OPERADORES ELÍPTICOS EN VARIEDADES

GUILLERMO GALLEGO

1. Espacios de Sobolev el toro

1.1. Funciones periódicas. Sea $\mathscr{P}$ el espacio vectorial complejo formado por las funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$ de clase C^∞ que son 2π-periódicas en cada variable. Análogamente, podemos pensar en $\mathscr{P} = C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^m)$ como el espacio de las funciones de clase C^∞ con valores en $\mathbb{C}^m$ definidas sobre el toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$. El producto hermítico en $\mathbb{C}^m$ definido por

$$u \cdot v = u_1 v_1^* + \cdots + u_m v_m^*,$$

induce un producto hermítico en $\mathscr{P}$: para dos funciones $\varphi, \psi \in \mathscr{P}$ definimos $\varphi \cdot \psi$ como la función tal que $\varphi \cdot \psi(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$. Denotamos por $|\varphi|$ la función (con valores en $\mathbb{R}$) tal que

$$|\varphi|^2 = \varphi \cdot \varphi.$$

El espacio $\mathscr{P}$ es naturalmente un módulo sobre el anillo $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ de las funciones 2π-periódicas $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mediante la acción

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)f = (\varphi_1 f, \ldots, \varphi_m f).$$

(Es, de hecho, un módulo libre, $\mathscr{P} = C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})^m$).

Llamamos $R = [0, 2\pi]^n$ al cubo n-dimensional de lado 2π y definimos el *producto* L^2 en $\mathscr{P}$ como

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_R \varphi \cdot \psi.$$

Definimos también la *norma* L^2 como

$$\|\varphi\|_{L^2} = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle_{L^2}} = \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_R |\varphi|^2 \right)^{1/2}.$$

Más generalmente, podemos definir la *norma* L^p como

$$\|\varphi\|_{L^p} = \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_R |\varphi|^p \right)^{1/p}.$$

Finalmente, consideraremos también la *norma infinito*,

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_R |\varphi|.$$

1.2. Series de Fourier. Sea $\varphi \in \mathscr{P}$ y $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{Z}^n$. Se define el ξ-*ésimo coeficiente de Fourier* $\varphi_\xi \in \mathbb{C}^m$ *de* φ como

$$\varphi_\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_R \varphi(x) e^{-ix\cdot\xi} dx,$$

donde $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Proposición 1.1. *La* serie de Fourier $\sum_\xi \varphi_\xi e^{ix\cdot\xi}$ *converge a* φ *uniformemente.*

Demostración. En primer lugar, nótese que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi e^{-ix\cdot\xi}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} e^{-ix\cdot\xi} + \varphi \frac{\partial}{\partial x_j}(e^{-ix\cdot\xi}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} e^{-ix\cdot\xi} + \xi_j \varphi e^{-ix\cdot\xi}.$$

Por tanto,

$$\int_R \xi_j \varphi e^{-ix\cdot\xi} = \int_R \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi e^{-ix\cdot\xi}) - \int_R \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} e^{-ix\cdot\xi}.$$

El primer término de la suma se anula por ser $\varphi e^{-ix\cdot\xi}$ una función periódica, de modo que obtenemos

$$\int_R \varphi e^{-ix\cdot\xi} = \frac{1}{\xi_j}\int_R \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} e^{-ix\cdot\xi} dx.$$

Más generalmente, por un procedimiento análogo tenemos que, para cada entero $k > 0$ existe una constante C_k que depende de φ y de sus derivadas parciales hasta orden $2nk$ tal que

$$|\varphi_\xi| \leq \frac{C_k}{(\prod_{\xi_j \neq 0} \xi_j)^{2k}}.$$

De aquí se sigue que existe otra constante, que, en un abuso de notación, también denotamos por C_k, tal que

$$|\varphi_\xi| \leq \frac{C_k}{(1+|\xi|)^k}.$$

Basta probar entonces que la serie $\sum_\xi (1+|\xi|)^{-k}$ converge. Para ello, se considera el conjunto

$$S_j = \left\{ \xi : \max_i |\xi_i| = j \right\}.$$

El número de elementos de S_j es a lo sumo $2n(2j+1)^{n-1}$ y, para cada $\xi \in S_j$, se tiene que $|\xi|^2 \geq j^2$, de modo que

$$s_j = \sum_{\xi \in S_j} (1+|\xi|^2)^{-k} \leq 2n(2j+1)^{n-1}(1+j^2)^{-k} \leq C j^{n-1-2k},$$

para $j \geq 1$, donde C es una constante que sólo depende de n. Ahora,

$$\sum_\xi (1+|\xi|^2)^{-k} = 1 + \sum_{j=1}^\infty s_j \leq 1 + C \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^{1+2k-n}},$$

de modo que la serie converge para $1+2k-n > 1$. Escrito de otra forma, tenemos que la serie converge si

$$k \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1,$$

donde los corchetes denotan la parte entera. Basta tomar entonces $k \geq [n/2]+1$ para demostrar que la serie de Fourier $\sum_\xi \varphi_\xi e^{ix\cdot\xi}$ converge uniformemente.

Falta probar ahora que la suma de esta serie coincide en efecto con la función de partida φ. Denotemos por $\tilde{\varphi} = \sum_\xi \varphi_\xi e^{ix\cdot\xi}$ la suma de la serie de Fourier y definamos $\psi = \tilde{\varphi} - \varphi$. Sea $P = \sum_{[\xi]<N} a_\xi e^{ix\cdot\xi}$, con $a_\xi \in \mathbb{C}^m$ y $[\xi] = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, un polinomio trigonométrico. Entonces, como φ y $\tilde{\varphi}$ tienen los mismos coeficientes de Fourier, tenemos que

$$\int_R \psi \cdot P = 0.$$

Por otra parte, para cualquier $\varepsilon > 0$, por el teorema de Stone-Weierstrass debe existir un polinomio trigonométrico $P \in \mathscr{P}$ tal que $\|\psi - P\|_\infty < \varepsilon$. Por tanto, la desigualdad de Cauchy–Schwarz implica que

$$\|\psi\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_R \psi \cdot \psi = \left|\frac{1}{(2\pi)^n}\int_R \psi \cdot (\psi - P)\right| \leq \|\psi\|_{L^2}\|\psi - P\|_{L^2} \leq \|\psi\|_{L^2}\,\varepsilon.$$

Concluimos entonces que $\|\psi\|_{L^2}^2 < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, con lo que $\psi = 0$. □

Una consecuencia inmediata de este resultado es la *identidad de Parseval*:

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 = \sum_\xi |\varphi_\xi|^2 .$$

En efecto,

$$\int_R |\varphi|^2 = \sum_{\xi\xi'}\int_R \varphi_\xi \varphi_{\xi'}^* e^{ix\cdot(\xi-\xi')} = (2\pi)^n \sum_\xi |\varphi_\xi|^2 ,$$

ya que $\int_0^{2\pi} e^{ix(n-n')}dx = \delta_{nn'}$.

Para concluir este apartado, el desarrollo en serie de Fourier de las funciones de $\mathscr{P}$ nos informa sobre cómo actúan las derivadas parciales sobre éstas. Dado un multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, denotamos por D^α el operador

$$D^\alpha = \frac{\partial^{[\alpha]}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}\cdots(\partial x_n)^{\alpha_n}},$$

con $[\alpha] = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Tenemos entonces que, para $\varphi \in \mathscr{P}$,

$$D^\alpha\varphi = D^\alpha \sum_\xi \varphi_\xi e^{ix\cdot\xi} = \sum_\xi (\xi^\alpha\varphi_\xi)e^{ix\cdot\xi},$$

con $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$.

1.3. Espacios de Sobolev.

Sea $\mathscr{S}$ el conjunto de las aplicaciones $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}^m$, de modo que denotamos un elemento $u \in \mathscr{S}$ como $u = \{u_\xi\}$, para $u_\xi \in \mathbb{C}^m$. Para cada entero s, definimos el *espacio de Sobolev* L_s^2 como

$$L_s^2 = \left\{ u \in \mathscr{S} : \sum_\xi (1 + |\xi|^2)^s |u_\xi|^2 < \infty \right\}.$$

De la desigualdad de Cauchy–Schwarz, se sigue que

$$\left|\sum_\xi (1+|\xi|^2)^{(s+t)/2} u_\xi \cdot v_\xi\right|^2 \leq \left(\sum_\xi (1+|\xi|^2)^s |u_\xi|^2\right)\left(\sum_\xi (1+|\xi|^2)^t |v_\xi|^2\right),$$

de modo que podemos definir el producto interno

$$\langle u, v\rangle_{L_s^2} = \sum_\xi (1+|\xi|^2)^s u_\xi v_\xi.$$

La norma asociada es

$$\|u\|_{L_s^2} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{L_s^2}}.$$

De la desigualdad anterior se sigue también que $\langle u, v\rangle_{L_s^2} < \infty$ si $u \in L_t^2$ y $v \in L_{t'}^2$. Como L_s^2 es simplemente un espacio l^2 en $\mathbb{Z}^n$ con la medida definida por la medida de conteo multiplicada por el peso $(1+|\xi|^2)^s$, se sigue que L_s^2 es un espacio de Hilbert.

