MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

CURSO 2019-2020

COVARIACIÓN INSTRUMENTADA CON GEOGEBRA

INSTRUMENTED COVARIATION WITH GEOGEBRA

ESPECIALIDAD: Matemáticas

APELLIDOS Y NOMBRE: Gallego Sánchez, Guillermo

DNI: 70360966X

CONVOCATORIA: JUNIO

TUTORA: Inés María Gómez Chacón. Departamento de Álgebra, Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas.

Resumen

En este trabajo se presenta una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para un primer tema de funciones en los cursos de la ESO. Se tomará como referencia el marco teórico de la Covariación Instrumentada. En la propuesta se detallan los contenidos tratados así como las capacidades trabajadas. Para el diseño de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se aplica el método de Análisis Didáctico.

Las actividades diseñadas buscan incidir en una visión de las funciones como covariación y se desarrollan usando las capacidades tecnológicas del entorno de geometría dinámica GeoGebra, en particular su versión 3D. Se trata de trabajar también en profundidad la modelización de situaciones físicas y de no perder de vista la génesis histórica del concepto de función. En el texto se realiza además una crítica de los libros de texto comúnmente utilizados en los cursos estudiados, para mostrar cómo éstos habitualmente pasan por alto esta perspectiva histórica.

Palabras clave: Pensamiento funcional, razonamiento covariacional, Covariación Instrumentada, Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, GeoGebra 3D

Abstract

We create a Hypothetical Learning Trajectory for a first introduction to functions at the different levels of the Spanish middle school (ESO). Our theoretical framework will be that of the Instrumented Covariation. In our proposal we detail the contents covered as well as the skills developed. For the design of the Hypothetical Learning Trajectory we apply the method of Didatical Analysis.

The designed activities try to motivate a covariational view of functions and are constructed using the technological features of the dynamic geometry environment GeoGebra, in particular its 3D version. We also try to make a thorough work in the modelization of physical situations and always have in mind the historical origin of the concept of function. In the text we also make a critique of the commonly used textbooks at the levels considered, in order to show how these usually ignore this historical point of view.

Keywords: Functional thinking, covariational reasoning, Instrumented Covariation, Hypothetical Learning Trajectory, GeoGebra 3D

Índice

1. Planteamiento del problema y justificación

La finalidad de este trabajo es el estudio de la enseñanza de las funciones y el desarrollo del pensamiento funcional en los estudiantes de la Educación Secundaria y el Bachillerato así como el diseño de actividades para ayudar a los estudiantes a interiorizar el concepto de función.

Motivación y justificación

La motivación para este trabajo surge en la propia realidad práctica del período del *Prácticum* en un centro de enseñanza, relativo al Máster. Esta realidad mencionada es la de las distintas dificultades que presentan muchos alumnos de las asignaturas de Matemáticas de ESO y Bachillerato para interiorizar el concepto de función y el resto de construcciones asociadas a este concepto que se realizan en estos cursos, como la función inversa, la derivada, la primitiva, etc; así como la forma en la que los distintos libros de texto y demás recursos de la noosfera tratan estos temas.

Con estas construcciones no nos referimos únicamente a otras funciones sino en general a cualquier tipo de «construcción dinámica» asociada a la variación simultánea de varias cantidades. Así, aquí se incluyen otros ejemplos como la propia gráfica de la función, las asíntotas, las rectas tangentes o el área encerrada hasta un cierto punto. Más generalmente, puede considerarse la variación de todas estas construcciones con respecto a parámetros extra, de modo que también sería una construcción dinámica, por ejemplo, los puntos de corte con el eje horizontal. Se trata entonces fundamentalmente de examinar el proceso de comprensión de los alumnos de las construcciones geométricas de carácter esencialmente dinámico, comúnmente asociadas en el instituto a la teoría de funciones, y tratar de construir métodos de enseñanza de estas construcciones.

