$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

DEDEKIND'S ARMY PRESENTA

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CATEGORÍAS

GUILLERMO GALLEGO

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
30 NOVIEMBRE 2021, 16:00
MATEMÁTICAS, AULA 117

MÁS INFORMACIÓN EN NUESTRO BLOG:
WWW.DEDEKINDSARMY.GITHUB.IO

Introducción a la teoría de categorías

Guillermo Gallego

Dedekind's Army

30 de noviembre de 2021

Álgebra lineal

- **Espacios vectoriales**: $U, \; V, \; W$...
- **Aplicaciones lineales**:

$$U \longrightarrow V$$

- **Composición**:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\text{lineal}"] \arrow[dr, "\text{lineal}"'] & V \arrow[d, "\text{lineal}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

- **Grupos**: G, H, K...
- **Homomorfismos de grupos**:

$$G \longrightarrow H$$

- **Composición**:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\text{hom.}"] \arrow[dr, "\text{hom.}"'] & H \arrow[d, "\text{hom.}"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Estructuras algebraicas. Anillos

- **Anillos**: A, B, C...
- **Homomorfismos de anillos**:

$$A \longrightarrow B$$

- **Composición**:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{hom.}"] \arrow[dr, "\text{hom.}"'] & B \arrow[d, "\text{hom.}"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Cálculo diferencial

- **Abiertos del espacio euclídeo**: $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^p$...
- **Aplicaciones diferenciables**:

$$U \longrightarrow V$$

- **Composición**:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\text{dif.}"] \arrow[dr, "\text{dif.}"'] & V \arrow[d, "\text{dif.}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Topología

- **Espacios topológicos**: X, Y, Z...
- **Aplicaciones continuas**:

$$X \longrightarrow Y$$

- **Composición**:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{cont.}"] \arrow[dr, "\text{cont.}"'] & Y \arrow[d, "\text{cont.}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Teoría de categorías

Una categoría $\mathcal{C}$ consta de

- **Objetos**: X, Y, Z...
- **Morfismos**:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

- **Ley de composición**:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z, \end{tikzcd}$$

Propiedades de la ley de composición

Además, la ley de composición ha de cumplir:

a) **Propiedad asociativa**: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

b) **Elemento identidad**: Para todo objeto X existe un único morfismo $\mathbf{1}_X : X \to X$ tal que

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{1}_X"] & Y \\
& X. \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Ejemplos de categorías

- $\mathbf{Vect}_k$.
  - Objetos: Espacios vectoriales sobre un cuerpo k.
  - Morfismos: Aplicaciones lineales.
- $\mathbf{Grp}$.
  - Objetos: Grupos.
  - Morfismos: Homomorfismos de grupos.
- $\mathbf{Rings}$.
  - Objetos: Anillos.
  - Morfismos: Homomorfismos de anillos.
- $\mathbf{Cart}$.
  - Objetos: Abiertos en espacios euclídeos.
  - Morfismos: Aplicaciones diferenciables.
- $\mathbf{Top}$.
  - Objetos: Espacios topológicos.
  - Morfismos: Aplicaciones continuas.

Isomorfismos

El concepto de isomorfismo es puramente diagramático:
Un morfismo $f\colon X \to Y$ es un **isomorfismo** si existe otro morfismo $f^{-1} : Y \to X$ tal que

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_Y"] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_X"] & \\ & Y \arrow[r, "f^{-1}"] & X. \end{tikzcd}$$

- Si existe un isomorfismo entre dos objetos X e Y decimos que X e Y son **isomorfos**.
- Una categoría tal que todos sus morfismos son isomorfismos se llama un **grupoide**.
- Un grupoide con un solo objeto es un **grupo**.

Ejemplos de isomorfismos

- Los isomorfismos de $\mathbf{Vect}_k$ son los isomorfismos de espacios vectoriales (las aplicaciones lineales invertibles).
- Los isomorfismos de $\mathbf{Grp}$ (resp. de $\mathbf{Rings}$) son los isomorfismos de grupos (resp. de anillos).
- Los isomorfismos de $\mathbf{Cart}$ son los difeomorfismos.
- Los isomorfismos de $\mathbf{Top}$ son los homeomorfismos.

