Fibrados de Higgs multiplicativos, monopolos e involuciones

Guillermo Gallego Sánchez

Universidad Complutense de Madrid — Facultad de Ciencias Matemáticas

Lectura de Tesis Doctoral
25 de octubre de 2023

Trabajo dirigido por Oscar García-Prada y Enrique Arrondo Esteban

Índice

Fibrados de Higgs

- X es una curva proyectiva compleja lisa.
- G es un grupo algebraico reductivo sobre $\mathbb{C}$.
- $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G.
- $L \to X$ es un fibrado de línea. (Normalmente $L = K_X$).

Definición (Hitchin, Simpson)

Un G-fibrado de Higgs (L-torcido) sobre X es un par (E, φ) que consiste de

- un G-fibrado principal $E \to X$,
- una sección $\varphi \in H^0(X, E(\mathfrak{g}) \otimes L)$, donde $E(\mathfrak{g})$ denota el fibrado asociado a la acción adjunta de G en $\mathfrak{g}$.

Fibrados de Higgs. Hitos

- Obtenidos (cuando $L = K_X$) por Hitchin (1987) a través de las ecuaciones de Hitchin:

$$\begin{cases} F_A + [\varphi, \varphi^\dagger] = \lambda, \\ \bar{\partial}_A \varphi = 0. \end{cases}$$

- Cuando $L = K_X$ la correspondencia de Hodge no abeliana relaciona los fibrados de Higgs poliestables con las representaciones en G del grupo fundamental de X^{an}.
- Estructura hiperkähler cuando $L = K_X$.
- Dan la fibración de Hitchin

$$\begin{aligned} h_G : \{G\text{-fibrados de Higgs}\} &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(X, L^{d_i}) \\ (E, \varphi) &\longmapsto (b_1(\varphi), \ldots, b_r(\varphi)), \end{aligned}$$

donde $b_1, \ldots, b_r$ son generadores del anillo de polinomios invariantes $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$, con $d_i = \deg b_i$. (Por ejemplo los coeficientes del polinomio característico).

Algunos aspectos de la fibración de Hitchin

$$\begin{aligned} h_G : \{G\text{-fibrados de Higgs}\} &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(X, L^{d_i}) \\ (E, \varphi) &\longmapsto (b_1(\varphi), \dots, b_r(\varphi)), \end{aligned}$$

- Obtenida a través del morfismo natural $[\mathfrak{g}/G] \to \mathfrak{g} /\!\!/ G \cong \mathfrak{t}/W$. (Punto de vista *stacky* de Ngô).
- Estructura de *gerbe* (torsor sobre un grupoide de Picard). [Donagi–Gaitsgory].
- Las fibras son variedades de Prym sobre la «curva cameral», obtenida a partir del morfismo $\mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/W$. [Hitchin, BNR, Donagi-Gaitsgory].
- *Mirror symmetry* entre h_G y $h_{\check{G}}$. [Donagi–Pantev]. «Límite clásico» del programa de Langlands geométrico. [Kapustin–Witten].
- Clave en la demostración Lema Fundamental de Langlands–Shelstad para las álgebras de Lie. [Ngô, medalla Fields].

Índice

Parte I: Preliminares

Parte II: Resultados

Fibrados de Higgs multiplicativos. Definición

- X es una curva proyectiva compleja lisa.
- G es un grupo algebraico reductivo sobre $\mathbb{C}$.
- $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ subconjunto finito. $X' = X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Definición

Un G-fibrado de Higgs multiplicativo con singularidades en $\boldsymbol{x}$ sobre X es un par (E, φ) que consiste de

- un G-fibrado principal $E \to X$,
- una sección $\varphi \in \Gamma(X', E(G))$, donde $E(G)$ denota el fibrado asociado a la acción adjunta de G en sí mismo.

- Observación: También puede tomarse $E(G')$, para G' un grupo isógeno a G (de modo que G actúa en G' por la acción adjunta). (Ejemplo: G semisimple y $G' = G^{\mathrm{sc}}$). (G, G')-fibrados de Higgs multiplicativos.

Fijando las singularidades

- Para obtener un móduli de tipo finito podemos prescribir los datos singulares.
- x_i punto singular.
- z variable formal en torno a x_i, $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]]$, $F = \mathbb{C}((z))$.
- $\varphi|_{\mathrm{Spec}F} \in \Gamma(\mathrm{Spec}F, E|_{\mathrm{Spec}\mathcal{O}}(G))$ determina un elemento $\lambda_i \in G(\mathcal{O})\backslash G(F)/G(\mathcal{O})$.