La convergencia uniforme de las series de Fourier garantiza que la aplicación $\mathscr{P} \to \mathscr{S}$ que a cada función 2π-periódica φ le asigna los coeficientes de su serie de Fourier $\{\varphi_\xi\}$ es inyectiva, lo que permite identificar $\mathscr{P}$ con un subespacio de $\mathscr{S}$. La forma de actuar de las derivadas parciales sobre las funciones de $\mathscr{P}$ nos permite extender los operadores D^α al espacio $\mathscr{S}$ mediante la fórmula

$$(D^\alpha u)_\xi = (\xi^\alpha u)_\xi.$$

Estas observaciones nos permiten entender los diferentes espacios de Sobolev como «series formales» de Fourier, con ciertas propiedades de sumabilidad, que, como veremos a continuación, también pueden interpretarse como propiedades de «derivabilidad».

En el siguiente teorema reunimos algunas de las propiedades más importantes de los espacios de Sobolev.

Teorema 1.2.

(1) *Dado un entero $s \geq 0$, existen dos constantes C_1 y C_2, que como mucho dependen de s y n, tales que*

$$C_1 \|\varphi\|_{L^2_s} \leq \sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2} \leq C_2 \|\varphi\|_{L^2_s}, \quad \textit{para toda } \varphi \in \mathscr{P}.$$

Más aún, para $s = 0$ tenemos $\|\varphi\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2_0}$. En otras palabras, la norma L^2_s es equivalente a la norma definida por $\sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2}$.

(2) *Si $t < s$, entonces $\|u\|_t \leq \|u\|_s$, de modo que $L^2_s \subset L^2_t$. Esto permite definir el siguiente subespacio de $\mathscr{S}$*

$$L^2_{-\infty} = \bigcup_{s\in\mathbb{Z}} L^2_s.$$

(3) *$\mathscr{P}$ es un subespacio denso de L^2_s para cada $s \in \mathbb{Z}$.*

(4) *Dado $t \in \mathbb{Z}$, la aplicación lineal*

$$\begin{aligned} K_t : \mathscr{S} &\longrightarrow \mathscr{S} \\ u_\xi &\longmapsto (1 + |\xi|^2)^t u_\xi \end{aligned}$$

define una isometría $L^2_s \to L^2_{s-2t}$ (esto es $\|u\|_{L^2_s} = \|K^t u\|_{L^2_{s-2t}}$) cuya inversa es K^{-t}. Además, K^t envía $\mathscr{P}$ a $\mathscr{P}$. Si $\varphi \in \mathscr{P}$ y $t \geq 0$, entonces

$$K^t \varphi = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^t \varphi.$$

Más aún, para cualesquiera $s, t \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\langle u, v\rangle_s = \left\langle u, K^t v\right\rangle_{s-t} = \left\langle K^t u, v\right\rangle_{s-t},$$

para $u, v \in L^2_s$.

(5) (Desigualdad de Schwarz) *Si $u \in L^2_{s+t}$ y $v \in L^2_{s-t}$, entonces*

$$\left|\langle u, v\rangle_{L^2_s}\right| \leq \|u\|_{L^2_{s+t}} \|v\|_{L^2_{s-t}}.$$

(6) *Si* $u \in L^2_{s+t}$*, entonces*

$$\|u\|_{s+t} = \sup_{v \in L^2_{s-t},\ v \neq 0} \frac{\left|\langle u, v\rangle_{L^2_s}\right|}{\|v\|_{L^2_{s-t}}}.$$

(7) (Desigualdad de Young) *Dados tres enteros* $t' < t < t''$ *y un* $\varepsilon > 0$*, existe una constante* $C(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$\|u\|^2_{L^2_t} \leq \varepsilon \|u\|^2_{L^2_{t'}} + C(\varepsilon) \|u\|^2_{L^2_{t''}},$$

para todo $u \in L^2_{t'}$.

(8) D^α *es un operador acotado de* $L^2_{s+[\alpha]}$ *a* L^2_s *para cada* s*, de hecho*

$$\|D^\alpha u\|_{L^2_s} \leq \|u\|_{L^2_{s+[\alpha]}},$$

para cada $u \in L^2_{s+[\alpha]}$.

(9) *Sea* $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$*. Dado un entero* s*, existen constantes* $C_1, C_2 > 0$*, con* C_1 *dependiendo solo de* s *y* n *y* C_2 *dependiendo de* s*,* n*,* ω *y las derivadas de* ω*, tales que*

$$\|\omega\varphi\|_{L^2_s} \leq C_1 \|\omega\|_\infty \|\varphi\|_{L^2_s} + C_2 \|\varphi\|_{L^2_{s-1}}.$$

En particular, existe una constante C *que depende de* ω*,* s *y* n *tal que*

$$\|\omega\varphi\|_{L^2_s} \leq C \|\varphi\|_{L^2_s},$$

de modo que la multiplicación por ω *se extiende por continuidad a un operador acotado en* L^2_s*. En otras palabras,* L^2_s *es a su vez un módulo sobre* $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$.

(10) *Sea* $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$*. Dado un entero* s*, existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left|\langle \omega u, v\rangle_{L^2_s} - \langle u, \omega^* v\rangle_{L^2_s}\right| \leq C(\|u\|_{L^2_s} \|v\|_{L^2_{s-1}} + \|u\|_{L^2_{s-1}} \|v\|_{L^2_s})$$

para cada $u, v \in L^2_s$*. Para el caso* $s = 0$*, tenemos de hecho que*

$$\langle \omega u, v\rangle_{L^2_0} = \langle u, \omega^* v\rangle_{L^2_0}.$$

Observación. Las propiedades (1), (2) y (3) nos permiten ver los espacios de Sobolev como auténticos espacios de funciones. Así, como $\mathscr{P}$ es denso en L^2_0 y la norma L^2_0 coincide con la norma L^2 de $\mathscr{P}$, podemos entender el espacio L^2_0 como la completación de $\mathscr{P}$ con respecto de la norma L^2. Este espacio es el espacio $L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^m)$ formado por las funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$ que sean 2π-periódicas y *de cuadrado integrable*, esto es, tales que $\int_R |\varphi|^2 < \infty$. Ahora, observemos que, integrando por partes, podemos comprobar que, para $\varphi, \psi \in \mathscr{P}$,

$$\int_R \varphi D^\alpha \psi = -\int_R D^\alpha \varphi \psi.$$

Esto nos permite generalizar la noción de derivada para funciones en L^2. Así, si $\varphi \in L^2$, definimos la *derivada débil* de φ, como aquella función $D^\alpha\varphi$ que satisface la igualdad anterior para cualquier «función test» $\psi \in \mathscr{P}$. La función $D^\alpha\varphi$ corresponde precisamente a la serie formal $D^\alpha\varphi = \{\xi^\alpha \varphi_\xi\} \in \mathscr{S}$, y podemos ver (para $s \geq 0$) los espacios de Sobolev como subconjuntos de L^2:

$$L^2_s = \left\{\varphi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}^m : \int_R |D^\alpha\varphi|^2 < \infty, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ con } [\alpha] \leq s\right\}.$$

Más generalmente, aunque no los consideraremos en este texto, esta misma idea permite definir diferentes espacios de Sobolev como subconjuntos de L^p para $p \neq 2$ y $s \geq 0$,

$$L^p_s = \left\{ \varphi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}^m : \int_R |D^\alpha \varphi|^p < \infty, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ con } [\alpha] \leq s \right\}.$$

Estos espacios, aunque son normados, ya no disponen de un producto hermítico, lo que hace que no sean espacios de Hilbert, sin embargo, los espacios L^p_s son espacios de Banach (es decir, son completos).

