiar qué aspecto tiene el espacio $\operatorname{Spec}(k[T])$. El anillo $k[T]$ es un dominio de ideales principales, lo que quiere decir que cada ideal $I \subset k[T]$ está generado por un único polinomio f, de modo que escribimos $I = (f)$. En particular, por ser un DIP, $k[T]$ es un dominio de factorización única, luego sus ideales primos no triviales son precisamente aquellos generados por los polinomios irreducibles. Por tanto, los puntos de $\operatorname{Spec}(k[T])$ se corresponden con los polinomios irreducibles de $k[T]$. En particular, si k es algebraicamente cerrado, entonces sus polinomios irreducibles son aquellos de la forma $T - a$, con $a \in k$. Es decir, los puntos cerrados de $\operatorname{Spec}(k[T])$ se corresponden exactamente con los elementos de k. Sin embargo, también hay que considerar el ideal $(0) \in \operatorname{Spec}(k[T])$. Este punto no es cerrado, ya que $V(0) = \operatorname{Spec}(k[T])$ y «geométricamente» no corresponde a ningún elemento concreto de k, sino que hace las veces de *punto genérico*. Esto motiva que en teoría de esquemas se llame *recta afín sobre* k al esquema afín

$$\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec}(k[T]).$$

Más generalmente, se llama *espacio afín n-dimensional sobre* k al esquema afín

$$\mathbb{A}^n_k = \operatorname{Spec}(k[X_1,\ldots,X_n]).$$

Nótese en particular, que la inclusión natural $k \hookrightarrow k[X_1,\ldots,X_n]$, que dota a $k[X_1,\ldots,X_n]$ de una estructura de k-álgebra, dota a $\mathbb{A}^n_k$ de estructura de esquema sobre $\operatorname{Spec}(k)$. Decimos que $\mathbb{A}^n_k$ es un *k-esquema*. El Teorema de la base de Hilbert garantiza que $k[X_1,\ldots,X_n]$ es noetheriano para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $\mathbb{A}^n_k$ es un espacio topológico noetheriano.

Cuando k es algebraicamente cerrado, la relación entre el esquema $\mathbb{A}^n_k$ y el espacio k^n está determinado por el célebre Nullstellensatz de Hilbert.

Teorema 1.30 (Teorema débil de los ceros)**.** *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. La siguiente aplicación es biyectiva*

$$\begin{aligned} k^n &\longrightarrow \{\text{Ideales maximales de } k[X_1,\ldots,X_n]\} \\ x=(x_1,\ldots,x_n) &\longmapsto \mathfrak{m}_x = (X_1-x_1,\ldots,X_n-x_n). \end{aligned}$$

Demostración. La inyectividad es clara, si $x \neq y$, existe algún i tal que $x_i \neq y_i$, de modo que $X - x_i$ pertenece a $\mathfrak{m}_x$ pero no a $\mathfrak{m}_y$. Para ver la sobreyectividad, la clave es el siguiente lema (ver [REF] para una demostración).

Lema 3 (Lema de Zariski)**.** *Si k es un cuerpo y $K = k[x_1,\ldots,x_n]$ es una k-álgebra finitamente generada que también es un cuerpo, entonces $K|k$ es una extensión algebraica.*

Dado un ideal maximal $\mathfrak{m}$ consideramos la proyección natural $k[X_1,\ldots,X_n] \to k[X_1,\ldots,X_n]/\mathfrak{m}$. Por ser $\mathfrak{m}$ un ideal maximal, el cociente $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo y, por el lema de Zariski, es una extensión algebraica de k. Como k es algebraicamente cerrado, $k[X_1,\ldots,X_n]/\mathfrak{m} = k$. Por tanto, la proyección natural $k[X_1,\ldots,X_n] \to k[X_1,\ldots,X_n]/\mathfrak{m}$ es igual al homomorfismo evaluación

$$\begin{aligned} \operatorname{ev}_a : k[X_1,\ldots,X_n] &\longrightarrow k \\ f &\longmapsto f(a_1,\ldots,a_n), \end{aligned}$$

con a_i la imagen de X_i por la proyección natural y $a = (a_1,\ldots,a_n)$, y $\mathfrak{m} = \ker(\operatorname{ev}_a) = \mathfrak{m}_a$. □