Hay una importante cantidad de estudios que hacen patente la dificultad que muestra el alumnado para entender el concepto de función y manejar las funciones a varios niveles de la enseñanza en el instituto y en los primeros cursos de la universidad. Algunos de estos estudios vienen explicados en detalle en el artículo de Oehrtman, Carlson y Thompson (2008), que analizan varias formas en las que los estudiantes presentan dificultades a la hora de entender las funciones y también hacen referencia a diversos experimentos y observaciones realizadas para tratar de detectar los puntos concretos que les suponen mayor problema a los estudiantes. Resumimos a continuación algunas de estas observaciones.

En primer lugar, un porcentaje significante de estudiantes de sobresaliente presenta serias dificultades incluso a la hora de entender las funciones como sistemas de entrada-salida. Por ejemplo, Carlson (1998) observó cómo un 43 % de estudiantes de sobresaliente intentaba hallar $f(x+a)$ sumando a al valor $f(x)$. Otros estudiantes también presentaban problemas a la hora de entender las funciones constantes, pensando que éstas no son funciones porque no varían. En general, muchos estudiantes a veces ven las funciones simplemente como dos expresiones separadas por un signo igual (Thompson, 1994), o no son capaces de distinguir entre una función definida algebraicamente y una ecuación (Carlson, 1998). Otras de las debilidades que muestran los estudiantes son pensar que una función definida a trozos es realmente dos funciones o que una función «patológica», como la de Dirichlet (que vale 1 en los números racionales y 0 en los irracionales) no es ni siquiera una función.

Algunos de los experimentos interesantes que podemos mencionar son, por ejemplo, el de Monk (1992), donde se les plantea a los estudiantes el problema de determinar la velocidad en función de la posición en un recorrido que a su vez «parece» una gráfica (ver Figura 1). En respuesta a este tipo de problemas, es habitual que los estudiantes trasladen características del diagrama del recorrido directamente a la gráfica de la función.

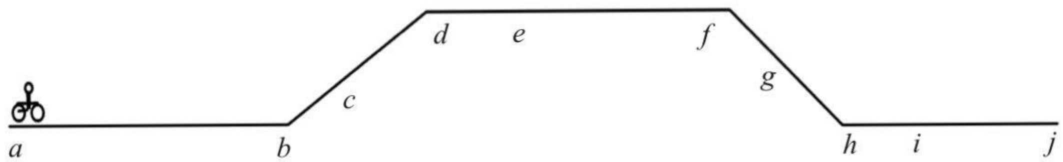


Figura 1: Un problema en el que los estudiantes deben distinguir entre las características visuales de la situación y las características de una gráfica. Fuente: (Monk, 1992).

Otro experimento crucial y que entronca necesariamente con la noción de covariación que vamos a tratar a lo largo del texto es el problema de la botella. En este problema se les pide a los estudiantes que construyan una gráfica de la altura del agua en una botella en función de la cantidad de agua que ésta contiene. Un estudio detallado de los resultados observados al presentar este problema a los estudiantes, en función de las etapas del marco de covariación (ver Tabla 2, en la página 23 de este trabajo), puede leerse en Oehrtman, Carlson y Thompson (2008).

Planteamiento del problema y objetivos

Teniendo en cuenta las debilidades que presentan los alumnos a la hora de entender las funciones, que han sido explícitamente detalladas en varios estudios como los que acabamos de exponer, se pone de manifiesto la necesidad de estudios que:

- Estudien el concepto de función en Matemáticas, su definición formal y la génesis histórica de esta definición.
- Profundicen en el concepto de función desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas, haciendo énfasis en las distintas formas que existen de visualizar las funciones.
- Diseñen actividades que permitan a los estudiantes profundizar sobre el concepto de función y manipular las funciones de forma dinámica.
- Exploren las posibilidades de los entornos de geometría dinámica para el trabajo del pensamiento funcional.

De acuerdo a estas necesidades de investigación se han planteado los siguientes objetivos en este trabajo (ver más ampliamente sección 3):

- Desarrollar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para un primer tema de funciones en la ESO.
- Diseñar esta Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en el marco teórico de la covariación instrumentada propuesto por Arzarello (2019) mediante el manejo de un software de geometría dinámica.

Estos objetivos se operativizarán mediante objetivos específicos que se detallan en la sección 3.