Demostración. Hacer. □

1.4. Cocientes incrementales. Si $\varphi \in \mathscr{P}$ es una función periódica, el ξ-ésimo coeficiente de Fourier de la traslación $\varphi(x+h)$ de φ por un elemento $h \in \mathbb{R}^n$ es $e^{ih\cdot\xi}\varphi_\xi$. Así, dados $u \in \mathscr{S}$ y $h \in \mathbb{R}^n$, podemos definir la *trsalación de u por h* como el elemento

$$T_h(u) = \left\{ e^{ih\cdot\xi} u_\xi \right\} \in \mathscr{S}.$$

Ahora, dados $u \in \mathscr{S}$ y $h \in \mathbb{R}^n$ distinto de cero, llamamos el *cociente incremental de u determinado por h* al elemento

$$u^h = \frac{T_h(u) - u}{|h|} = \left\{ \left(\frac{e^{ih\cdot\xi} - 1}{|h|} \right) u \right\} \in \mathscr{S}.$$

En particular, si $\varphi \in \mathscr{P}$,

$$\varphi^h(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{|h|}.$$

Nótese que, si $u \in L^2_s$, entonces $\|T_h(u)\|_{L^2_s} = \|u\|_{L^2_s}$, de modo que $T_h : L^2_s \to L^2_s$ es una isometría. En particular, si $u \in L^2_s$, entonces también $u^h \in L^2_s$. De la desigualdad

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{ih\cdot\xi} - 1}{|h|} \right|^2 &= \left| \frac{\cos(h\cdot\xi) - 1}{|h|} \right|^2 + \left| \frac{\operatorname{sen}(h\cdot\xi)}{|h|} \right|^2 = \frac{2(1 - \cos(h\cdot\xi))}{|h|^2} \\ &= \frac{4\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}h\cdot\xi}{|h|^2} \leq \frac{(h\cdot\xi)^2}{|h|^2} \leq (1 + |\xi|^2) \end{aligned}$$

se sigue que, si $u \in L^2_{s+1}$, entonces los u^h están uniformemente acotados en la norma L^2_s. De hecho, $\left\|u^h\right\|_{L^2_s} \leq \|u\|_{L^2_{s+1}}$. Más aún, el recíproco es cierto:

Proposición 1.3. *Sea $u \in L^2_s$ tal que $\left\|u^h\right\|_{L^2_s} \leq C$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$ no nulo y para cierta constante $C > 0$. Entonces, $u \in L^2_{s+1}$.*

Demostración. Definamos, para cada entero $N > 0$, el elemento $u_N \in L^2_s$ como

$$(u_N)_\xi = \begin{cases} u_\xi & \text{si } |\xi| < N, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Basta probar que las $\|u_N\|_{L^2_{s+1}}$ están uniformemente acotadas. Sea $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^n$ y sea $h = te_i$. Entonces,

$$\left| \frac{e^{i\cdot\xi} - 1}{|h|} \right|^2 = \left| \frac{e^{it\xi_i} - 1}{t} \right|^2 \to |\xi_i|^2 \quad \text{cuando } t \to 0.$$

Como, por hipótesis

$$\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^s |u_\xi|^2 \left| \frac{e^{ih\cdot\xi}-1}{|h|} \right|^2 \leq C^2,$$

y la suma es finita, del límite anterior se sigue que

$$\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^s |u_\xi|^2 |\xi_i|^2 \leq C^2.$$

De modo que

$$\|u_N\|_{L^2_{s+1}} = \sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{s+1} \|u_\xi\|^2 \leq nk^2 + \|u\|^2_{L^2_s},$$

luego las $\|u_N\|_{L^2_{s+1}}$ están uniformemente acotadas, y por tanto $u \in L^2_{s+1}$. □

1.5. Inclusiones de Sobolev. Las inclusiones de Sobolev nos permiten conocer en qué casos los elementos de los espacios de Sobolev pueden ser representados por funciones continuas y/o diferenciables.

Proposición 1.4 (Sobolev)**.** *Si $t \geq [n/2]+1$ y $u \in L^2_t$, entonces la serie $\sum_\xi u_\xi e^{ix\cdot\xi}$ converge uniformemente. Esto es, cada $u \in L^2_t$, para $t \geq [n/2]+1$ corresponde a una función continua.*

Demostración. Basta demostrar que la serie converge absolutamente, $\sum |u_\xi| < \infty$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\sum_{|\xi|<N} |u_\xi| &= \sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{-t/2}(1+|\xi|^2)^{t/2} |u_\xi| \\
&\leq \left(\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{-t} \right)^{1/2} \left(\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{t} |u_\xi|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{-t} \right)^{1/2} \|u\|_{L^2_t}.
\end{aligned}$$

Como ya vimos, la serie $\sum_\xi (1+|\xi|^2)^{-t}$ converge si y sólo si $t \geq [n/2]+1$. □

Corolario 1.5. *Toda $u \in L^2_t$, con $t \geq [n/2]+1+m$, corresponde a una función de clase C^m.*

Demostración. Sea $u \in L^2_t$, con $t \geq [n/2]+1+m$ y con $[\alpha] \leq m$. Entonces se sigue del apartado (8) del Teorema 1.2 que $D^\alpha u \in L^2_{t-[\alpha]}$. Ahora, como $t-[\alpha] \geq [n/2]+1$, se sigue del Teorema de Sobolev que $D^\alpha u$ corresponde a una función continua. Por tanto, u es de clase C^m. □

Corolario 1.6. *Si $t \geq [n/2]+1$, entonces existe una constante $C>0$ tal que, si $\varphi \in \mathscr{P}$, entonces*

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_\infty &\leq C \|\varphi\|_{L^2_t} \\
\|D^\alpha \varphi\|_\infty &\leq C \|\varphi\|_{L^2_{t+[\alpha]}}.
\end{aligned}$$

Estos resultados pueden resumirse en las siguientes inclusiones, conocidas como las *inclusiones de Sobolev*:

$$\begin{aligned} L^2_s &\subset C^0(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^m) \;\; \text{para } s \geq [n/2]+1 \\ L^2_s &\subset C^m(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^m) \;\; \text{para } s \geq [n/2]+1+m, \end{aligned}$$

donde $C^m(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^m)$ denota el conjunto de las funciones 2π-periódicas $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$ de clase C^m (en particular, cuando $m = 0$, son las funciones continuas). Una consecuencia inmediata de esto es que

$$\bigcap_s L^2_s \subset C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^m) = \mathscr{P}.$$

1.6. Teorema de Rellich-Kondrachov. Terminamos la sección con un resultado acerca de la compacidad de las inclusiones entre los espacios de Sobolev.

Proposición 1.7. *Sea $\{u_i\}$ una sucesión de elementos de L^2_t con $\|u_i\|_{L^2_t} \leq 1$. Si $s < t$, entonces existe una subsucesión de $\{u_i\}$ que converge en L^2_s. En otras palabras, el operador de inclusión $L^2_t \hookrightarrow L^2_s$ es compacto.*

Demostración. Por hipótesis $\sum_\xi (1+|\xi|^2)^t \left\|u^i_\xi\right\|^2 \leq 1$. Para cada ξ fijo, los elementos de la sucesión $\left\{\left|(1+|\xi|^2)^{t/2} u^i_\xi\right|\right\}$ están todos acotados por 1, de modo que la sucesión $\left\{(1+|\xi|^2)^{t/2} u^i_\xi\right\}$ tiene una subsucesión convergente en $\mathbb{C}^m$. Por un argumento diagonal, podemos seleccionar una subsucesión $\{u^{j_i}\}$ tal que la sucesión $(1+|\xi|^2)^{t/2} u^{j_i}_\xi$ converge en $\mathbb{C}^m$, para cada ξ fijo. Afirmamos que $\{u^{j_i}\}$ es una sucesión de Cauchy y, por tanto, convergente, en L^2_s si $s < t$. Sea $\varepsilon > 0$. Ahora,

$$\begin{aligned} \left\|u^{j_i} - u^{j_k}\right\|^2_{L^2_s} = &\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{s-t} (1+|\xi|^2)^t \left|u^{j_i}_\xi - u^{j_k}_\xi\right|^2 \\ &+ \sum_{|\xi|\geq N} (1+|\xi|^2)^{s-t} (1+|\xi|^2)^t \left|u^{j_i}_\xi - u^{j_k}_\xi\right|^2. \end{aligned}$$

La segunda suma está acotada por

$$N^{2(s-t)} \sum_{|\xi|\geq N} (1+|\xi|^2)^t \left(\left|u^{j_i}_\xi\right|^2 + 2\left|u^{j_i}_\xi\right|\left|u^{j_k}_\xi\right| + \left|u^{j_k}_\xi\right|^2\right),$$

que es menor o igual que $4N^{2(s-t)}$ por la hipótesis. Como $s - t < 0$, tenemos que $4N^{2(s-t)}$ puede hacerse menor que $\varepsilon/2$ tomando N grande, digamos $N \geq N_0$. La primera suma está acotada entonces por

$$\sum_{|\xi|<N_0} (1+|\xi|^2)^t \left|u^{j_i}_\xi - u^{j_k}_\xi\right|^2,$$

y como sólo hay un número finito de términos en esta suma y las sucesiones $(1 + |\xi|^2)^{t/2} u^{j_i}_\xi$ convergen para cada fijo ξ, existe una constante $J > 0$ tal que, si j_i y j_k son mayores que J, entonces la suma es menor que $\varepsilon/2$. Por tanto, para $j_i, j_k > J$, tenemos que $\|u^{j_i} - u^{j_k}\|^2_{L^2_s} < \varepsilon$.