Corolario 1.31. *El espacio k^n está en biyección con el conjunto de puntos cerrados de $\mathbb{A}^n_k$.*

Definición 1.32. Una *variedad afín* es un conjunto de la forma

$$Z(I) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in k^n : f(x_1,\ldots,x_n) = 0 \ \forall f \in I\},$$

donde $I \subset k[X_1,\ldots,X_n]$ es un ideal.

Corolario 1.33 (Teorema de los ceros de Hilbert)**.** *Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado, $I \subset k[X_1,\ldots,X_n]$ un ideal y $X = Z(I)$ la variedad afín asociada (su conjunto de ceros). Sea $J(X)$ el ideal formado por los polinomios que se anulan en X. Entonces,*

$$J(X) = \sqrt{I} = \{f \in I : \ \exists\, r \in \mathbb{N}, f^r \in I\}.$$

Demostración. Claramente, $\sqrt{I} \subset J(X)$. Veamos la otra implicación. Tomando generadores, tenemos $I = (f_1, \ldots, f_m)$. Dado otro polinomio $f \in I(X)$, los polinomios $f_1, \ldots, f_m, 1 - Tf$, con T una nueva variable, no tienen ceros comunes. El ideal que generan es el total,

$$k[T, X_1, \ldots, X_n] = (f_1, \ldots, f_m, 1 - Tf).$$

En efecto, en caso contrario dicho ideal estaría contenido en un ideal maximal $\mathfrak{m}_a$, para $a \in \mathbb{A}_k^{n+1}$, y dicho a sería un cero común de esos polinomios. Por tanto, existen unos polinomios $g_0, \ldots, g_m \in k[T, X_1, \ldots, X_n]$ tales que

$$1 = g_0(1 - Tf) + \sum_{i=1}^{m} g_i f_i.$$

Si sustituimos $T = 1/f$, tenemos

$$1 = \sum_{i=1}^{m} g_i(1/f, X_1, \ldots, X_m) f_i(X_1, \ldots, X_m).$$

Esta expresión puede reescribirse como

$$1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} h_i f_i}{f^r},$$

para ciertos $h_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$ y cierto $r \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$f^r = \sum_{i=1}^{m} h_i f_i \in I,$$

de modo que $f \in \sqrt{I}$. □

Corolario 1.34. *Existe una correspondencia biyectiva*

$$\{\textit{Variedades afines en } k^n\} \xleftrightarrow{Z(I) \mapsto V(I)} \left\{\textit{Cerrados de } \mathbb{A}_k^n\right\}.$$

Demostración. Como ya vismo, existe una correspondencia entre los cerrados de $\mathbb{A}_k^n$ y los ideales radicales de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Ahora, a cada variedad afín $Z(I)$ le podemos asociar el ideal radical $J(Z(I)) = \sqrt{I}$ de forma biunívoca, ya que $Z(\sqrt{I}) = Z(I)$. □

Nótese sin embargo que, en cada cerrado $V(I) \subset \mathbb{A}_k^n$ se pueden inducir diferentes estructuras de esquema afín. En efecto, aunque el espacio topológico subyacente es el mismo

$$\mathrm{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n]/I) = \mathrm{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n]/\sqrt{I}),$$

los anillos $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ y $k[X_1, \ldots, X_n]/\sqrt{I}$ son claramente distintos y por tanto, los haces de estructura que tienen asociados de forma natural son muy diferentes. Esta visión es esencialmente superior a la de la geometría algebraica clásica, que se centraba «tan sólo» en el estudio de la variedad afín, es decir, del espacio topológico subyacente, sin tener en cuenta que podían definirse diferentes haces de estructura con «sentido geométrico».