Problemas de clasificación

- «Ser isomorfos» es una **relación de equivalencia**.
- Dada una categoría $\mathcal{C}$, resolver el **problema de clasificiación** consiste en determinar el «cociente» de los objetos de $\mathcal{C}$ por esta relación de equivalencia.
- Es decir, buscamos una **lista** $\mathbf{L}_{\mathcal{C}}$ tal que:
  - Si X e Y, $X \neq Y$, están en $\mathbf{L}_{\mathcal{C}}$, entonces no son isomorfos.
  - Si X es un objeto de $\mathcal{C}$, entonces existe Y en $\mathbf{L}_{\mathcal{C}}$ con X isomorfo a Y.

Ejemplo de clasificación

- Sea $\mathbf{FinVect}_k$ la categoría cuyos objetos son los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo k y cuyos morfismos son las aplicaciones lineales entre ellos.
- Como es bien sabido, dos espacios vectoriales de dimensión finita son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.
- Por tanto,

$$\mathbf{L}_{\mathbf{FinVect}_k} = \{k^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Functores

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos categorías.
Un **functor** (covariante) $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ es una correspondencia de la forma

$$\mathcal{C}_1 \xrightarrow{\quad F \quad} \mathcal{C}_2$$

$$X \longmapsto F(X)$$

$$f : X \to Y \longmapsto F(f) : F(X) \to F(Y),$$

que respeta la ley de composición,

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad F(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_{F(X)}.$$

Functores contravariantes

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos categorías.
Un **functor contravariante** $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ es una correspondencia de la forma

$$\mathcal{C}_1 \xrightarrow{\quad F \quad} \mathcal{C}_2$$

$$X \longmapsto F(X)$$

$$f : X \to Y \longmapsto F(f) : F(Y) \to F(X),$$

que respeta la ley de composición,

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g), \quad F(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_{F(X)}.$$

Ejemplo: El functor tangente

$$\mathbf{Cart}_* \xrightarrow{\quad T \quad} \mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$$

$$(U \subset \mathbb{R}^n, x \in U) \longmapsto T_x U = \mathbb{R}^n$$

$$f \colon U \to V \longmapsto d_x f \colon T_x U \to T_{f(x)} V,$$

Propiedad clave de los functores

- Un functor preserva diagramas.
- Un functor envía la identidad a la identidad.
- Por tanto, **un functor respeta isomorfismos**:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_Y"] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_X"] & & & F(Y) \arrow[r, "F(f^{-1})"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_{F(Y)}"] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \arrow[dr, "\mathbf{1}_{F(X)}"] & \\
& Y \arrow[r, "f^{-1}"] & X \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{\quad F \quad}"] & & & F(Y) \arrow[r, "F(f^{-1})"] & F(X)
\end{tikzcd}$$

- En particular, si $F(X)$ y $F(Y)$ no son isomorfos, entonces X e Y no son isomorfos.
- **Idea**: Definir functores a categorías donde sea más fácil distinguir objetos.

Ejemplo

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, con $m \neq n$, respectivamente, entonces U no es difeomorfo a V. En particular, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son difeomorfos si $m \neq n$.

En efecto, si U y V fueran difeomorfos, aplicando el functor tangente, $\mathbb{R}^n$ debería ser isomorfo a $\mathbb{R}^m$, ¡pero tienen distinta dimensión!

Otro ejemplo: El grupo fundamental

$$\mathbf{Top}_* \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{Grp}$$

$$(X,x) \longmapsto \pi_1(X,x) = \{\mathbb{S}^1 \to X | 0 \mapsto x\} \,/\text{homotopía}$$

$$f\colon (X,x) \to (Y,y) \longmapsto [\gamma] \mapsto [f\circ\gamma]$$

- $\pi_1(\mathbb{S}^2) = e$,
- $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$,
- Por tanto, la esfera $\mathbb{S}^2$ no es homeomorfa al toro $\mathbb{T}^2$.
- Más generalmente, el grupo fundamental nos permite distinguir las superficies compactas.
- Si eliminas el punto base tienes el **grupoide fundamental**.

Topología algebraica

La topología algebraica busca functores

$$\textbf{Espacios} \longrightarrow \textbf{Estructuras Algebraicas}$$

- **Espacios** es una categoría topológica o geométrica, por ejemplo espacios topológicos, espacios topológicos con punto base, espacios topológicos salvo homotopía, CW-complejos, variedades (posiblemente con estructura adicional), etc.
- **Estructuras Algebraicas** es una categoría algebraica, por ejemplo grupos, grupos abelianos, anillos, módulos, espacios vectoriales, etc.
- En general los objetos de las categorías algebraicas son más fáciles de distinguir que los de las categorías topológicas, lo que nos permite clasificar espacios.
- Algunos ejemplos de estos functores son: el grupo fundamental (π_1), los grupos de homotopía superior (π_k), los grupos de homología singular (H_k), o los anillos de cohomología singular (H^k).