El diseño de las actividades se realizará en la forma de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (Simon, 1995), una potente herramienta de diseño instruccional. Las actividades están planteadas desde el marco teórico de la covariación como estructura del pensamiento funcional (Oehrtman, Carlson y Thompson, 2008), más concretamente, usando la idea de la *covariación instrumentada* introducida por Arzarello (2019).

El entorno de geometría dinámica utilizado será GeoGebra (2018), intentando en particular aprovechar al máximo las capacidades de su graficadora 3D.

Estructura del texto

La memoria que el lector tiene ante sí está compuesta de 6 secciones, siendo ésta la primera sección, en la que se plantea el problema que motiva el trabajo aquí presentado. La sección 2 expone el fundamento teórico del trabajo, en tres partes. En la primera parte se estudia el concepto de función desde el punto de vista de las Matemáticas; concretamente, se explica la definición formal de función y se hace un breve repaso de la historia de esta definición. En la segunda parte, se estudia el concepto de función desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas, centrándonos principalmente en el marco de covariación introducido por Oehrtman, Carlson y Thompson (2008). En la tercera parte se explican las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje de Simon (1995), que constituirán la herramienta de diseño instruccional que usaremos para el diseño de las actividades presentadas. La sección 3 enumera los objetivos concretos del trabajo, a la vista del fundamento teórico previamente desarrollado. La sección 4 detalla la metodología empleada en el diseño de las actividades. En la sección 5 se exponen como resultados las actividades diseñadas para el trabajo de las funciones. Concluimos la memoria en la sección 6, con un análisis de los resultados en función de los objetivos planteados y con una descripción de las limitaciones del estudio y de las futuras líneas de acción, así como con unas conclusiones relativas al desarrollo profesional del autor. Además, se adjuntan en un Anexo los enunciados de las actividades diseñadas.

2. Fundamentación teórica

El concepto de función en Matemáticas

La definición de función

Actualmente, podría decirse que el concepto estándar de función que se maneja dentro de la matemática *erudita* —donde por «matemática erudita» nos referimos al *saber sabio* en el sentido de la teoría de la transposición didáctica de Chevallard (1985)— es el que se define en el marco de la teoría de conjuntos. Esto a día de hoy es ciertamente discutible, pues cada vez es más pujante el papel de la teoría de categorías en la práctica del *matemático trabajador* (Mac Lane, 2013), donde las funciones se entienden esencialmente como morfismos, que son conceptos no definidos. Sin embargo, entendemos que esta perspectiva, aunque goza de gran popularidad en los ámbitos del álgebra y la geometría, no es tan habitual en campos relacionados con el análisis y, en cualquier caso, es la perspectiva de la teoría de conjuntos la que tiene mayor influencia en la enseñanza de las funciones en el instituto.

En teoría de conjuntos, una función se define de la siguiente manera. Dados dos conjuntos X e Y, se entiende por una *función* o una *aplicación* f con *dominio* X y *codominio* Y un conjunto de pares ordenados (x,y), con x un elemento de X e y un elemento de Y de forma que a cada x le corresponde uno y sólo un y, que se denota por $y=f(x)$. Nótese que esta definición es más fina de lo que a primera vista pudiera parecer. Cabe destacar en primer lugar que una función así vista dista bastante de la concepción de función como «fórmula», o incluso como «regla de asignación».

Así, por ejemplo uno puede pensar en la función que a cada número entero le asigna la cantidad de números primos menores que el. Esto es ciertamente una función, pero a día de hoy nadie conoce una fórmula «precisa» que, para cualquier número n, diga cuántos primos hay menores que el y un problema abierto tan importante como es la hipótesis de Riemann tiene mucho que decir al respecto. Más aún, en matemáticas encontramos funciones que sabemos que existen pero para las que podemos no conocer ninguna forma de construirlas; nos referimos por ejemplo a las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales cuya existencia es garantizada por los teoremas de existencia y unicidad.