Ejemplo 1.35. Esta situación puede ilustrarse con un ejemplo muy sencillo. Consideremos la recta afín $\mathbb{A}^1_k = k[T]$ y los ideales (T) y (T^2). Claramente $\sqrt{(T^2)} = \sqrt{(T)} = (T)$, luego $V(T^2) = V(T) = \{(T)\}$ y

$$\operatorname{Spec}(k[T]/(T^2)) = \operatorname{Spec}(k[T]/(T)) = \{(0)\}\,.$$

Es decir, en ambos casos el espacio topológico subyacente es tan sólo un punto. Sin embargo, mientras que $k[T]/T \cong k$, el anillo $k[T]/(T^2)$ es mucho más interesante:

$$\frac{k[T]}{(T^2)} = \{a + bT : a, b \in k\}\,.$$

Intuitivamente, uno puede pensar en el esquema afín $\left(\{(0)\}, \widetilde{k[T]/(T^2)}\right)$ como en un punto dotado de un «entorno infinitesimal a orden 1».

2. Esquemas proyectivos

El espectro proyectivo

Definición 2.1. Un *anillo graduado* es un anillo S junto con una descomposición $S = \bigotimes_{d\in\mathbb{N}} S_d$ de S en una suma directa de grupos abelianos S_d, tal que para cada $d, e \geq 0$, $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$. Un elemento de S_d se llama un *elemento homogéneo de grado* d. Así, cada elemento de S puede descomponerse de forma única como suma de elementos homogéneos. Un ideal $I \subset S$ es un *ideal homogéneo* si $I = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} I \cap S_d$.

Observación 2.2. Los ideales homogéneos se comportan especialmente bien. Un ideal es homogéneo si y sólo si puede ser generado por elementos homogéneos. La suma, el producto, la intersección y el radical de los ideales homogéneos son homogéneos. Para ver si un ideal homogéneo $\mathfrak{p}$ es primo basta ver que para cualesquiera dos elementos homogéneos f, g, si $fg \in \mathfrak{p}$, entonces $f \in \mathfrak{p}$ o $g \in \mathfrak{p}$.

Ejemplo 2.3. El anillo de polinomios $S = k[X_0, \ldots, X_n]$ es un anillo graduado si consideramos la descomposición en los conjuntos $S_d = k[X_0, \ldots, X_n]_d$ formados por los polinomios homogéneos de grado d. Esto es, formados por combinaciones lineales de monomios de la forma $X_0^{d_0} X_1^{d_1} \cdots X_n^{d_n}$, de forma que $d_0 + d_1 + \cdots + d_n = d$.

Definición 2.4. Sea S un anillo graduado. El ideal $\bigoplus_{d>0} S_d$ se denota por S_+. Definimos el *espectro proyectivo de* S como el conjunto

$$\operatorname{Proj}(S) = \{\mathfrak{p} \subset S : \ \mathfrak{p} \text{ es un ideal homogéneo primo y } S_+ \not\subset \mathfrak{p}\}\,.$$

Dado un ideal homogéneo $I \subset S$, definimos el subconjunto

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}(S) : I \subset \mathfrak{p}\}\,.$$

De forma análoga al caso del espectro usual, se puede ver que, para ideales homogéneos de S, se tiene que $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$ y que $\bigcap_\alpha V(I_\alpha) = V\left(\sum_\alpha I_\alpha\right)$. Esto nos permite definir una topología en $\operatorname{Proj}(S)$ (que por analogía también llamamos *topología de Zariski*), cuyos cerrados son precisamente los conjuntos de la forma $V(I)$.