□

2. Operadores elípticos en el toro

2.1. Operadores diferenciales. Un *operador diferencial (lineal)* L de orden l en $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ consiste en una matriz $m \times m$ con entradas L_{ij} de la forma

$$L_{ij} = \sum_{[\alpha]=0}^{l} a_{ij}^\alpha D^\alpha,$$

con las $a_{ij}^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, con al menos una a_{ij}^α no idéndicamente nula para algunos i, j y para algún α con $[\alpha] = l$. Un operador diferencial L es *periódico* o un *operador en $\mathscr{P}$* si, además, las funciones a_{ij}^α son periódicas.

Dados un operador diferencial periódico L y una función periódica $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathscr{P}$ tenemos que

$$L\varphi = \left(\sum_{j=1}^{m} L_{1j}\varphi_j, \dots, \sum_{j=1}^{m} L_{mj}\varphi_j \right).$$

Definimos el *operador adjunto formal* de L como el operador L^* en $\mathscr{P}$ con

$$L_{ij}^* = \sum_{[\alpha]=0}^{l} (-1)^{[\alpha]} D^\alpha (a_{ji}^\alpha)^*,$$

de modo que la i-ésima componente de $L^*\varphi$ es

$$(L^*\varphi)_i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{[\alpha]=0}^{l} (-1)^{[\alpha]} D^\alpha ((a_{ji}^\alpha)^* \varphi_j).$$

Ahora

$$(L\varphi) \cdot \psi = \sum_{i,j=1}^{m} (L_{ij}\varphi_j)\psi_i^* = \sum_{i,j=1}^{m} \left(\sum_{[\alpha]=0}^{l} a_{ij}^\alpha D^\alpha \varphi_j \right) \psi_i^* = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{[\alpha]=0}^{l} D^\alpha \varphi_j ((a_{ij}^\alpha)^* \psi_i)^*.$$

De modo que, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_R (L\varphi) \cdot \psi &= (-1)^{[\alpha]} \int_R \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{[\alpha]=0}^{l} \varphi_j D^\alpha [((a_{ij}^\alpha)^* \psi_i)^*] \\ &= \int_R \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{[\alpha]=0}^{l} \varphi_i (D^\alpha [(-1)^{[\alpha]} (a_{ji}^\alpha)^* \psi_j])^* = \int_R \varphi_i (L^*\psi)_i^* = \int_R \varphi \cdot (L^*\psi). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que, para $\varphi, \psi \in \mathscr{P}$, $\langle L\varphi, \psi \rangle_{L^2} = \langle \varphi, L^*\psi \rangle_{L^2}$. Esta propiedad explica el nombre de «adjunto» para el operador L^*. La etiqueta «formal» se refiere a que L^* no es necesariamente el operador adjunto de L en algún espacio de Hilbert, sino en principio sólo en $\mathscr{P}$.

Proposición 2.1. *Sea L un operador diferencial en $\mathscr{P}$ de orden l y sea $s \in \mathbb{Z}$. Entonces existen constantes positivas C_1, K y C_2, con C_1 dependiendo sólo de n, m, l y s, con K una cota para los valores absolutos de los coeficientes de los términos de orden superior en L y con C_2 dependiendo de n, m, l, s y de los coeficientes de L y sus derivadas hasta orden l, tales que*

$$\|L\varphi\|_{L_s^2} \leq C_1 K \|\varphi\|_{L_{s+l}^2} + C_2 \|\varphi\|_{L_{s+l-1}^2}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{P}$. En particular, existe una constante C_3 tal que

$$\|L\varphi\|_{L^2_s} \leq C_3 \|\varphi\|_{L^2_{s+l}}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{P}$, de modo que L se extiende por continuidad a un operador acotado $L : L^2_{s+l} \to L^2_s$, para cada s.

Demostración. La segunda desigualdad es una consecuencia de la primera y del apartado (2) del Teorema 1.2. Para la primera desigualdad, el caso con $m = 1$ (en el que los coeficientes de L son elementos de $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$) se sigue directamente de los apartados (8) y (9) del Teorema 1.2. Esto se generaliza a un m general mediante la desigualdad $\|L\varphi\|_{L^2_s} \leq \text{cte.} \sum_{i,j} \|L_{ij}\varphi_j\|_{L^2_s}$, la constante solo dependiendo de m. □

Observación. Si L es un operador diferencial en $\mathscr{P}$ de orden l y $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$, entonces el operador $M = \omega L - L\omega$, que actúa de la forma $M\varphi = \omega(L\varphi) - L(\omega\varphi)$, es de orden a lo sumo $l - 1$. Por tanto, dado $s \in \mathbb{Z}$, existe una constante positiva tal que

$$\|M\varphi\|_{L^2_s} \leq \text{cte.} \|\varphi\|_{L^2_{s+l-1}},$$

para toda $\varphi \in \mathscr{P}$.

Proposición 2.2. *Si $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ y L es un operador diferencial de orden l en $\mathscr{P}$, entonces existe una constante positiva tal que*

$$\left| \left\langle L(\omega^2 u), Lu \right\rangle_{L^2_s} - \|L(\omega u)\|^2_{L^2_s} \right| \leq \text{cte.}(\|u\|_{L^2_{s+l}} \|u\|_{L^2_{s+l-1}}),$$

para todo $u \in L^2_{s+l}$.

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \left\langle L(\omega^2 u), Lu \right\rangle_{L^2_s} - \|L(\omega u)\|^2_{L^2_s} \right| \leq & \left| \langle \omega L(\omega u), Lu \rangle_{L^2_s} - \langle L(\omega u), \omega Lu \rangle_{L^2_s} \right| \\ & + \left| \langle L(\omega u), (\omega L - L\omega)u \rangle_{L^2_s} \right| \\ & + \left| \langle (L\omega - \omega L)(\omega u), Lu \rangle_{L^2_s} \right|, \end{aligned}$$

y la desigualdad se sigue de aplicar los apartados (9) y (10) del Teorema 1.2 y la segunda desigualdad de la proposición anterior al primer término y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el apartado (9) del teorema 1.2, la primera desigualdad de la proposición anterior y la observación previa. □

2.2. Operadores elípticos. Sea L un operador diferencial de orden l. Podemos escribir L en la forma

$$L = P_l(D) + \cdots + P_0(D),$$

donde $P_j(D)$ es una matriz $m \times m$ cuyas entradas son operadores diferenciales $\sum_{[\alpha]=j} a_\alpha D^\alpha$, homogéneos de orden j, y con las $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Denotamos por $P_j(\xi)$ la matrix obtenida al sustituir ξ^α por D^α en $P_j(D)$, donde $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Decimos que L es *elíptico en $x \in \mathbb{R}^n$* si la matriz $P_l(\xi)$ es regular en x para cada $\xi \neq 0$. Decimos que L es un *operador elíptico* si es elíptico en x para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Nótese que la elipticidad es una condición que depende tan solo de la parte de orden superior de L. Nótese también que L es elíptico en x si y sólo si

$$L(\varphi^l u)(x) \neq 0$$

para cada función $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ tal que $u(x) \neq 0$ y para cada función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que $\varphi(x) = 0$ pero $d\varphi(x) \neq 0$, ya que para tales φ y u se tiene que

$$L(\varphi^l u)(x) = P_l(D)(\varphi^l u)(x) = P_l(d\varphi|_x)(u(x)).$$

Como veremos más tarde, este criterio permite generalizar la noción de elipticidad a operadores en variedades.