Por último, como ejemplo extremo podríamos considerar las funciones de elección. Si X es un conjunto y F es una familia de subconjuntos de X, se denomina una *función de elección* a una función *f* con dominio *F* y codominio *X* tal que para cada elemento *x* de *F* se tiene que *f(x)* es un elemento de *x*. Intuitivamente, puede entenderse como una forma de escoger un punto de cada uno de los subconjuntos que forman la familia *F*. La afirmación de la existencia de funciones de elección para conjuntos cualesquiera *X* y *F* es lo que se conoce como el *axioma de elección*. Paul Cohen demostró en 1963 que el axioma de elección es independiente del resto de axiomas de Zermelo-Fraenkel (la teoría de conjuntos estándar en matemáticas), de modo que en general no se puede construir una regla de asignación para una función de elección.

Una mirada histórica al concepto de función

Cuando se estudia la matemática en sí desde un punto de vista *externo,* es decir, cuando se trata de entender las matemáticas desde el punto de vista de la teoría de la ciencia o de la gnoseología, y no desde sus propias categorías; la definición de función que acabamos de presentar (que sin duda es útil y necesaria en toda la matemática moderna) debe entenderse como un *teorema*. Aquí por teorema nos referimos, no al concepto lógico-formal, sino esencialmente a una *verdad científica*, es decir, a una *identidad sintética* —entendida como una confluencia de *cursos operatorios* (Bueno, 1995)—. Así, entendemos que la destilación de una definición tan refinada de función no es resultado de una puntual idea feliz, sino del trabajo y la manipulación del concepto de función por multitud de personas a lo largo de la historia. El concepto de función surge entonces como un producto histórico, que en un momento concreto da solución a una serie de problemas y motiva otros nuevos.

Conviene entonces repasar cuál es la historia de la definición de función y analizar en detalle a qué clase de problemas responde, para tratar de entender cómo surge originalmente este concepto. Un resumen detallado de la historia de la idea de función puede encontrarse en el artículo de Kleiner (1989). Reflejamos aquí a grandes rasgos las principales ideas.

Podría decirse que el concepto moderno de función, de una forma similar a como la entendemos ahora surge en el siglo XVII. Previamente, entre los precursores de este concepto podemos destacar dos. Por una parte, el estudio de la cinemática, principalmente por Galileo, y el planteamiento del problema de Kepler sobre las órbitas de los planetas del Sistema Solar. Por otra parte, entra en juego el vínculo entre el álgebra y la geometría en Fermat y sobre todo en la geometría analítica del sistema cartesiano. Ambos antecedentes asientan el terreno para la llegada de un concepto de función esencialmente *dinámico* y *continuo*, que venga a ser un elemento clave en el estudio del *movimiento*.

El término «función» es introducido en 1692 por Leibniz, aunque para designar algo bastante distinto de lo que entendemos ahora. En general Leibniz entendía por función un objeto geométrico asociado con una curva. Por ejemplo, afirmaba que «una tangente es una función de una curva». Y es que el cálculo, como fue originalmente desarrollado por Newton y Leibniz, tenía un aspecto muy distinto al que se presenta hoy día a los estudiantes, ya que presentaba una forma esencialmente geométrica. Basta abrir los célebres *Principia* para ver que el lenguaje empleado es básicamente el de la geometría euclidiana. El análisis en esta época surgió como un compendio de métodos para resolver problemas relacionados con curvas, como hallar sus tangentes, las áreas que encierran, sus longitudes o las velocidades de los puntos que se mueven en ellas. Así, estos conceptos se originan en un contexto naturalmente *geométrico* y *cinemático*.

Merece la pena ahora centrarse en entender qué papel jugaban las *variables* en esta situación primigenia. Es importante darse cuenta de que entonces las variables aún no se entendían como *variable dependiente* y *variable independiente* sino que las variables se veían como magnitudes *codependientes*. Como afirma Bos (1980), citado por Kleiner (1989), con traducción del autor:

> Las variables no son funciones. El concepto de función implica una relación unidireccional entre una variable «independiente» y una «dependiente». Pero en el caso de las variables como aparecen en los problemas matemáticos o físicos, no hay necesidad de hacer tal distinción. Y mientras no se le dé ningún papel especial independiente a una de las variables implicadas, las variables no son funciones sino simplemente variables. (Kleiner, 1989, p. 2)

Destaca en particular en este punto de vista el hecho de que Newton llamaba a la teoría que él desarrolló, que ahora entendemos como cálculo o análisis, «método de las *fluxiones*». Newton entendía por «*fluxión»* la derivada de una «*fluyente»* (*fluent*, en inglés), donde una «*fluyente*» no era exactamente una función, sino una cantidad o una *variable* que variaba con el tiempo (valga la redundancia). Llama la atención entonces en especial la forma que Newton tenía de formular lo que podríamos llamar «el problema fundamental del cálculo de fluxiones» (entendiendo que su resolución es el teorema fundamental del cálculo infinitesimal): «dada una ecuación que consiste en cualquier número de cantidades que fluyen, hallar las fluxiones: y vice versa» (Newton, 1676).