Problemas de móduli

- Ciertos problemas de clasificación tienen una lista **muy grande**.
- Tan grande que ella misma admite una estructura geométrica no trivial.
- Un espacio de estas características es lo que se conoce como un **espacio de móduli** para un cierto problema de clasificación.
- EL ejemplo por antonomasia es clasificar las diferentes estructuras complejas que admite una superficie de género g (equivalentemente, clasificar las curvas proyectivas complejas de género g).
- Otros ejemplos: clasificar estructuras diferenciables, clasificar fibrados, clasificar conexiones que satisfagan cierta ecuación diferencial.

Espacios de móduli

- Un espacio M que, como conjunto, está en biyección con la lista $\mathbf{L}_{\mathcal{C}}$ de una cierta categoría $\mathcal{C}$ es un **espacio de móduli** para el problema de clasificación de $\mathcal{C}$.
- Normalmente queremos algo más: Sería deseable un espacio M tal que hubiera una correspondencia biyectiva, para cualquier otro espacio S,

  $$\{\text{Morfismos } S \to M\} \longleftrightarrow \{\text{Familias de objetos de } \mathcal{C} \text{ parametrizadas por } S\}$$

  Un espacio que cumpla esto último se llama un **espacio de móduli fino** (*fine moduli space*).

Functores representables

- Sea X un objeto de una cierta categoría (localmente pequeña) $\mathcal{C}$. Se define el **functor de puntos de** X como el functor contravariante $\underline{X} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ que asigna
  - a cada objeto S de $\mathcal{C}$, el conjunto de morfismos $\underline{X}(S) = \{S \to X\}$
  - a cada morfismo $f : S \to T$ la aplicación

$$g : T \to X \xmapsto{\underline{X}(f)} g \circ f : S \to X.$$

- Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ se dice **representable** si $F = \underline{X}$ para algún objeto X de $\mathcal{C}$.

Morfismos entre functores

Sean $F, G : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ dos functores entre las categorías $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.
Una **transformación natural** $\eta : F \to G$ es una asignación tal que

- a cada objeto X de $\mathcal{C}_1$ le asocia un morfismo $\eta_X : F(X) \to G(X)$ en $\mathcal{C}_2$,
- para cada morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}_1$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Para functores contravariantes la definición es análoga.

El lema de Yoneda

El **lema de Yoneda** afirma que dado un functor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ y un objeto X de F, hay una correspondencia biyectiva

$$\{\text{Transformaciones naturales } \underline{X} \to F\} \longleftrightarrow F(X).$$

En particular, si $F = \underline{Y}$ para cierto Y, tenemos

$$\{\text{Transformaciones naturales } \underline{X} \to \underline{Y}\} \longleftrightarrow \{\text{Morfismos } X \to Y\}\,.$$

Decimos que esto da una inmersión **plenamente fiel**

$$\mathcal{C} \hookrightarrow \{\text{Functores contravariantes } \mathcal{C} \to \mathbf{Set}\}\,.$$

Vuelta al problema de móduli (1)

- Un espacio M que, como conjunto, está en biyección con la lista $\mathbf{L}_{\mathcal{C}}$ de una cierta categoría $\mathcal{C}$ es un **espacio de móduli** para el problema de clasificación de $\mathcal{C}$.
- Normalmente queremos algo más: Sería deseable un espacio M tal que hubiera una correspondencia biyectiva, para cualquier otro espacio S,

  $$\{\text{Morfismos } S \to M\} \longleftrightarrow \{\text{Familias de objetos de } \mathcal{C} \text{ parametrizadas por } S\}$$

  Un espacio que cumpla esto último se llama un **espacio de móduli fino** (*fine moduli space*).

Vuelta al problema de móduli (2)

- Podemos entender un **problema de móduli** como un functor

$$\begin{aligned} F : \mathbf{Espacios} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ S &\longmapsto \{\text{Familias parametrizadas por } S\}\,. \end{aligned}$$

  Un espacio de móduli fino será entonces un espacio M que represente este functor, es decir, $F = \underline{M}$.
- **Problema**: La mayoría de los problemas de móduli interesantes no son representables, es decir, no admiten un espacio de móduli fino.
- **Posibles soluciones**:
  - Construir **espacios de móduli groseros** (*coarse moduli spaces*), por ejemplo usando la **teoría geométrica de invariantes** (*GIT*) de Mumford.
  - Generalizar la noción de «espacio» para poder incluir ciertos functores «buenos». $\rightarrow$ **stacks**