Descomposición de Cartan

Fijamos $B \subset G$ Borel y $T \subset B \subset G$ toro maximal de G.

$$G(F) = \bigsqcup_{\lambda \in \mathbf{X}_*(T)_+} G(\mathcal{O}) z^{\lambda} G(\mathcal{O}).$$

- Definimos $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{X}_*(T)_+^n$, y decimos que (E, φ) es de tipo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$.

La fibración de Hitchin multiplicativa

- Supongamos que G es semisimple.
- Fijamos $B \subset G$ Borel y $T \subset B \subset G$ toro maximal de G. Tomamos los correspondientes $B^{\mathrm{sc}} \subset G^{\mathrm{sc}}$ y $T^{\mathrm{sc}} \subset G^{\mathrm{sc}}$.
- $\mathbb{C}[G^{\mathrm{sc}}]^G = \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_r]$, para $b_i = \mathrm{traza}(\rho_{\omega_i})$, $\omega_1, \ldots, \omega_r$ pesos fundamentales.
- Fibración de Hitchin multiplicativa

$$
\begin{aligned}
h_G : \{(G, G^{\mathrm{sc}})\text{-f. de Higgs mult. de tipo } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})\} &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(X, \mathcal{O}_X(\langle \omega_i, \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{x} \rangle)) \\
(E, \varphi) &\longmapsto (b_1(\varphi), \ldots, b_r(\varphi)),
\end{aligned}
$$

- Se puede generalizar a (G, G')-fibrados de Higgs multiplicativos, usando el punto de vista *stacky*, y la aplicación

$$[G'/G] \longrightarrow G' /\!\!/ G \cong T'/W.$$

La fibración de Hitchin multiplicativa. Algo de historia

- Presente en la literatura de Física desde finales de los 90.
- 2002. Introducida en la literatura de geometría algebraica por Hurtubise–Markman (sistema integrable).
- 2010. Correspondencia de Charbonneau–Hurtubise. Extendida por Smith (2016) y Mochizuki (2017).
- 2011. Considerada por Frenkel–Ngô en el contexto de la geometrización de las fórmulas de traza. Sugieren el punto de vista del monoide de Vinberg, desarrollado posteriormente por Bouthier (2014-15) y J. Chi (2018).
- 2023. Empleada en la demostración del Lema Fundamental para los grupos en la tesis de G. Wang.

Índice

Monoides reductivos

- Un monoide M es un semigrupo (operación binaria asociativa) con elemento neutro. Los elementos invertibles forman un grupo $M^\times$.
- Un monoide algebraico (sobre $\mathbb{C}$) es un objeto en monoides en la categoría de $\mathbb{C}$-esquemas. Es reductivo si $M^\times$ es reductivo.
- Ejemplo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{n\times n} : \mathrm{Alg}_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathrm{Monoides} \\ A &\longmapsto \mathrm{Mat}_{n\times n}(A) \end{aligned}$$

  es un monoide reductivo sobre $\mathbb{C}$ con $(\mathrm{Mat}_{n\times n})^\times = \mathrm{GL}_n$.
- Un monoide algebraico también puede entenderse como una inmersión abierta $(M^\times \times M^\times)$-equivariante de su grupo de unidades $M^\times$. (≪Variedades tóricas no abelianas≫).

Abelianización de un monoide

- G igual que antes. M monoide reductivo con $(M^\times)' = G$.
- El cociente GIT
$$\alpha_M : M \longrightarrow \mathbf{A}_M := M /\!\!/ (G \times G)$$
se denomina la abelianización de M.
- $\mathbf{A}_M$ es una variedad tórica para el toro $Z^0_{M^\times}/(Z^0_{M^\times} \cap G)$.
- Un homomorfismo $f : M_1 \to M_2$ induce un cuadrado conmutativo
$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_{M_1}"] & M_2 \arrow[d, "\alpha_{M_2}"] \\ \mathbf{A}_{M_1} \arrow[r] & \mathbf{A}_{M_2}. \end{tikzcd}$$
- f es excelente si este cuadrado es cartesiano.

Monoides muy planos

- G igual que antes. M monoide reductivo con $(M^\times)' = G$.
- El cociente GIT
$$\alpha_M : M \longrightarrow \mathbf{A}_M := M /\!\!/ (G \times G)$$
se denomina la abelianización de M.
- $\mathbf{A}_M$ es una variedad tórica para el toro $Z^0_{M^\times}/(Z^0_{M^\times} \cap G)$.
- M es muy plano si α_M es dominante, plano y con fibras íntegras.

El monoide de Vinberg

La categoría de monoides muy planos M con $(M^\times)' = G$ y morfismos excelentes tiene un objeto versal $\mathrm{Env}(G)$, llamado el monoide envolvente de Vinberg de G.