Dentro de la misma época, sería finalmente Johann Bernoulli el que en 1718 se acercaría de una forma más precisa a la noción de función que tenemos ahora «uno llama aquí función de una variable a una cantidad compuesta de cualquier manera de esta variable y de constantes» (Rüthing, 1984, p.72).

Ya bien entrado el siglo XVIII, en el clásico *Introductio in Analysin Infinitorum*, presentado por Euler en 1748, el concepto de función tendría un papel explícito y central. En el prefacio, Euler afirma que el análisis matemático es *la ciencia general de las variables y de sus funciones*. La noción de función que aquí se presenta tiene un carácter mucho menos geométrico, y es mucho más parecida a como muchas veces se entiende en el instituto: funciones=fórmulas. Más concretamente, Euler define una función de la siguiente forma (la cursiva y la traducción son del autor): «Una función de una cantidad variable es una *expresión analítica* compuesta de cualquier manera de dicha cantidad variable y de números o cantidades constantes» (Rüthing, 1984, p.72).

Sin embargo, nótese que Euler sigue entendiendo las variables como *cantidades variables*, de forma que su definición dista bastante de ser estática o de concebir de alguna forma este tipo de expresiones como una suerte de *aritmética generalizada*, sino que la actividad de fondo es esencialmente una *modelización*. Volveremos sobre estas ideas más adelante.

En cualquier caso, lo que refleja esta definición de Euler es que en el siglo XVIII la noción de función era esencialmente lo que hoy entendemos por función *analítica*. Así, era normal que fuera generalmente aceptado en las matemáticas de la época el siguiente postulado: «Si dos funciones coinciden en un intervalo, entonces coinciden en todas partes».

Precisamente esto llevó a un fuerte debate, principalmente entre Euler, D'Alembert y Daniel Bernoulli en torno al concepto de función, motivado por el conocido problema de «la cuerda de la guitarra». Por este problema nos referimos a, dada una cuerda en vibración, fija a dos extremos, y conocida la deformación inicial, determinar la función que describe la forma de la cuerda a tiempos posteriores. Este es un conocido problema de ecuaciones en derivadas parciales, que consiste en resolver la *ecuación de onda*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

donde a es una constante, sujeta a ciertas condiciones iniciales y de frontera.

Por resumirlo en pocas palabras, esta polémica hizo ver que tenía sentido considerar más funciones a parte de lo que hoy entendemos por funciones analíticas, motivado principalmente porque las diferentes «formas iniciales» que podía tener la cuerda no tendrían por qué estar dadas necesariamente por funciones analíticas. Concretamente, el concepto de función se extendió para incluir funciones definidas a trozos y en general funciones discontinuas. Cabe destacar entonces como en 1755 Euler dio una definición de función bastante diferente a la que había dado antes en su *Introductio* (traducción del autor):

> Cuando ciertas cantidades dependen de otras de forma que, si las segundas cambian las primeras también lo hacen, entonces decimos que las primeras cantidades son funciones de las segundas. Esta noción comprende todas las formas en las que una cantidad puede ser determinada por otras. Por tanto, si x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x en cualquier manera o están determinadas por ella se llaman sus funciones… (Rüthing, 1984, p.72).

Para echar más leña al fuego, más de medio siglo más tarde, en 1807 (aunque publicado en 1822), Fourier desarrolló su célebre trabajo en la conducción del calor, que trajo consigo una auténtica revolución en el concepto de función. Fourier venía a afirmar que «cualquier» función en un intervalo podía representarse como una suma infinita de senos y cosenos.