Veamos ahora la desigualdad fundamental de los operadores elípticos, de la que se deduce toda la teoría posterior.

Teorema 2.3 (Elipticidad). *Sea L un operador elíptico en $\mathscr{P}$ de orden l y sea $s \in \mathbb{Z}$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2_{s+l}} \leq C(\|Lu\|_{L^2_s} + \|u\|_s),$$

para todo $u \in L^2_{s+l}$.

Demostración. Basta probarlo para toda $\varphi \in \mathscr{P}$. Consideramos en primer lugar el caso de un operador elíptico L_0 en $\mathscr{P}$ con coeficientes constante, que consiste tan solo en el término $P_l(D)$. Si $u \in \mathbb{R}^n$ con $u \neq 0$ y si $\xi \neq 0$, entonces, como $P_l(\xi)$ es no singular, tenemos $|P_l(\xi)u|^2 > 0$. Se sigue de la compacidad de la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$ que existe una constante $c > 0$ tal que $|P_l(\xi)u|^2 \geq c$ para cualesquiera u y ξ con $|u| = |\xi| = 1$. De aquí se sigue que

$$|P_l(\xi)u|^2 \geq c\,|\xi|^{2l}\,|u|^2.$$

Por tanto, para $\varphi \in \mathscr{P}$, se sigue que

$$\|L_0\varphi\|^2_{L^2_s} = \sum_\xi |P_l(\xi)\varphi_\xi|^2\,(1 + |\xi|^2)^s \geq \text{cte.} \sum_\xi |\xi|^{2l}\,|\varphi_\xi|^2\,(1 + |\xi|^2)^s.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(\|L_0\varphi\|_{L^2_s} + |\varphi|_{L^2_s})^2 &\geq |L_0\varphi|^2_{L^2_s} + |\varphi|^2_{L^2_s} \geq \sum_\xi |\varphi_\xi|^2\,(1 + |\xi|^2)^s(1 + \text{cte.}\,|\xi|^{2l}) \\ &\geq \text{cte.} \sum_\xi |\varphi_\xi|^2\,(1 + |\xi|^2)^{s+l} = \text{cte.}\,|\varphi|^2_{L^2_{s+l}}.\end{aligned}$$

Veamos ahora el caso de un operador periódico general L de orden l y tomemos $p \in \mathbb{T}^n$. Vamos a probar que existe un entorno U de p tal que la desigualdad se da para todo $\varphi \in \mathscr{P}$ con soporte en U. Sea L_0 el operador determinado por la parte de orden superior de L evaluada en p. Se sigue de lo anterior que, para cada $\varphi \in \mathscr{P}$,

$$\|\varphi\|_{L^2_{s+l}} \leq \text{cte.}(\|L_0\varphi\|_{L^2_s} + \|\varphi\|_{L^2_s}) \leq k(\|L\varphi\|_{L^2_s} + \|(L_0 - L)\varphi\|_{L^2_s} + \|\varphi\|_{L^2_s}),$$

para cierta constante $K > 0$. Tomemos un $\varepsilon < 1/(2CK)$ para C dependiendo sólo e n, m, l y s tal que

$$\|L\varphi\|_{L^2_s} \leq CC_1\,\|\varphi\|_{L^2_{s+l}} + C_2\,\|\varphi\|_{L^2_{s+l-1}}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{P}$. En un entorno de p suficientemente pequeño los coeficientes de mayor orden de $L_0 - L$ son menores que ε en valor absoluto. Sea $\tilde{L}$ un operador elíptico en $\mathscr{P}$ que coincide con $L_0 - L$ en un entorno de p posiblemente contenido en U y cuyos coeficientes de orden superior son menores en valor absoluto que ε en todo punto. Entonces se sigue que, para $\varphi \in \mathscr{P}$ con soporte en U,

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^2_{s+l}} &\leq \text{cte.} \left(\|L\varphi\|_{L^2_s} + \left\|\tilde{L}\varphi\right\|_{L^2_s} + \|\varphi\|_{L^2_s} \right) \\ &\leq \text{cte.} \|L\varphi\|_{L^2_s} + \tfrac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2_{s+l}} + \text{cte.} \|\varphi\|_{L^2_{s+l-1}} + \text{cte.} \|\varphi\|_{L^2_s} .\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Young a $\|\varphi\|_{L^2_{s+l-1}}$, tenemos,

$$\|\varphi\|_{L^2_{s+l}} \leq \text{cte.} \|L\varphi\|_{L^2_s} + \tfrac{3}{4} \|\varphi\|_{L^2_{s+l}} + \text{cte.} \|\varphi\|_{L^2_s} .$$

Esto prueba el resultado para $\varphi \in \mathscr{P}$ con soporte en U. Si $\varphi \in \mathscr{P}$ no tiene soporte compacto, el problema se resuelve fácilmente tomando una partición diferenciable de la unidad. □

Corolario 2.4 (Regularidad elíptica)**.** *Sea L un operador elíptico en $\mathscr{P}$ de orden l. Supongamos que $u \in L^2_{-\infty}$, $v \in L^2_t$ y que*

$$Lu = v.$$

Entonces $u \in L^2_{t+l}$.

Demostración. Basta probar que si $u \in L^2_s$ y $v = Lu \in L^2_{s-l+1}$, entonces $u \in L^2_{s+1}$. Sea un elemento no nulo $h \in \mathbb{R}^n$ y sea L^h el operador que se obtiene de L reemplazando cada coeficiente α por su cociente incremental α^h. Entonces, para $\varphi \in \mathscr{P}$ y, por continuidad, para $u \in L^2_{-\infty}$, se tiene que

$$L(u^h) = (Lu)^h - L^h(T_h u).$$

Ahora, por elipticidad tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|u^h\right\|_{L^2_s} &\leq C(\left\|L(u^h)\right\|_{L^2_{s-l}} + \left\|u^h\right\|_{L^2_{s-l}}) \\ &\leq C_1 \left\|(Lu)^h\right\|_{L^2_{s-l}} + C_2 \left\|L^h(T_h u)\right\|_{L^2_{s-l}} + C \left\|u^h\right\|_{L^2_{s-l}} .\end{aligned}$$

Ahora, como los coeficientes de L son funciones C^∞ periódicas, sus cocientes incrementales están acotados uniformemente, lo que implica que

$$\left\|L^h(T_h u)\right\|_{L^2_{s-l}} \leq C_3 \|T_h u\|_{L^2_s} = C_3 \|u\|_{L^2_s} ,$$

donde C_3 es una constante que no depende de h. Se deduce entonces que

$$\left\|u^h\right\|_{L^2_s} \leq \text{cte.} \|Lu\|_{L^2_{s-l+1}} + \text{cte.} \|u\|_{L^2_s} ,$$

donde el lado derecho no depende de h. Finalmente, de la Proposición 1.3 se tiene que $u \in L^2_{s+1}$. □

2.3. Descomposición asociada a un operador elíptico. Supongamos que L es un operador elíptico en $\mathscr{P}$ de orden l. Como ya vimos, el operador L se extiende por continuidad a un operador $L : L^2_{s+l} \to L^2_s$ para cada s. Llamamos $\mathscr{H}_s = \ker(L : L^2_{s+l} \to L^2_s)$.

En primer lugar, vamos a demostrar que $\mathscr{H}_s$ es un espacio vectorial de dimensión finita. En efecto, la elipticidad garantiza que, para $u \in L^2_{s+l}$,

$$\|u\|_{L^2_{s+l}} \leq C(\|Lu\|_{L^2_s} + \|u\|_{L^2_s}).$$

Ahora, si $Lu = 0$, entonces tenemos que

$$\|u\|_{L^2_{s+l}} \leq C \|u\|_{L^2_s} .$$

Por otra parte, si $\{u_i\}$ es una sucesión de elementos en L^2_{s+l} con $\|u_i\|_{L^2_{s+l}} \leq 1$, el teorema de Rellich–Kondrachov garantiza que existe una subsucesión convergente en L^2_s. Pero entonces la desigualdad anterior garantiza que la subsucesión es, de hecho, convergente en la norma L^2_{s+l}. Esto demuestra que la bola unidad

$$B_s = \left\{ u \in L^2_{s+l} : \|u_i\|_{L^2_{s+l}} \leq 1 \right\}$$

es un conjunto compacto. Por tanto, $\dim \mathscr{H}_s < \infty$.