El monoide de Vinberg

- $G_+ := (T \times G)/Z_G$. $\omega_1, \dots, \omega_r$ pesos fundamentales, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ raíces simples.
- $\mathsf{Env}(G)$ se define como la adherencia de la imagen de

$$\begin{aligned} G_+ &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathsf{End}(V_i) \times \mathbb{A}^1) \\ [t, g] &\longmapsto (t^{w_0(\omega_i)} \rho_i(g), t^{\alpha_i})_{i=1}^r, \end{aligned}$$

  donde $\rho_i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ es la irrep con mayor peso ω_i y w_0 es el elemento más largo de W.
- $Z^0_{M^\times}/(Z^0_{M^\times} \cap G) = T/Z_G = T^{\mathrm{ad}}$.
- $\mathbf{A}_{\mathsf{Env}(G)} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[e^{\alpha_i} : i = 1, \dots, r]) \cong \mathbb{A}^r$.
- $\alpha_{\mathsf{Env}(G)}([t, g]) = (t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_r})$.

Fibración de Hitchin asociada a un monoide muy plano

Teoría de invariantes para un monoide

M monoide muy plano con $(M^\times)' = G$.

$$M /\!\!/ G = (G /\!\!/ G) \times \mathbf{A}_M.$$

Fibración de Hitchin asociada a M

X igual que antes. Obtenemos una fibración

$$\mathcal{M}_X(M) \xrightarrow{h_M} \mathcal{B}_X(M) \longrightarrow \mathcal{A}_X(M) \longrightarrow \mathrm{Bun}_{Z_{M^\times}}(X)$$

aplicando el functor $\mathrm{Map}(X, -)$ a la sucesión natural de stacks cocientes

$$[M/(G \times Z_{M^\times})] \longrightarrow [(M /\!\!/ G)/Z_{M^\times}] \longrightarrow [\mathbf{A}_M/Z_{M^\times}] \longrightarrow \mathbb{B}Z_{M^\times}.$$

Comparación de los dos puntos de vista

- Sea $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathrm{X}_*(T)_+)^n$ y $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ con todos los x_i distintos entre sí.
- Estos datos determinan un T-fibrado principal $P_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}} \to X$, tomando cada λ_i como la función de transición en torno a cada x_i.
- El fibrado asociado a la acción de T en $\mathbf{A}_{\mathrm{Env(G)}}$ es

$$P_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{A}_{\mathrm{Env}(G)}) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X\Big(\sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_i, \lambda_j \rangle x_j\Big).$$

  Como los λ_i son dominantes, este fibrado asociado tiene una sección canónica que no se anula $s_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}}$.
- El par $(P_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}}, s_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}})$ determina un morfismo $X \to [\mathbf{A}_{\mathrm{Env}(G)}/T]$.
- La fibración de Hitchin multiplicativa se obtiene como el pull-back de $[\mathrm{Env}(G)/(G \times T)] \to [(\mathrm{Env}(G) /\!\!/ G)/T]$ a través de este morfismo. [Bouthier, J. Chi, G. Wang].

Índice

Fibrados vectoriales mini-holomorfos

- Vemos X ahora como una superficie de Riemann, y consideramos el producto $Y = X \times S^1$.
- Denotamos por t la coordenada en la dirección de S^1, y definimos

$$T^{0,1}Y = \underline{\mathbb{C}}\partial_t \oplus \mathrm{pr}_X^* T^{0,1}X \quad \text{y} \quad \Omega^{0,1}(Y) = C^\infty(Y,\mathbb{C})dt \oplus \mathrm{pr}_X^*\Omega^{0,1}(X).$$

- Dada una función $f \in C^\infty(Y,\mathbb{C})$, definimos $\bar{\partial}_Y f = \partial_t f + \bar{\partial}_X f \in \Omega^{0,1}(Y)$.

Definición (Mochizuki (también, Charbonneau–Hurtubise))

Sea $\mathbb{E} \to Y$ un fibrado vectorial complejo. Una estructura mini-holomorfa en $\mathbb{E}$ es un operador $\bar{\partial}_{\mathcal{E}} : \Omega^0(Y,\mathbb{E}) \to \Omega^{0,1}(Y,\mathbb{E})$ que satisface la regla de Leibniz

$$\bar{\partial}_{\mathcal{E}}(fv) = (\bar{\partial}_Y f)v + f\bar{\partial}_{\mathcal{E}} v,$$

para todo $f \in C^\infty(Y,\mathbb{C})$ y $v \in \Omega^0(Y,\mathbb{E})$, y tal que $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$.
El par $\mathcal{E} = (\mathbb{E}, \bar{\partial}_{\mathcal{E}})$ se denomina un fibrado vectorial mini-holomorfo en Y.