Dirichlet pronto se dio cuenta de que no se trataba de *cualquier* función, sino que eran necesarias ciertas condiciones. Básicamente, que la función tuviera una cantidad finita de discontinuidades y de máximos y mínimos en el intervalo. Por supuesto, poder demostrar esto con rigor requería de un entendimiento claro del concepto de función y de las nociones de continuidad y convergencia. Este trabajo fue realizado principalmente por Cauchy y Dirichlet. Es Dirichlet el que finalmente da una definición de función muy similar a la actual

> y es una función de la variable x, definida en el intervalo $a < x < b$, si a cada valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable y. Además, es irrelevante de qué forma se establece esta correspondencia (Kleiner, 1989, p. 10).

Esta definición, aunque necesariamente restringida al concepto de función *de los números reales a los números reales* contiene prácticamente ya todos los ingredientes que hacen tan potente la noción de función actual.

Tras el debate entre *intuicionistas* y *formalistas* que se produjo en los albores del siglo XX, concerniente a los fundamentos de las matemáticas, se empezaron a introducir distintos sistemas axiomáticos para formalizar las matemáticas (Ferreirós, 2008). De todas las propuestas, la que logró más popularidad y luego se ha aceptado como estándar a lo largo del siglo XX ha sido la teoría de conjuntos en la axiomática de

Zermelo-Fraenkel, incluyendo el axioma de elección. Este sistema axiomático se suele abreviar como ZFC (Zermelo-Fraenkel + Choice).

La influencia de las ideas del grupo Bourbaki en las ciencias sociales después de la Segunda Guerra Mundial (Aubin, 2008) y la implantación en los años 60 de los programas de la «matemática moderna» como respuesta de los países capitalistas a la aparente supremacía tecnológica de la Unión Soviética sugerida por el lanzamiento del Sputnik han llevado a que sea la definición conjuntista la que ha permeado hasta nuestros libros de texto y la que en última instancia se enseña en nuestro sistema educativo.

En conclusión, lo que queríamos mostrar con esta mirada histórica es que el concepto moderno de función se ha labrado a través de los siglos y es resultado de la resolución de múltiples problemas matemáticos del más alto nivel, con los que han tratado, muchas veces sin éxito, algunas de las mentes más brillantes de cada período de la historia. Consideramos por tanto que una trasposición didáctica que pretenda introducir directamente la definición moderna de función en los niveles básicos del sistema educativo está tal vez pasando por alto muchas de las ideas y problemáticas fundamentales que llevaron a la constitución de esta definición. Por decirlo con Oehrtman, Carlson y Thompson (2008), con traducción del autor:

> La definición moderna de función fue motivada en gran parte por debates entre d'Alembert y Euler sobre la naturaleza de una solución de la ecuación diferencial de la vibración de una cuerda y por los intentos de Cauchy y otros de decidir las condiciones bajo las cuales el límite de una sucesión de funciones continuas es una función continua. Así, usar la definición moderna de función en una introducción al concepto de función es presentarles a los estudiantes una solución a problemas que no pueden concebir. (Oehrtman, Carlson y Thompson, 2008, p. 29).

El concepto de función en la didáctica de las Matemáticas

El papel de las variables. Diferentes enfoques

El concepto de variable algebraica es clave en el desarrollo del pensamiento funcional de los estudiantes. Los diferentes niveles de comprensión del concepto de variable van asociados a diferentes concepciones del álgebra y niveles de abstracción. Existen múltiples marcos teóricos en didáctica de las matemáticas para el tratamiento de las variables; presentamos a continuación dos de ellos, el modelo 3UV y el de "álgebra como modelización".