Espacios de móduli grosero

- Un **espacio de móduli grosero** para un problema de móduli F es un espacio M junto con una transformación natural $\eta : F \to \underline{M}$ tal que
  - Si $*$ es el espacio de un solo punto, $\eta(*)$ es una biyección.
  - Para cualquier otro espacio M' y cualquier otra transformación natural $\eta' : F \to \underline{M'}$, existe una única transformación natural
    $$\xi : \underline{M} \longrightarrow \underline{M'}$$
    tal que $\eta' = \xi \circ \eta$.
- Nótese que en la situación de arriba tenemos una biyección $\mu = \eta'(*) \circ \eta(*)^{-1} : M \to M'$ y podemos recuperar la transformación ξ como $\xi(f) = \mu \circ f$, para cualquier morfismo $f : S \to M$. Para ver que la ξ así construida es, en efecto, una transformación natural basta probar que μ es un morfismo.

Un ejemplo (1)

- Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k.
- Sea S una variedad afín sobre k. Una **familia de endomorfismos parametrizada por** S es un morfismo de k-variedades

$$\varphi : S \longrightarrow \mathrm{End}(E).$$

- Dos familias φ_1 y φ_2 son isomorfas si existe otro morfismo $\psi : S \to \mathrm{GL}(E)$ tal que

$$\varphi_2(s) = \psi(s)\varphi_1(s)\psi(s)^{-1}$$

para todo $s \in S$.

Un ejemplo (2)

- Si S y S' son k-variedades y existe un morfismo $f\colon S' \to S$ entre ellas, a cada familia $\varphi : S \to \mathrm{End}(E)$ le podemos asociar la **familia inducida** $f^*\varphi = \varphi \circ f\colon S' \to \mathrm{End}(E)$.
- Obtenemos un problema de móduli

$$\begin{aligned} \mathbf{Variedades}_k &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ S &\longmapsto \{S\text{-familias}\}/\text{iso.} \\ f\colon S' \to S &\longmapsto f^* : \{S\text{-familias}\}/\text{iso.} \to \{S'\text{-familias}\}/\text{iso.}. \end{aligned}$$

- ¿Existirá un espacio de móduli?

Un ejemplo (3)

- Consideremos la familia

$$\begin{aligned} A : \mathbb{A}^1_k &\longrightarrow \mathrm{End}(k^2) \\ t &\longmapsto A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Si $t \neq 0$, $A(t)$ es semejante a $A(1)$, pero $A(0)$ no lo es.
- Si existiera un espacio de móduli grosero M, habría dos morfismos $\mathbb{A}^1_k \to M$ dados por $t \mapsto A(t)$ y $t \mapsto A(1)$ que coincidirían al restringirlos a $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$.
- Sin embargo, como M es una variedad, ha de ser separado, luego deberíamos tener $A(0) \cong A(1)$, pero esto no es cierto.

Un ejemplo (4)

- Podemos obtener un espacio de móduli grosero si nos restringimos a familias de endomorfismos **diagonalizables**.
- En tal caso, si $n = \dim E$, tenemos $M = \mathbb{A}_k^n$ es un espacio de móduli grosero, con la transformación natural η que a cada S-familia φ le asigna el morfismo $(a_1, \dots, a_n) : S \to k^n$, donde, si $s \in S$, los $a_i(s)$ son los coeficientes del **polinomio característico** de $\varphi(s)$.
- En efecto, supongamos que M' es otro espacio con una transformación natural $\eta' : F \to \underline{M'}$. Tenemos una biyección $\mu : \mathbb{A}_k^n \to N$ y basta demostrar que μ es un morfismo.
- Esto es sencillo de ver teniendo en cuenta que $\psi = \mu \circ \phi$, donde $\psi = \eta'(\mathrm{diag} : \mathbb{A}_k^n \to \mathrm{End}(E))$ y $\phi : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^n$ envía $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a los coeficientes del polinomio $\prod_{i=1}^n (T - \lambda_i)$.

Referencias

- **Referencia "clásica"**: *Categories for the working mathematician*, Saunders Mac Lane. Springer, Graduate Text in Mathematics, **5**. 1971.
- **Referencia "didáctica"**: *Basic Category Theory*, Tom Leinster. arXiv:1612.09375 [math.CT]. 2016.
- **Referencia sobre espacios de móduli**: *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, P. E. Newstead. Tata Institute of Fundamental Research. 2012.