Fibrados principales mini-holomorfos

Definición (★ (también, Smith))

Sea $p : \mathbb{E} \to Y$ un G-fibrado principal diferenciable. Una estructura mini-holomorfa $D^{0,1}_{\mathcal{E}}$ en $\mathbb{E}$ es una escisión G-invariante de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow V_{\mathbb{E}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow dp^{-1}(T^{0,1}Y) \xrightarrow{\sim} p^* T^{0,1} Y \longrightarrow 0,$$

de tal forma que la distribución resultante $H_{D^{0,1}_{\mathcal{E}}}(p^* T^{0,1} Y) \subset dp^{-1}(T^{0,1}Y)$ es integrable.
El par $\mathcal{E} = (\mathbb{E}, D^{0,1})$ se denomina un G-fibrado principal mini-holomorfo en Y.

Correspondencia de Chern

Sea $K \subset G$ el compacto maximal. Sea $h : \mathbb{E} \to G/K$ una reducción del grupo de estructura de $\mathbb{E}$ a K. Existe un único par (∇, Φ), con ∇ una h-conexión en $\mathbb{E}$ y Φ extensión de una sección K-equivariante en $\Omega^0(\mathbb{E}_h, \mathfrak{k})$ de forma que $D^{0,1}_{\mathcal{E}} = (\nabla - i\Phi)^{0,1}$. El par (∇, Φ) es el par de Chern asociado a $(\mathcal{E}, h)$.

Scattering y singularidades de tipo Dirac

- Sea $\mathcal{E} \to Y$ un G-fibrado mini-holomorfo y $\gamma : [0,1] \to Y$ un camino con $\gamma_*(\partial/\partial s) \subset \underline{\mathbb{R}}\partial_t$.
- El transporte paralelo da un isomorfismo $\varphi_{\mathcal{E},\gamma} : \mathcal{E}_{\gamma(0)} \to \mathcal{E}_{\gamma(1)}$ llamado la aplicación de *scattering* associada a $\mathcal{E}$ a lo largo de γ.
- Para cada $t \in [0, 2\pi]$, denotamos por $E_t \to X$ el fibrado con fibras $(E_t)_x = \mathcal{E}_{(e^{it},x)}$, que hereda una estructura holomorfa directamente de la estructura mini-holomorfa de $\mathcal{E}$.
- Dados $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$, tomando *scattering* a lo largo de caminos de la forma $\gamma_x(s) = (e^{i[t_1+s(t_2-t_1)]}, x)$ se obtiene un isomorfismo $\varphi_{\mathcal{E},t_1,t_2} : E_{t_1} \to E_{t_2}$.
- Sea $\mathcal{E}$ un G-fibrado mini-holomorfo sobre $\mathbb{R} \times D_\delta(0) \setminus \{(0,0)\}$. Hay una aplicación de scattering $\varphi_{\mathcal{E},-1,1} : E_{-1} \to E_1$. Esta aplicación es holomorfa sobre $D_\delta(0) \setminus \{0\}$ y tiene una singularidad en 0. Decimos que esta singularidad es de tipo Dirac si la aplicación es meromorfa en $D_\delta(0)$.
- Las singularidades de tipo Dirac también están parametrizadas por $(G(\mathcal{O}) \times G(\mathcal{O}))$-órbitas en $G(F)$, es decir, por cocaracteres dominantes $\mathbf{X}_*(T)_+$. Dicho carácter se denomina el peso de la singularidad.

Fibrados mini-holomorfos y fibrados de Higgs multiplicativos

Sean $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ con los x_i distintos y $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, con $0 < t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n < 2\pi$. Denotamos $y_j = (e^{it_j}, x_j)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, e $Y' = Y \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$. Sea también $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{X}_*(T)_+$.

Definición

Un G-fibrado mini-holomorfo singular en Y de tipo $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ es un fibrado mini-holomorfo $\mathcal{E}$ sobre Y' que, localmente, para cada $i = 1, \ldots, n$, tiene una singularidad de tipo Dirac en y_i de peso λ_i.

Para cada $\boldsymbol{t}$, la asignación

$$\mathcal{E} \longmapsto (E_0, \varphi_{\mathcal{E},0,2\pi}),$$

determina una equivalencia de categorías entre la categoría de los G-fibrados miniholomorfos singulares en Y de tipo $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ y la categoría de los G-fibrados de Higgs multiplicativos en X de tipo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$.