Modelo 3UV

El modelo 3UV (tres usos de las variables), introducido por Trigueros y Ursini (2003) (citado en Álvarez, Gómez-Chacón y Ursini, 2005) surge en el análisis de las exigencias que se hacen a los estudiantes en los ejercicios típicos de los libros de texto de álgebra. Este análisis muestra que en los cursos de álgebra elemental, las variables presentan esencialmente tres usos: el de incógnita específica, el de número general y el de simbolizar relaciones funcionales. El estudiante de álgebra también se encuentra con una serie de factores en la resolución de problemas, asociados con cada uno de estos usos, que se enumeran a continuación (Álvarez, Gómez-Chacón y Ursini, 2015, pp. 1512-1513):

- La resolución exitosa de problemas con una incógnita requiere:
    1. Reconocer e identificar en una situación la presencia de algo desconocido que puede ser determinado al considerar los datos del problema.
    2. Interpretar los símbolos que aparecen en la ecuación como representando ciertos valores específicos que pueden ser determinados considerando las restricciones dadas.
    3. Sustituir en la variable el valor o valores que hacen de la ecuación una afirmación verdadera.
    4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en la ecuación o en el problema efectuando las operaciones algebraicas y/o aritméticas requeridas.
    5. Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y usarlas para escribir ecuaciones.
- La resolución exitosa de problemas con un número general requiere:
    1. El reconocimiento de patrones, reglas y métodos en sucesiones numéricas y en familias de problemas.
    2. Interpretar un símbolo como representando una entidad general indeterminada que puede tomar cualquier valor.
    3. Deducir reglas y métodos generales distinguiendo los aspectos invariantes de los variables en sucesiones y familias de problemas.
    4. Manipular expresiones generales.
    5. Simbolizar afirmaciones generales, reglas o métodos.

- La resolución exitosa de problemas con variables en una relación funcional requiere:
  1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficos, enunciados verbales o expresiones analíticas).
  2. Determinar los valores de la variable dependiente dado el valor de la independiente.
  3. Determinar los valores de la variable independiente dado el valor de la dependiente.
  4. Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación independientemente de la representación usada.
  5. Determinar el rango de variación de una variable dado el dominio de la otra.
  6. Simbolizar una relación funcional basada en el análisis de los datos de un problema.

Álgebra como modelización

Por otra parte, el contraste entre álgebra *como modelización* y álgebra *como aritmética generalizada* en la matemática escolar se plantea desde las coordenadas de la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD). En palabras de algunos de sus investigadores principales:

> … la institución escolar interpreta generalmente el álgebra elemental como una artimética generalizada, es decir, identifica el álgebra escolar con el uso del simbolismo o «lenguaje algebraico» y lo opone a un supuesto «lenguaje aritmético». […]
>
> Desde la Teoría antropológica de lo didáctico, se postula que el álgebra debe interpretarse como un instrumento genérico de modelización de praxeologías u organizaciones matemáticas. En particular, el álgebra escolar, antes de ser tematizada como objeto explícito de enseñanza, debe utilizarse para profundizar el estudio de determinadas organizaciones matemáticas previamente construidas. (Ruiz, Bosch y Gascón, 2010, p. 546).

Debe tenerse en cuenta que aquí el término *organización matemática* está entendido en el sentido de Chevallard, Bosch y Gascón (1997).

Desde la TAD se critica que la mayoría de los programas de las asignaturas de Matemáticas en la ESO plantean el álgebra como una suerte de *aritmética generalizada*. Esta idea está expresada con detalle en la tesis doctoral de Bolea (2002). Por ejemplo, la autora señala que la introducción al álgebra va siempre ligada a la aritmética, realizando una generalización de un «lenguaje aritmético» a un «lenguaje algebraico», sin hacer énfasis en la relación con el «lenguaje funcional» que aparece en el estudio de las funciones.

Es fácil entender ahora desde aquí, una vez que hemos hecho el repaso de la génesis histórica del concepto de función, por qué esta concepción del álgebra como aritmética generalizada es especialmente perjudicial para la comprensión de las funciones en la matemática escolar. Básicamente, por decirlo en una frase: porque así vistas, *las variables no son variables*. Las variables en esta concepción del álgebra son simplemente letras que bien podrían ser números, privándolas así del significado de lo que realmente están representando. Por ejemplo, si se entiende el álgebra como una aritmética generalizada, no hay ninguna diferencia entre una *variable* y una *constante*, ya que ambas son letras representando un número.

Frente a esta situación, la TAD se plantea el problema de introducir el álgebra «de manera *funcional* esto es, como un *instrumento de modelización*» (Ruiz, Bosch y Gascón, 2010). En ese mismo artículo, los autores proponen una respuesta a este problema a partir del planteamiento de un «proceso de algebrización» en tres etapas, planteado a partir de la manipulación de «Programas de Cálculo Aritmético».