Otra propiedad importante es que la imagen de $L : L^2_{s+l} \to L^2_s$ es un subespacio cerrado de L^2_s. En efecto, supongamos que $\{u_i\}$ es una sucesión en L^2_{s+l} con $Lu_i = v_i \to v$ en L^2_s. Por la continuidad de L, basta ver que $\{u_i\}$ tiene una subsucesión convergente en L^2_{s+l}. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $Lu_i \neq 0$ para todo i. Podemos asumir también (sustituyendo u_i por $u_i / \|u_i\|_{L^2_{s+l}}$ si es preciso) que la sucesión $\{u_i\}$ está acotada en L^2_{s+l}. Entonces, como por el teorema de Rellich–Kondrachov la inclusión $L^2_{s+l} \hookrightarrow L^2_s$ es compacta, podemos extraer una subsucesión convergente en L^2_s. Como, por la elipticidad,

$$\|u_i - u_j\|_{L^2_{s+l}} \leq C(\|f_i - f_j\|_{L^2_s} + \|u_i - u_j\|_{L^2_s}),$$

tenemos que $\{u_i\}$ de hecho converge en L^2_{s+l}.

Nótese ahora que la función 0 pertenece a $\mathscr{P}$ y por tanto a todos los L^2_s. Se deduce entonces de la regularidad elíptica que si $Lu = 0$ entonces $u \in L^2_{s+l}$ para todo $s \in \mathbb{Z}$. Por tanto, u es una función periódica de clase C^∞ ya que $u \in \bigcup_s L^2_s = \mathscr{P}$. Tiene sentido entonces hablar del espacio $\mathscr{H} = \mathscr{H}_s$ para todo $s \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.5. *Sea L un operador elíptico en $\mathscr{P}$ de orden l tal que $L^* = L$. Entonces existen aplicaciones lineales*

$$P : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$$
$$G : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$$

tales que

(1) $P(\mathscr{P}) = \mathscr{H} = \ker L$, *y* $\dim \mathscr{H} < \infty$,
(2) $L \circ G + P = G \circ L + P = \mathrm{id}_{\mathscr{P}}$,
(3) P *y* G *son continuas en la norma* L^2,
(4) *existe una descomposición ortogonal con respecto al producto* L^2

$$\mathscr{P} = \mathscr{H} \oplus G \circ L(\mathscr{P}) = \mathscr{H} \oplus L \circ G(\mathscr{P}).$$

Los elementos de $\mathscr{H}$ reciben el nombre de funciones L-armónicas. *La aplicación G recibe el nombre de* operador de Green.

Demostración. En primer lugar, vamos a demostrar que L induce una aplicación lineal continua y biyectiva

$$L : \mathscr{H}^{\perp_l} \longrightarrow \mathscr{H}^{\perp_0},$$

donde $\mathscr{H}^{\perp_s}$ denota el espacio

$$\mathscr{H}^{\perp_s} = \left\{ u \in L^2_s : \langle u, v \rangle_{L^2_s} = 0 \text{ para todo } v \in \mathscr{H} \right\}.$$

En efecto, la aplicación es claramente inyectiva por la definición de $\mathscr{H}^{\perp_l}$ y, como la adherencia de $L(L^2_l)$ es igual a $\ker(L^* : L^2_0 \to L^2_l)^\perp = \mathscr{H}^{\perp_0}$ y $L(L^2_l)$ es cerrado, tenemos que L es sobreyectiva.

Ahora, como $L : \mathscr{H}^{\perp_l} \to \mathscr{H}^{\perp_0}$ es un isomorfismo lineal continuo, tiene una inversa

$$G_0 : \mathscr{H}^{\perp_0} \longrightarrow \mathscr{H}^{\perp_l}.$$

Esta G_0 puede extenderse a todo L^2 si ponemos $G_0(u) = 0$ para $u \in \mathscr{H}$. Por otra parte, como $L_l^2 \subset L^2$, obtenemos una aplicación $G_0 : L^2 \to L^2$. Más aún, si llamamos P a la proyección ortogonal (respecto del producto L^2) de $\mathscr{P}$ a $\mathscr{H}$, entonces tenemos que

$$\mathrm{id}_{\mathscr{P}} = P + L \circ G_0 = P + G_0 \circ L.$$

Como $G_0(\mathscr{P}) \subset \mathscr{P}$, podemos definir $G = G_0|_{\mathscr{P}}$, que, junto con P, claramente satisface las tesis del teorema. $\square$

2.4. Reducción al caso periódico. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Denotamos por $C_0^\infty(V, \mathbb{C}^m)$ el espacio formado por las funciones $V \to \mathbb{C}^m$ de clase C^∞ y tales que tienen soporte compacto contenido en V. Este espacio admite un producto hermítico L^2 de la forma

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot v.$$

Si L es un operador diferencial de orden l en $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$, podemos definir un adjunto formal L^* para el operador L con respecto al producto L^2 en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$, de forma completamente análoga a como hicimos antes: si $L_{ij} = \sum a_{ij}^\alpha D^\alpha$, entonces $L_{ij}^* = \sum D^\alpha (a_{ji}^\alpha)^*$.

Por otra parte, si además V es tal que su adherencia $\bar{V}$ está contenida en un cubo de lado 2π, entonces, extendiendo por periodicidad, podemos identificar $C_0^\infty(V, \mathbb{C}^m)$ con un subespacio de $\mathscr{P}$. El producto L^2 en $C_0^\infty(V, \mathbb{C}^m)$ coincide con el producto inducido en este espacio como subconjunto de $\mathscr{P}$ y, por supuesto, también con el producto de Sobolev L_0^2.

Consideremos ahora un operador elíptico L de orden l en $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$. Afirmamos que para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ existe un entorno V de p y un operador elíptico $\tilde{L}$ tal que $\tilde{L}$ coincide con L en V. En efecto, llamemos L_0 al operador determinado por los coeficientes constantes $a_{ij}^\alpha(p)$ obtenidos de evaluar los coeficientes a_{ij}^α de L en p. Entonces, como L es elíptico en p, existe algún $\varepsilon > 0$ tal que cualquier operador cuyos coeficientes b_{ij}^α cumplan que

$$\left|b_{ij}^\alpha(x) - a_{ij}^\alpha(p)\right| < \varepsilon$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, es elíptico. Así, consideremos U un entorno de p contenido en un cubo R de lado 2π y tal que para todo $x \in U$ se cumpla

$$\left|a_{ij}^\alpha(x) - a_{ij}^\alpha(p)\right| < \varepsilon.$$

Consideremos también $V \subset U$ un abierto tal que $\bar{V} \subset U$. Tomemos ahora $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ es una función con soporte en U tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y tal que $\varphi|_V = 1$. Entonces, el operador

$$\varphi L + (1 - \varphi) L_0$$

es elíptico en todo $\mathbb{R}^n$ y, como tiene soporte en $U \subset \tilde{U} \subset R$, puede extenderse por periodicidad a un operador elíptico periódico $\tilde{L}$ que coincide con L en V.

Este operador $\tilde{L}$ nos permite obtener una propiedad adicional sobre el operador adjunto formal L^*: si $u \in L^2_s$ y $\varphi \in C_0^\infty(V, \mathbb{C}^m)$, entonces

$$\left\langle \tilde{L}u, \varphi \right\rangle_{L^2} = \langle u, L^*\varphi \rangle_{L^2}.$$

En efecto, por la densidad de $\mathscr{P}$ en L^2_s, podemos tomar una sucesión $\psi_j \to u$ en L^2_s con las $\psi_j \in \mathscr{P}$. Entonces,

$$\left\langle \tilde{L}\psi_j, \varphi \right\rangle_{L^2} = \langle L\psi_j, \varphi \rangle_{L^2} = \langle \psi_j, L^*\varphi \rangle_{L^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\left| \left\langle \tilde{L}u, \varphi \right\rangle_{L^2} - \langle u, L^*\varphi \rangle_{L^2} \right| &= \left| \left\langle \tilde{L}(u - \psi_j), \varphi \right\rangle_{L^2} - \langle u - \psi_j, L^*\varphi \rangle_{L^2} \right| \\ &\leq \left\| \tilde{L}(u - \psi_j) \right\|_{L^2_{s-l}} \|\varphi\|_{L^2_{-s+l}} + \|u - \psi_j\|_{L^2_s} \|L^*\varphi\|_{L^2_{-s}} \\ &\leq \text{cte.} \|u - \psi_j\|_{L^2_s} \|\varphi\|_{L^2_{-s+l}} + \|u - \psi_j\|_{L^2_s} \|L^*\varphi\|_{L^2_{-s}},\end{aligned}$$

que converge a 0 cuando $j \to \infty$.

