Fundamentos geométricos de la Mecánica clásica

Introducción a la Geometría simpléctica

Guillermo Gallego Sánchez

Dedekind's Army

22 de febrero de 2017

Mecánica newtoniana

- *Posiciones*: $x \in \mathbb{R}^{3N}$
- *Velocidades*: $\dot{x} \in \mathbb{R}^{3N}$
- *Estado* del sistema mecánico: $(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{6N}$

Principio de determinación

Si conocemos el estado de un sistema mecánico a tiempo t, entonces lo conocemos para todo tiempo anterior y posterior.

Consecuencia matemática:

Ley de Newton

$\exists F : \mathbb{R}^{6N} \longrightarrow \mathbb{R}^{3N}$ tal que $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$.

F «define» al sistema mecánico.

Limitaciones del Principio de determinación

- Dificultad de medir el estado a cierto tiempo. «Solución»: Física estadística.
- Soluciones muy complicadas. «Solución»: Teoría del caos.
- Principio de indeterminación de Heisenberg: «No es posible conocer x y $\dot{x}$ simultáneamente». «Solución»: Física cuántica.

Figura : Este Heisenberg no es

Truco

- No nos gustan las ecuaciones de orden 2. Preferimos un sistema de orden 1.
- Cambio:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = F(x, y) \end{cases}$$

- La ecuación diferencial tiene asociada un campo: $X = (y, F(x, y))$ que es el generador infinitesimal de un flujo $\phi_t(x, y)$ en $\mathbb{R}^{6N}$, que se denomina *flujo de fases*.

Hamiltoniano

- Supongamos que existe una función $H(x,y)$ tal que:

$$\begin{cases} y = \frac{\partial H}{\partial y} \\ F(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

- En tal caso $\frac{dH}{dt} = -F(x,y)\dot{x} + y\dot{y} = -F(x,y)y + yF(x,y) = 0$ y las órbitas serán de la forma $H(x,y) = E$ con E una constante.

Variedades

Figura : *El geógrafo y el naturalista*. Adriaen van Stalbent. Finales del siglo XVI - Principio del siglo XVII. Óleo sobre tabla, 40 x 41 cm.

¿Por qué usar variedades?

- Teoría de la relatividad general $\to$ En general vivimos en un espacio-tiempo curvo.
- Las ligaduras del sistema restringen el movimiento de R^{3N} a una subvariedad suya, por ejemplo:
  - El péndulo simple: $\mathbb{S}^1$.
  - El péndulo esférico: $\mathbb{S}^2$.
  - El sólido rígido: $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$. (Fun fact: $\mathrm{SO}(3) \approx \mathbb{P}^3$).

Espacio de configuración

Ligaduras holónomas

Las ligaduras «buenas» (holónomas), son restricciones (las suponemos independientes) de la forma:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_r(x) = 0 \end{cases}$$

- Por el teorema de la función implícita, las ligaduras definen una variedad diferenciable M de dimensión $m = 3N - r$.
- En física, esta variedad se llama *espacio de configuración* y a su dimensión *grados de libertad*.

Coordenadas generalizadas

- *Dominio de coordenadas*: $U \subset M$ abierto.
- Parametrización: $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow U$ difeomorfismo.
- Coordenadas generalizadas: $q = \varphi^{-1} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
- Velocidades generalizadas: $\dot{q} : T_q M \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
- Estado: $(q, \dot{q}) \in TM$.
- Trayectoria en M:

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & TM \\ t & \longmapsto & (q(t), \frac{d}{dt} q(t) = \dot{q}(t)) \end{array}$$

Mecánica lagrangiana

- Lagrangiano: $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Acción:

$$\begin{array}{rcl} S : \{\text{Trayectorias en } M\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \gamma & \longmapsto & \int_{\gamma^*} L(q(t), \dot{q}(t))dt \end{array}$$

Principio de mínima acción

Las trayectorias reales son las que cumplen $\delta S(\gamma) = 0$.

Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m$$

Momentos canónicos conjugados

- Sistema natural: $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + V(q)$, con $T(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$.
- Momentos canónicos conjugados: $p_i(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(q)\dot{q}_j$. Por tanto: $p_i(q) : T_qM \to \mathbb{R}$ es una forma lineal en T_qM.
- $p_i(q) \in (T_qM)^* = \Lambda^1(T_qM)$.
- $(q, p(q)) \in \Lambda^1(M) = T^*M$

Espacio de fases

- Espacio de fases: $V = T^*M = \Lambda^1(M)$. Es una variedad de dimensión $2m$.
- Coordenadas generalizadas: $q = (q_1, ..., q_m) \in M$.
- Momentos canónicos conjugados: $p = (p_1, ..., p_m) \in T_qM$.
- Estado: $(q, p) \in V$.
- Trayectoria:

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto (q(t), p(t)) \end{aligned}$$

Mecánica hamiltoniana

- Hamiltoniano: $H(q,p) = \left[\sum_{i=1}^{m} p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q})\right]_{\dot{q}=\dot{q}(p)}$.

Ecuaciones de Hamilton

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q,p,t) \\ \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q,p,t) \end{array} \right. \qquad i = 1,\ldots,m$$

- La aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (t,x) & \longmapsto & (q(t),p(t))(x) \end{array}$$

se llama *flujo hamiltoniano*.

Búsqueda de una formulación intrínseca

- Nos centraremos ahora en el de un grado de libertad.
- Hasta ahora, todo dependía de las coordenadas locales.
- Quiero estudiar la estructura geométrica del espacio de fases para hallar una formulación intrínseca de la mecánica.
- En concreto, busco el generador infinitesimal del flujo hamiltoniano, es decir, busco un campo X tal que si γ es una «trayectoria real», $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$.
- La expresión local de dicho campo es:

$$X = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)\frac{\partial}{\partial q} - \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)\frac{\partial}{\partial p}$$

Formas canónicas

- Primera forma canónica: $\alpha = p\mathrm{d}q$.
- Segunda forma canónica: $\omega = \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$
- ω cumple:
  1. Es exacta, luego es cerrada.
  2. Es no degenerada ($\forall \xi\ \exists \eta$ tal que $\omega(\xi, \eta) \neq 0$).
- Una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada se dice *simpléctica*.

El generador infinitesimal del flujo hamiltoniano

- La aplicación:

$$\begin{array}{rcl} J = I^{-1} : T_x V & \longrightarrow & T_x^* V \\ \xi & \longmapsto & \omega(\xi, \bullet) \end{array}$$

  es un isomorfismo lineal.
- El generador infinitesimal del flujo hamiltoniano es $X = I\mathrm{d}H$.

Formulación canónica de la mecánica clásica

- **Definición**: Una *variedad simpléctica* es un par $M := (M, \omega)$, donde ω es una forma simpléctica en M.
- **Proposición**: La aplicación: $J = I^{-1} : T_x M \longrightarrow T_x^* M : \xi \longmapsto \omega(\xi, \bullet)$ es un isomorfismo lineal.
- **Definición**: Sea una función $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$, se define el *campo hamiltoniano asociado a* F como: $X^F = I dF$. Se define el *flujo hamiltoniano* ϕ^F *asociado a* F como aquel generado infinitesimalmente por el campo X^F, es decir:

Ecuación de Hamilton

$$X_x^F = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t^F(x)$$