Monopolos

- Sean $\mathbb{E}$ un G-fibrado principal con una K-reducción h y (∇, Φ) un par formado por una h-conexión ∇ y Φ una extensión de una sección K-equivariante en $\Omega^0(\mathbb{E}_h, \mathfrak{k})$.
- Decimos que $(\mathbb{E}, h, \nabla, \Phi)$ resuelve la ecuación de Hermite–Bogomolny (HB) si

$$F_\nabla - *\nabla\Phi = iC\omega_X,$$

  para C un elemento central del álgebra de Lie de K.
- Decimos que $(\mathbb{E}, h, \nabla, \Phi)$ tiene singularidades de tipo Dirac $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ si puede aproximarse localmente, cerca de cada y_i, por un T-monopolo de Dirac estándar de carga λ_i.
- Decimos que $(\mathbb{E}, h, \nabla, \Phi)$ es un monopolo singular de tipo $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ si es una solución a la ecuación HB y tiene singularidades de tipo Dirac $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$.
- Charbonneau–Hurtubise, y posteriormente Smith, demostraron que un fibrado mini-holomorfo singular de tipo $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ poliestable admite una K-reducción h tal que su par de Chern determina un monopolo singular de tipo $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$. [Correspondencia CHS entre fibrados de Higgs multiplicativos y monopolos singulares].

Espacio de móduli de monopolos

- El espacio de móduli de los monopolos singulares puede obtenerse formalmente como un cociente Kähler.
- Cuando X es una curva elíptica (tiene género 1), también puede obtenerse como un cociente hiperkähler.
- Equivalentemente [Elliot–Pestun], en el trabajo de Hurtubise–Markman, cuando X tiene género 1, se construye una estructura simpléctica algebraica en el espacio de móduli de G-fibrados de Higgs multiplicativos.

Índice

Parte I: Preliminares

Parte II: Resultados

Fibrados de Higgs e involuciones

- Una involución de G es un automorfismo de G de orden 2.
- $G^\theta = \{g \in G : \theta(g) = g\}$, $G_0^\theta = (G^\theta)^0$, $G_\theta = \left\{g \in G : \theta(g)g^{-1} \in Z_G\right\} = N_G(G^\theta)$.
- Descomposición de Cartan: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\theta \oplus \mathfrak{m}$ (autoespacios $+1$ y -1).

Definición

Un (G, θ)-fibrado de Higgs (L-torcido) sobre X es un par (E, φ) que consiste de

- un G^θ-fibrado principal $E \to X$,
- una sección $\varphi \in H^0(X, E(\mathfrak{m}) \otimes L)$, donde $E(\mathfrak{m})$ denota el fibrado asociado a la de G^θ en $\mathfrak{m}$ obtenida como restricción de la acción adjunta.

- Nuestra motivación: Estudiar el análogo multiplicativo.

Fibrados de Higgs e involuciones. Motivación

Definición

Un (G,θ)-fibrado de Higgs (L-torcido) sobre X es un par (E,φ) que consiste de

- un G^θ-fibrado principal $E \to X$,
- una sección $\varphi \in H^0(X, E(\mathfrak{m}) \otimes L)$, donde $E(\mathfrak{m})$ denota el fibrado asociado a la de G^θ en $\mathfrak{m}$ obtenida como restricción de la acción adjunta.

- Bajo la correspondencia de Hodge no abeliana, dan representaciones del grupo fundamental en la forma real $G_{\mathbb{R}}$ de G determinada por θ.
- Aparecen como puntos fijos de

$$\begin{aligned}\{G\text{-fibrados de Higgs}\} &\longrightarrow \{G\text{-fibrados de Higgs}\}\\ (E,\varphi) &\longmapsto (\theta(E), -\theta(\varphi)).\end{aligned}$$

- Dan el soporte de una BAA-brana, conjeturalmente dual a la BBB-brana determinada por el grupo dual de la variedad simétrica G/G^θ.

Índice

Parte I: Preliminares

Parte II: Resultados

(G,θ)-fibrados de Higgs multiplicativos

Definición ($\bigstar$)

Un (G,θ)-fibrado de Higgs multiplicativo con singularidades en $\boldsymbol{x}$ sobre X es un par (E,φ) que consiste de

- un G^θ-fibrado principal $E \to X$,
- una sección $\varphi \in \Gamma(X', E(G/G^\theta))$, donde $E(G/G^\theta)$ denota el fibrado asociado a la acción natural de G^θ en la variedad simétrica G/G^θ.

- Observación: También puede tomarse $E(G/H)$, para $G_0^\theta \subset H \subset G_\theta$.
- Los datos singulares se prescriben fijando elementos $\lambda_i \in (G/H)(F)/G(\mathcal{O})$. Se tiene una descomposición análoga a la de Cartan [Uzawa, Luna-Vust, Nadler]

$$(G/H)(F) = \bigsqcup_{\lambda \in \mathbf{X}_*(A/(A\cap H))_-} G(\mathcal{O}) z^\lambda,$$

para $A \subset G$ un toro θ-escindido maximal.