Finalmente, dados dos elementos $u, v \in L^2_s$, decimos que u y v *coinciden débilmente en* V si

$$\langle u - v, \varphi \rangle_{L^2} = 0,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(V)$. Decimos que un operador diferencial periódico L *tiene soporte en* V si los coeficientes de L pertenecen a $C_0^\infty(V, \mathbb{C}^m) \subset \mathscr{P}$. Ahora, si L tiene soporte en V y si los elementos $u, v \in L^2_s$ coinciden débilmente en V, entonces

$$Lu = Lv.$$

En efecto, por el apartado (6) del Teorema 1.2, basta ver que $\langle L(u - v), \varphi \rangle_{L^2} = 0$ para toda $\varphi \in \mathscr{P}$. Pero esto es claro porque

$$\langle L(u - v), \varphi \rangle = \langle (u - v), L^*\varphi \rangle = 0,$$

ya que $L^*\varphi \in C_0^\infty(V, \mathbb{C}^m)$ y, por hipótesis, u y v coinciden débilmente en V.

3. Operadores elípticos en variedades

3.1. Espacios de Sobolev en variedades. Sea X una variedad diferenciable compacta de dimensión n y $E \to X$ un fibrado vectorial complejo sobre X. Sea $\mathfrak{U}$ un recubrimiento por abiertos de X tal que, para cada $U \in \mathfrak{U}$, existe un difeomorfismo $\varphi_U : B \to U$, con $B \subset \mathbb{R}^n$ la bola unidad. Consideremos ahora una partición diferenciable de la unidad $\{\rho_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ subordinada al recubrimiento $\mathfrak{U}$. Para cada abierto $U \subset X$, denotamos por $\Gamma(U, E)$ el conjunto de secciones diferenciables de E y por $\Gamma_0(U, E)$ el conjunto de secciones diferenciables de E con soporte compacto en U. Si $U \in \mathfrak{U}$, como ρ_U tiene soporte compacto en U, tenemos una aplicación sobreyectiva

$$\begin{aligned}\Gamma(X, E) &\longrightarrow \Gamma_0(U, E) \\ s &\longmapsto \rho_U s.\end{aligned}$$

Por otra parte, como φ_U es un difeomorfismo, tenemos un isomorfismo

$$\varphi_U^* : \Gamma(U, E) \longrightarrow C^\infty(B)^r$$

donde r es el rango de E, que desciende a un isomorfismo

$$\varphi_U^* : \Gamma_0(U, E) \longrightarrow C_0^\infty(B)^r.$$

Ahora, vimos que de forma natural $C_0^\infty(B)^r \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)^r$. Por tanto, para cada $U \in \mathfrak{U}$, tenemos una aplicación sobreyectiva

$$\begin{aligned} \pi_U : \Gamma(X,E) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)^r \\ s &\longmapsto \varphi_U^*(\rho_U s). \end{aligned}$$

Definimos entonces la *norma* L_k^2 de $s \in \Gamma(X,E)$ como

$$\|s\|_{L_k^2(E)} = \sum_{U\in\mathfrak{U}} \|\pi_U(s)\|_{L_k^2}.$$

Llamamos $L_k^2(E)$ a la compleción del espacio $\Gamma(X,E)$ con respecto de la norma L_k^2. La aplicación π_U se extiende por tanto a una aplicación $\pi_U : L_k^2(E) \to L_k^2$ continua. Más aún, podemos definir la aplicación

$$\pi : L_k^2(E) \longrightarrow L_k^2,$$

donde, si $s \in L_k^2(E)$, definimos $\pi(s)$ como $\pi_{U^*}(s)$, donde $U^* \in \mathfrak{U}$ es tal que

$$\|\pi_{U^*}(s)\|_{L_k^2} = \max_{U\in\mathfrak{U}} \left\{ \|\pi_U(s)\|_{L_k^2} \right\}.$$

Esta π es claramente biyectiva y, de hecho, define un homeomorfismo. En efecto, si $K = |\mathfrak{U}|$,

$$\tfrac{1}{K} \|s\|_{L_k^2(E)} \leq \|\pi(s)\|_{L_k^2} \leq \|s\|_{L_k^2(E)}.$$

Inmediatamente de este hecho deducimos las *inclusiones de Sobolev globales*

$$\begin{aligned} L_k^2(E) &\subset \Gamma^0(X,E) \text{ para } k \geq [n/2]+1 \\ L_k^2(E) &\subset \Gamma^m(X,E) \text{ para } k \geq [n/2]+1+m, \end{aligned}$$

donde $\Gamma^m(X,E)$ denota el conjunto de las secciones de E de clase C^m (en particular, si $m=0$, son las secciones continuas) y el *teorema de Rellich-Kondrachov*: las inclusiones $L_t^2(E) \hookrightarrow L_s^2(E)$, para $s < t$, son compactas.

3.2. Operadores elípticos en variedades. Si E y F son dos fibrados vectoriales complejos sobre X de rangos r y s, decimos que una aplicación lineal

$$L : \Gamma(X,E) \longrightarrow \Gamma(X,F)$$

es un *operador diferencial* de orden l si, para cada $U \in \mathfrak{U}$, el operador $\tilde{L}$ definido por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X,E) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\pi_U"] & \Gamma(X,F) \arrow[d, "\pi_U"] \\ C^\infty(\mathbb{T}^n)^r \arrow[r, "\tilde{L}"] & C^\infty(\mathbb{T}^n)^s, \end{tikzcd}$$

es un operador diferencial de orden l. Decimos que L es *elíptico* si $\tilde{L}$ es un operador elíptico para cada $U \in \mathfrak{U}$.

Tenemos entonces que un operador elíptico de orden l puede extenderse a un operador $L : L_{k+l}^2(E) \to L_k^2(F)$ y que cumple la desigualdad fundamental

$$\|s\|_{L_{k+l}^2(E)} \leq \|s\|_{L_k^2(E)} + \|Ls\|_{L_k^2(F)}.$$

En efecto, esto es claro porque

$$\|Ls\|_{L_k^2(E)} = \sum_{U\in\mathfrak{U}} \|\pi_U(Ls)\|_{L_k^2} = \sum_{U\in\mathfrak{U}} \left\| \tilde{L}\pi_U(s) \right\|_{L_k^2}.$$

Finalmente, vamos a dar una caracterización independiente de un operador elíptico. Sea $L : \Gamma(X,E) \to \Gamma(X,F)$ un operador diferencial de orden k. Fijos $(x,\xi) \in T^*X$, con $\xi \neq 0$, definimos el *símbolo de* L en ξ como la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \sigma_L(\xi) : E_x &\longrightarrow F_x \\ v &\longmapsto L\left(\varphi^k s\right)(x), \end{aligned}$$

con $s \in \Gamma(X,E)$ tal que $s(x) = v$ y $\varphi \in C^\infty(X)$ tal que $\varphi(x) = 0$ y $d\varphi(x) = \xi$. Ahora, si $s \in \Gamma(X,E)$ es una sección con soporte compacto contenido en un abierto U, entonces

$$L(\varphi^k s)(x) = \pi_U(L(\varphi^k s))(x) = \tilde{L}(\pi_U(\varphi^k)\pi_U(s))(x).$$

Como ya vimos, $\tilde{L}$ es elíptico si y sólo si $\tilde{L}(\pi_U(\varphi^k)\pi_U(s))(x) \neq 0$, por tanto, L es elíptico si y sólo si $\sigma_L(\xi)$ es un isomorfismo.