Teorema 2.5. *Sea S un anillo graduado.*

1. *Los conjuntos de la forma $D(F) = \mathrm{Proj}(S) \setminus V(F)$, con $F \in S$ homogéneo de grado $d > 0$, forman una base de la topología de Zariski.*

2. *Si $I \subset S$ es un ideal homogéneo y $F \in S$ es un elemento homogéneo de grado $d > 0$, entonces $V(I) \subset V(F)$ si y sólo si existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $F^r \in I$.*

3. *La asignación*
$$D(F) \mapsto S_{(F)} = \left\{ \frac{G}{F^n} : G \in S_{nd} \right\},$$
donde $d > 0$ es el grado de F, define un haz en $\mathrm{Proj}(S)$. Llamamos a este haz $\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}(S)}$.

4. *Para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$, podemos definir la localización*
$$S_{(\mathfrak{p})} = \left\{ \frac{G}{F} : F, G \in S_d, G \notin \mathfrak{p} \right\},$$
y tenemos un isomorfismo $S_{(\mathfrak{p})} \cong \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}(S),\mathfrak{p}}$.

Demostración. Empezamos por 1. Sea $U \subset \mathrm{Proj}(S)$ un abierto y $\mathfrak{p} \in U$. Sea $I \subset S$ un ideal homogéneo tal que $V(I) = U \setminus \mathrm{Proj}(S)$. Entonces existe un elmento homogéneo $F \in I$ tal que $F \notin \mathfrak{p}$. Si F es de grado 0 lo reemplazamos por su producto por otro polinomio homogéneo de grado > 0 que no esté en $\mathfrak{p}$ (que existe porque $S_+ \not\subset \mathfrak{p}$). Entonces $\mathfrak{p} \in D(F) \subset U$.

La demostración de 2 es análoga a la de las Proposiciones 1.3 y 1.8. De 2, es claro que los homomorfismos de restricción estarán bien definidos, de forma que la asignación $D(F) \mapsto S_{(F)}$ define un haz. La afirmación 4 es inmediata al tomar límite directo. □

Corolario 2.6. *El espacio anillado $(\mathrm{Proj}(S), \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}(S)})$ es un esquema.*

Demostración. En primer lugar, como para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$ tenemos $\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}(S),\mathfrak{p}} \cong S_{(\mathfrak{p})}$, el par $(\mathrm{Proj}(S), \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}(S)}$ es un espacio localmente anillado. Además, en torno a cada punto $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$ podemos encontrar un abierto de la forma $D(F)$, por formar éstos una base de la topología de Zariski. Ahora, $\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}(S)}|_{D(F)} = \widetilde{S_{(F)}}$. Por tanto, $(D(F), \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}(S)}|_{D(F)})$ es un esquema afín isomorfo a $(\mathrm{Spec}(S_{(F)}, \widetilde{S_{(F)}})$. Concluimos entonces que $(\mathrm{Proj}(S), \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}(S)})$ es un esquema. □

Definición 2.7. Un *esquema proyectivo* es un esquema $(X, \mathscr{O}_X)$ isomorfo a $(\mathrm{Proj}(S), \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}(S)})$ para algún anillo graduado S.

Ejemplo 2.8. De forma análoga a como definimos el espacio afín, dado un cuerpo k, definimos el *espacio proyectivo n-dimensional sobre k* como el esquema
$$\mathbb{P}^n_k = \mathrm{Proj}(k[X_0, \ldots, X_n]).$$
Nos interesa ahora comparar este esquema con la noción usual de espacio proyectivo n-dimensional, obtenida definiendo la relación de equivalencia $\sim$ en k^{n+1} dada por
$$x \sim y \text{ si y sólo si } x = \lambda y \text{ para algún } \lambda \in k,$$
y considerando el cociente
$$\mathbf{P}^n_k = k^{n+1} / \sim .$$
Los puntos de $\mathbf{P}^n_k$ se denotan por
$$(x_0 : \cdots : x_n) = [(x_0, \ldots, x_n)]$$