(G,θ)-fibrados de Higgs multiplicativos. Fibración de Hitchin

- Richardson demostró un análogo del morfismo de restricción de Chevalley

$$\mathbb{C}[G/H]^{G^\theta} = \mathbb{C}[A/(A \cap H)]^{W_\theta},$$

donde $W_\theta = N_{G^\theta}(A)/C_{G^\theta}(A)$ es el pequeño grupo de Weyl asociado a θ.

- En particular, si G es semisimple simplemente conexo, se tiene que $\mathbb{C}[G/G^\theta]^{G^\theta}$ es un anillo de polinomios

$$\mathbb{C}[G/G^\theta]^{G^\theta} = \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_l].$$

Las b_i son funciones cuyos pesos mayores son $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$, los pesos fundamentales relativos al sistema de raíces restringido asociado a θ y l es el rango de la variedad simétrica G/G^θ.

- Fibración de Hitchin para (G,θ)-fibrados de Higgs multiplicativos (★)

$$\begin{aligned}\{(G,\theta)\text{-f. de Higgs mult. de tipo } (\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})\} &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{l} H^0(X, \mathcal{O}_X(\langle \varpi_i, \boldsymbol{\lambda}\cdot \boldsymbol{x}\rangle)).\\ (E,\varphi) &\longmapsto (b_1(\varphi), \ldots, b_l(\varphi)).\end{aligned}$$

Índice

Inmersiones muy planas de G/G^θ

- Supongamos que G es semisimple y simplemente conexo.
- Tomamos Z un toro algebraico cualquiera y denotamos $G_Z = G \times Z$ y $\vartheta \in \mathrm{Aut}_2(G_Z)$ la involución $\vartheta(g, z) = (\theta(g), z^{-1})$.
- Sea $H \subset G_Z$ tal que $(G_Z)_0^\vartheta \subset H \subset (G_Z)_\vartheta$ y tal que $G^\theta = H \cap (G \times \{1\})$.
- Consideramos los toros $T_Z = Z/(\mathrm{pr}_2(H) \cap \{z \in Z : z^2 = 1\})$ y $A_Z = Z/\mathrm{pr}_2(H)$.
- Tomamos Σ una inmersión G_Z-equivariante de la variedad simétrica G_Z/H que sea afín, normal y simple.
- Se define la abelianización de Σ como el cociente GIT $\alpha_\Sigma : \Sigma \to \mathbf{A}_\Sigma := \Sigma /\!\!/ G$. Se tiene que $\mathbf{A}_\Sigma$ es una variedad tórica para A_Z.
- Se dice que Σ es muy plana si α_Σ es dominante, plana y con fibras íntegras.

La inmersión de Guay

La categoría de las inmersiones muy planas así construidas, con los morfismos excelentes, tiene un objeto versal $\mathrm{Env}(G/G^\theta)$, llamado la inmersión envolvente de Guay de G/G^θ.

La inmersión de Guay

- $(G/G^\theta)_+ = (A \times G)/\left\{(an^{-1}, nh) : h \in G^\theta, a \in A \cap G^\theta, n \in A \cap G_\theta\right\}$.
- $\mathrm{Env}(G/G^\theta)$ es la adherencia de la imagen de

$$\begin{aligned} (G/G^\theta)_+ &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{l} (\mathbb{A}^{m_i} \times \mathbb{A}^1) \\ [a, g] &\longmapsto (a^{w_0(\varpi_i)}(f_i^1(g), \ldots, f_i^{m_i}(g)), a^{-\bar{\alpha}_i})_{i=1}^{l}, \end{aligned}$$

  donde $f_i^1, \ldots, f_i^{m_i}$ es una base del G-submódulo $\mathbb{C}[G/G^\theta]_{\varpi_i}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
- $T_+ = A/(A \cap G^\theta), A_+ = A/(A \cap G_\theta)$.
- $\mathbf{A}_{\mathrm{Env}(G/G^\theta)} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[e^{-\bar{\alpha}_i} : i = 1, \ldots, l])$.