Una consecuencia de estos resultados es que la descomposición asociada a un operador elíptico también se cumple en el caso de variedades y la demostración es exactamente igual. Así, si $L : \Gamma(X,E) \to \Gamma(X,E)$ es un operador elíptico de orden k tal que $L^* = L$, entonces existen aplicaciones lineales

$$\begin{aligned} P : \Gamma(X,E) &\longrightarrow \Gamma(X,E) \\ \Gamma(X,E) &\longrightarrow \Gamma(X,E) \end{aligned}$$

tales que

(1) $P(\Gamma(X,E)) = \ker L$ y $\dim \ker L < \infty$,
(2) $L \circ G + P = G \circ L + P = \mathrm{id}_{\Gamma(X,E)}$,
(3) P y G son continuas en la norma L^2,
(4) existe una descomposición ortogonal con respecto al producto L^2,

$$\Gamma(X,E) = \ker L \oplus G \circ L(\Gamma(X,E)) = \ker L \oplus L \circ G(\Gamma(X,E)).$$

3.3. Complejos elípticos. Sean $E_0, E_1, \ldots, E_N$ fibrados vectoriales diferenciables definidos sobre una variedad diferenciable compacta X y supongamos que existe una sucesión $L_\bullet$ de operadores diferenciales, de un orden fijo k,

$$\Gamma(X,E_0) \xrightarrow{L_0} \Gamma(X,E_1) \xrightarrow{L_1} \Gamma(X,E_2) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{L_{N-1}} \Gamma(X,E_N).$$

Asociada a esta sucesión, para cada $(x,\xi) \in T^*X$, con $\xi \neq 0$, tenemos una sucesión de símbolos

$$E_{0,x} \xrightarrow{\sigma_{L_0}(\xi)} E_{1,x} \xrightarrow{\sigma_{L_1}(\xi)} E_{2,x} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\sigma_{L_{N-1}}(\xi)} E_{N,x}.$$

Decimos que la sucesión $L_\bullet$ de operadores diferenciales es un *complejo de cadenas* si $L_i \circ L_{i-1} = 0$. Más aún, decimos que es un *complejo elíptico* si la sucesión asociada de símbolos es exacta para cualesquiera $(x,\xi) \in T^*X$, con $\xi \neq 0$. Definimos los *grupos de cohomología* de un complejo de cadenas como

$$H^q(L_\bullet) = \frac{\ker L_q}{\operatorname{im} L_{q-1}}.$$

Si $L_\bullet$ es un complejo elíptico, definimos sus operadores *laplacianos* como

$$\Delta_j^{L_\bullet} = L_j^* L_j + L_{j-1} L_{j-1}^* : \Gamma(X,E_j) \to \Gamma(X,E_j),$$

para $j = 0, 1, \ldots, N$. Es fácil probar ahora que los operadores $\Delta_j^{L_\bullet}$ son elípticos de orden $2k$ y autoadjuntos. Tenemos entonces la existencia de operadores de Green G_j y de descomposiciones

$$\Gamma(X, E_j) = \ker \Delta_j^{L_\bullet} \oplus L_j^* L_j G_j \Gamma(X, E_j) \oplus L_{j-1} L_{j-1}^* G_j \Gamma(X, E_j).$$

Proposición 3.1. *Sea $s \in \Gamma(X, E_j)$. Entonces $\Delta_j^{L_\bullet} s = 0$ si y sólo si $L_j s = 0$ y $L_{j-1}^* s = 0$. Además, $P_{j+1} L_j = 0$.*

Demostración. Supongamos que $\Delta_j^{L_\bullet} s = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle \Delta_j^{L_\bullet} s, s \right\rangle_{L^2(E_j)} &= \left\langle L_j^* L_j s + L_{j-1} L_{j-1}^* s, s \right\rangle_{L^2(E_j)} \\
&= \left\langle L_j^* L_j s, s \right\rangle_{L^2(E_j)} + \left\langle L_{j-1} L_{j-1}^* s, s \right\rangle_{L^2(E_j)} \\
&= \left\langle L_j s, L_j s \right\rangle_{L^2(E_{j+1})} + \left\langle L_{j-1}^* s, L_{j-1}^* s \right\rangle_{L^2(E_{j-1})} \\
&= \left\| L_j s \right\|_{L^2(E_{j+1})} + \left\| L_{j-1}^* s \right\|_{L^2(E_{j-1})} = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, $L_j s = 0$ y $L_{j-1}^* s = 0$.

Para ver la otra afirmación, basta probar que $\langle P_{j+1} L_j s, t \rangle_{L^2(E_{j+1})} = 0$ para cualesquiera $s, t \in \Gamma(X, E_j)$. Pero P_{j+1} es una proyección en un espacio de Hilbert y por tanto es autoadjunta, tenemos entonces

$$\langle P_{j+1} L_j s, t \rangle_{L^2(E_{j+1})} = \langle L_j s, P_{j+1} t \rangle_{L^2(E_{j+1})} = \left\langle s, L_j^* P_{j+1} t \right\rangle_{L^2(E_j)} = 0,$$

ya que $P_{j+1} t \in \ker \Delta_{j+1}^{L_\bullet}$. □

Teorema 3.2. *Si $L_\bullet$ es un complejo elíptico, entonces $H^q(L_\bullet) \cong \ker \Delta_q^{L_\bullet}$. En consecuencia, $\dim H^q(L_\bullet) < \infty$.*

Demostración. Sea

$$\begin{aligned}
\Phi : \ker L_q &\longrightarrow \ker \Delta_q^{L_\bullet} \\
s &\longmapsto P_j(s),
\end{aligned}$$

donde P_j es la proyección ortogonal sobre $\ker \Delta_j^{L_\bullet}$. De la proposición anterior, tenemos que Φ es sobreyectiva. Basta probar entonces que $\ker \Phi = \operatorname{im} L_{q-1}$. Para ello, si $s \in \ker L_q$ y $P_j(s) = 0$, entonces

$$s = P_j(s) + L_j^* L_j G_j s + L_{j-1} L_{j-1}^* G_j s = L_{j-1} L_{j-1}^* G_j s \in \operatorname{im} L_{j-1},$$

ya que $L_j G_j = G_{j+1} L_j$.

Veamos que, en efecto, $L_j G_j = G_{j+1} L_j$. Basta probarlo en $(\ker \Delta_j^{L_\bullet})^\perp = \operatorname{im} \Delta_j$. Es decir, basta probar que $L_j G_j \Delta_j \varphi = G_{j+1} L_j \Delta_j \varphi$. Ahora,

$$L_j \varphi = P_{j+1}(L_j \varphi) + G_{j+1}(\Delta_{j+1} L_j \varphi) = P_{j+1} L_j \varphi + G_{j+1} L_j \Delta_j \varphi.$$

Por otra parte, $\varphi = G_j \Delta_j \varphi$, de modo que

$$L_j \varphi = L_j G_j \Delta_j \varphi.$$

Tenemos entonces

$$(L_j G_j - G_{j+1} L_j)(\Delta_j \varphi) = P_{j+1} L_j \varphi = 0,$$

como queríamos probar. □

Ejemplo 3.3. Consideremos X una variedad diferenciable compacta, T^*X su fibrado tangente, y $\Omega^k(X) = \Gamma(X, \wedge^k T^*X \otimes \mathbb{C})$ el espacio de las k-formas diferenciales con coeficientes en $\mathbb{C}$ (podríamos tomar también coeficientes en $\mathbb{R}$). La diferencial exterior da una aplicación $d : \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$ que es, de hecho, un operador diferencial de orden 1, ya que

$$d\left(\sum \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_k}\right) = \sum \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_k}.$$

Ahora, el símbolo asociado a d en un punto $(x,\xi) \in T^*X$, con $\xi \neq 0$ es

$$\begin{aligned} \sigma_d(\xi) : \wedge^k T_x^*X &\longrightarrow \wedge^{k+1} T_x^*X \\ v &\longmapsto d(\varphi\omega)_x, \end{aligned}$$

con $\omega \in \Omega^k(X)$ tal que $\omega_x = v$ y $\varphi \in C^\infty(X)$ tal que $\varphi(x) = 0$ y $d\varphi(x) = \xi$. Por tanto,

$$\sigma_d(\xi)(v) = d(\varphi\omega)_x = (d(\varphi) \wedge \omega - \varphi\omega)_x = (\xi \wedge \omega)_x = \xi \wedge v.$$

Por tanto, el *complejo de de Rham*

$$\cdots \xrightarrow{\ d\ } \Omega^{k-1}(X) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^k(X) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^{k+1}(X) \xrightarrow{\ d\ } \cdots,$$

es un complejo elíptico, ya que, para todo $(x,\xi) \in T^*X$, con $\xi \neq 0$, la sucesión de símbolos asociada es exacta

$$\cdots \xrightarrow{\xi\wedge -} \wedge^{k-1} T_x^*X \xrightarrow{\xi\wedge -} \wedge^k T_x^*X \xrightarrow{\xi\wedge -} \wedge^{k+1} T_x^*X \xrightarrow{\xi\wedge -} \cdots.$$

De modo que si definimos los *d-laplacianos*

$$\Delta_d = d^*d + dd^*,$$

tenemos que

$$H^k_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C}) = \ker \Delta_d.$$