y los elementos $x_0, \dots, x_n$ se llaman las *coordenadas homogéneas* del punto en cuestión. En general, dado un polinomio $f \in k[X_0, \dots, X_n]$, no tiene sentido decir cuánto vale f evaluado en un punto de $\mathbf{P}^n_k$, porque dicho valor dependerá del representante del punto. Sin embargo, si $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ es un polinomio homogéneo de grado d, entonces, $F(\lambda X_0, \dots, \lambda X_n) = \lambda^d F(X_0, \dots, X_n)$, de modo que sí que tiene sentido decir si F se anula en un cierto punto $(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbf{P}^n_k$. En general, decimos que si un polinomio F se escribe como suma de elementos homogéneos $F = \sum_{i=1}^d F_i$, con cada F_i de grado i, entonces F se anula en un punto $x \in \mathbf{P}^n_k$ si $F_i(x) = 0$ para cada $i = 0, 1, \dots, d$.

Definición 2.9. Una *variedad proyectiva* es un conjunto de la forma

$$Z(I) = \left\{x \in \mathbf{P}^n_k : F(x) = 0 \ \forall F \in I\right\}$$

donde $I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ es un ideal homogéneo.

Podemos enunciar ahora un resultado análogo al teorema de los ceros:

Proposición 2.10 (Teorema de los ceros proyectivo)**.** *Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado, $I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ un ideal homogéneo y $X = Z(I)$ la variedad proyectiva asociada. Sea $J(X)$ el ideal formado por los polinomios que se anulan en X. Supongamos además que $X \neq \varnothing$. Entonces, $J(X) = \sqrt{I}$.*

Demostración. Basta considerar la variedad afín definida por I,

$$\hat{X} = \left\{x \in k^{n+1} : F(x) = 0 \ \forall F \in I\right\},$$

que se denomina el *cono afín* sobre X. El teorema de los ceros de Hilbert afirma que $J(\hat{X}) = \sqrt{I}$, pero es que $J(\hat{X}) = J(X)$. □

Observación 2.11. Cabe destacar que en este resultado es crucial pedir que $X \neq \varnothing$, ya que X puede ser vacío porque $\hat{X} = \varnothing$ o porque $\hat{X} = \{(0, 0, \dots, 0)\}$.

En cualquier caso, tenemos la correspondencia:

$$\mathbf{P}^n_k \longleftrightarrow \left\{\text{Puntos cerrados de } \mathbb{P}^n_k\right\}.$$

En efecto, basta considerar los abiertos afines $U_i = D(X_i)$ que recubren $\mathbb{P}^n_k$. Cada uno de estos abiertos es un esquema afín de la forma

$$(U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}|_{U_i}) = \left(\mathbb{A}^n_k, k\left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\right]^{\sim}\right).$$

Los puntos cerrados de cada U_i están en biyección con el conjunto

$$\left\{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbf{P}^n_k : x_i \neq 0\right\}.$$

Pegando esta construcción, obtenemos lo que buscábamos.

Haces coherentes en esquemas proyectivos

Capítulo III

Haces analíticos

Tuvieron, como parecía, vida eterna,
pero la vida se volvió demasiado eterna
para ellos. Podían caminar, si querían,
invisibles ante todos bajo el sol, y podían
ver cosas invisibles para los hombres
mortales; pero a menudo contemplaban
sólo los fantasmas e ilusiones de Sauron.

Capítulo IV

El teorema de finitud

Muchos de los que viven merecen morir y algunos de los que mueren merecen la vida. ¿Puedes devolver la vida? Entonces no te apresures a dispensar la muerte, pues ni el más sabio conoce el fin de todos los caminos. El corazón me dice que todavía tiene un papel que desempeñar, para bien o para mal, antes del fin y cuando éste llegue ...

Gandalf a Frodo, sobre Gollum

Capítulo V

Geometría algebraica y geometría analítica

Un Anillo para gobernarlos a todos. Un Anillo para encontrarlos, un Anillo para atraerlos a todos y atarlos en las tinieblas.