Fibración de Hitchin asociada a una inmersión muy plana

Teoría de invariantes para una inmersión muy plana. (★)

Sea Σ una inmersión muy plana como antes.

$$\Sigma /\!\!/ G^\theta = ((G/G^\theta) /\!\!/ G^\theta) \times \mathbf{A}_\Sigma$$

Fibración de Hitchin asociada a Σ. (★)

X igual que antes. Obtenemos una fibración

$$\mathcal{M}_X(\Sigma) \xrightarrow{h_\Sigma} \mathcal{B}_X(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{A}_X(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Bun}_{T_Z}(X)$$

aplicando el functor $\mathrm{Map}(X, -)$ a la sucesión natural de stacks cocientes

$$[\Sigma/(G^\theta \times T_Z)] \longrightarrow [(\Sigma /\!\!/ G^\theta)/T_Z] \longrightarrow [\mathbf{A}_\Sigma/T_Z] \longrightarrow \mathbb{B}T_Z.$$

Comparación de los dos puntos de vista

- Sea $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathrm{X}_*(A/(A \cap G^\theta))_-)^n$ y $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ con todos los x_i distintos entre sí.
- Estos datos determinan un $A/(A \cap G^\theta)$-fibrado principal $P_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}} \to X$, tomando cada λ_i como la función de transición en torno a cada x_i.
- El fibrado asociado a la acción de $A/(A \cap G^\theta)$ en $\mathbf{A}_{\mathrm{Env(G/G^\theta)}}$ es

$$P_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{A}_{\mathrm{Env}(G/G^\theta)}) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}_X\Big(\sum_{j=1}^{n} \langle -\bar{\alpha}_i, \lambda_j \rangle x_j\Big).$$

  Como los λ_i son antidominantes, este fibrado asociado tiene una sección canónica que no se anula $s_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}}$.
- El par $(P_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}}, s_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}})$ determina un morfismo $X \to [\mathbf{A}_{\mathrm{Env}(G/G^\theta)}/(A/(A \cap G^\theta))]$.
- La fibración de Hitchin multiplicativa se obtiene como el pull-back de $[\mathrm{Env}(G/G^\theta)/(G^\theta \times (A/(A \cap G^\theta)))] \to [(\mathrm{Env}(G/G^\theta) /\!\!/ G^\theta)/(A/(A \cap G^\theta)]$ a través de este morfismo. [★].

Índice

Involuciones aplicadas a fibrados de Higgs multiplicativos

- Consideremos la proyección natural $\pi : \mathrm{Aut}_2(G) \to \mathrm{Out}_2(G) = \mathrm{Aut}_2(G)/\mathrm{Int}(G)$.

Las involuciones

Dados $a \in \mathrm{Out}_2(G)$ y $\varepsilon = \pm 1$, consideramos la involución

$$\iota_a^\varepsilon : (E, \varphi) \longmapsto (\theta(E), \theta(\varphi)^\varepsilon),$$

para cualquier $\theta \in \pi^{-1}(a)$.

- Objetivo: Estudiar los puntos fijos $((E, \varphi) \cong (\theta(E), \theta(\varphi)^\varepsilon))$.
- Claramente, dado cualquier $\theta \in \pi^{-1}(a)$, los G^θ-fibrados de Higgs multiplicativos se fijan bajo la acción de ι_a^+ y los (G, θ)-fibrados de Higgs multiplicativos se fijan bajo ι_a^-.

Un poco más sobre involuciones

- G actúa en sí mismo por la acción de conjugación θ-torcida

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, s) &\longmapsto g * s = gs\theta(g)^{-1}. \end{aligned}$$

- Las órbitas son espacios homogéneos de la forma $G * s \cong G/G^{\theta_s}$, para $\theta_s = \mathrm{Int}_s \circ \theta$.
- θ_s es una involución si y sólo si $s \in S_\theta = \{s \in G : s\theta(s) \in Z_G\}$.
- $*$ puede extenderse a una acción de $G \times Z_G$, que preserva S_θ.
- G/G^θ y $G/G^{\theta'}$ se identifican si θ y θ' están relacionadas por

$$\theta \sim \theta' \text{ si y sólo si existe un } \alpha \in \mathrm{Int}(G) \text{ tal que } \theta' = \alpha \circ \theta \circ \alpha^{-1}$$

- $\pi : \mathrm{Aut}_2(G) \to \mathrm{Out}_2(G)$ desciende a la aplicación *clique* $\mathrm{cl} : \mathrm{Aut}_2(G)/\sim \longrightarrow \mathrm{Out}_2(G)$ y

$$\mathrm{cl}^{-1}(a) \cong S_\theta/(G \times Z_G) = H^1_\theta(\mathbb{Z}/2, G^{\mathrm{ad}}),$$

para cualquier $\theta \in \pi^{-1}(a)$.

Los puntos fijos

Teorema (★)

Sea $a \in \mathrm{Out}_2(G)$*. Si* (E, φ) *es simple y* $(E, \varphi) \cong \iota_a^\varepsilon$*, entonces:*

1. *Existe un único* $[\theta] \in \mathrm{cl}^{-1}(a)$ *tal que hay una reducción del grupo de estructura de* E *a un* G^θ*-fibrado* $E_\theta \subset E$*.*
2. *Si consideramos la correspondiente aplicación* G*-equivariante* $f_\varphi : E|_{X'} \to G$*, entonces* $f_\varphi|_{E_\theta}$ *toma valores en* G^θ *si* $\varepsilon = 1$*, y en* $S^\theta := \left\{ s \in G : s = \theta(s)^{-1} \right\}$ *si* $\varepsilon = -1$*.*

En particular, cuando $\varepsilon = -1$*,* $f_\varphi|_{E_\theta}$ *toma valores en una única órbita* $G * s \subset S^\theta$ *para algún* $s \in S^\theta$ *único salvo conjugación* θ*-torcida.*

- Para que existan puntos fijos, la W-órbita de los datos singulares $\boldsymbol{\lambda}$ tiene que estar fija por la acción de θ. Estas órbitas fijas se determinan en términos del representante cuasiescindido de la clase a.
- Los posibles valores de s se ven restringidos por los datos singulares $\boldsymbol{\lambda}$.

Fibrados mini-holomorfos e involuciones (★)

- En términos de fibrados mini-holomorfos, las involuciones ι_ε^a corresponden a

$$\iota_\varepsilon^a(\mathcal{E}) = \zeta_\varepsilon^*\theta(\mathcal{E}),$$

  donde $\zeta_\varepsilon : Y \to Y$ es la involución $\zeta_\varepsilon(e^{it}, x) = (e^{\varepsilon it}, x)$.
- Los puntos fijos de ι_-^a son aquellos que admiten una estructura torcida-equivariante de tipo $(\mathbb{Z}/2, \theta, \zeta_-, c)$, para algún $c \in Z_G^\theta$. En particular, se obtienen reducciones para dos representates θ_0 y $\theta_{2\pi}$ de los fibrados holomorfos E_0 y $E_{2\pi}$.
- Se reduce a un (G, θ)-fibrado de Higgs multiplicativo solo cuando las correspondientes f_0 y $f_{2\pi}$ toman valores en la misma clase de conjugación θ'-torcida, isomorfa a G/G^θ.
- A nivel de monopolos, se obtiene la involución

$$\iota_\varepsilon^a(A_X, A_t, \Phi) = (\theta(A_X(e^{\varepsilon it}, x)), \varepsilon\theta(A_t(e^{\varepsilon it}, x)), \varepsilon\theta(\Phi(e^{\varepsilon it}, x))).$$

La estructura simpléctica

- Supongamos que X es una curva elíptica.
- Hurtubise–Markman definieron una estructura algebraica simpléctica Ω en el espacio de móduli de fibrados de Higgs multiplicativos.
- Más aún, entendido como el espacio de móduli de monopolos singulares, admite una estructura hiperkähler.

Teorema (★)

Dada $a \in \mathrm{Out}_2(G)$,

$$(\iota_a^\varepsilon)^*\Omega = \varepsilon\Omega.$$

Por tanto, los puntos fijos de ι_a^+ forman una subvariedad simpléctica algebraica y los de ι_a^- forman una subvariedad Lagrangiana algebraica.
De hecho, con respecto a la estructura hiperkähler, los puntos fijos de ι_a^+ forman una subvariedad de tipo BBB, mientras que los de ι_a^- forman una subvariedad de tipo BAA.

Índice

Direcciones futuras

- Dualidad de Langlands y *mirror symmetry*. (Trabajo en curso con Benedict Morrissey).
- Cocientes regulares para variedades simétricas.
- Generalización a variedades esféricas. ¿Y más allá?
- Ecuaciones gauge intrínsecas (a la Mundet i Riera).
- El lado de de Rham.
- ¿Aplicaciones al programa de Langlands relativo?

Postre: Dualidad para fibraciones de Hitchin multiplicativas [G.–Morrissey]

- Supongamos que G es *simply-laced* o auto-dual.
- En cualquiera de estos casos, G y $\check{G}$ son isógenos y por tanto $G^{\mathrm{sc}} = \check{G}^{\mathrm{sc}}$.
- Por tanto, los monoides de Vinberg, así como los datos singulares y las bases de Hitchin se identifican.
- Sobre un mismo punto de la base de Hitchin, las fibras de Hitchin para (G, G^{sc}) se relacionan con las del caso $(\check{G}, G^{\mathrm{sc}})$ por medio de transformadas de Fourier–Mukai.
- En el caso que G y $\check{G}$ no son isógenos, se obtiene una dualidad entre una fibración de Hitchin multiplicativa para G y una fibración de Hitchin multiplicativa torcida para $\check{G}$, por medio de *folding* y *cofolding*.

FIN