En cualquier caso, no es este el lugar para desarrollar el proceso de algebrización. El argumento de la TAD sobre el que queríamos llamar la atención al lector es el de cómo una buena comprensión de las funciones requiere de una buena comprensión de las variables, que es esencialmente conflictiva con la forma habitual de presentar el álgebra en la matemática escolar.

Covariación

Distintas investigaciones clasifican en varios tipos las posibles visiones conceptuales y patrones de razonamiento involucrados en la forma en que los alumnos tienen de comprender las funciones. Concretamente, Dubinsky y Harel (1992) distinguen una visión de las funciones como *acción* frente a una visión como *proceso*. En sus palabras (traducción del autor):

> Una concepción de la función como *acción* implicaría la habilidad de introducir números en una expresión algebraica y calcular. Es una concepción estática en la que el sujeto tenderá a pensar paso a paso (por ejemplo, una evaluación de una expresión). Un estudiante cuya concepción de función esté limitada a las acciones puede que sea capaz de formar la composición de dos funciones, definidas por expresiones algebraicas, reemplazando la variable, cada vez que aparezca en una expresión, por la otra expresión y después simplificando; sin embargo, los estudiantes

> probablemente serían incapaces de componer dos funciones definidas por tablas o gráficos. (Dubinsky y Harel, 1992, p. 85).

Como bien resaltan Oehrtman, Carlson y Thompson (2008), entre las diversas dificultades que presenta un estudiante con una concepción de función limitada a la visión como acción se encuentra la de confundir una función definida a trozos con varias funciones o creer que diferentes algoritmos deben producir necesariamente funciones distintas. En general, la *visión de acción* dificulta un razonamiento dinámico, porque este requiere la capacidad de operar con todos los pares relacionados de manera simultánea, frente a simplemente realizar cálculos en valores específicos.

Así, los estudiantes que solo poseen una visión de acción de las funciones, ven construcciones esencialmente dinámicas como la gráfica, la composición de funciones o la función inversa de forma estática. Por ejemplo, entenderán la gráfica simplemente como una curva, es decir, como un objeto fijo en el plano; y concebirán la composición y la inversión simplemente como procedimientos algebraicos.

Por otra parte, Dubinsky y Harel (1992) entienden la visión de las funciones como proceso de la siguiente manera:

> Una concepción de la función como *proceso* involucra una transformación dinámica de cantidades de acuerdo a una forma repetible de modo que, dada la misma cantidad original, siempre se producirá la misma cantidad transformada. El sujeto puede pensar en la transformación como una actividad completa que comienza con objetos de cierto tipo, les hace algo, y obtiene objetos nuevos como resultado de lo que se hizo. Cuando un sujeto tiene una concepción de un proceso, puede, por ejemplo, combinarlo con otros procesos o incluso darle la vuelta. Nociones como la inyectividad o la sobreyectividad se hacen más accesibles cuando se refuerza la concepción como proceso del estudiante. (Dubinsky y Harel, 1992, p. 85).

Las ventajas de la visión de proceso se resumen en poder entender la función como un proceso actuando sobre un conjunto de valores a la vez, más que como un algoritmo que dice lo que hacer a un valor concreto. Además, permite entender que aunque una función pueda definirse con reglas diferentes sigue siendo la misma función; por ejemplo, si consideramos f la función «elevar al cuadrado», tenemos

$$f(n)=n^2,$$

pero también

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1).$$

En general, la visión de proceso permite coordinar dinámicamente las variables dependiente e independiente, lo que supone una habilidad de razonamiento esencial para entender construcciones dinámicas como los límites, las derivadas o las integrales definidas.

En la siguiente tabla, extraída de Oehrtman, Carlson y Thompson (2008), con traducción del autor, se resumen las principales características de ambas visiones.

Tabla 1: Funciones entendidas como acción frente a funciones entendidas como proceso. Fuente: Oehrtman, Carlson y Thompson (2008, p. 34), con traducción del autor.

Visión de acción	**Visión de proceso**
Una función está anclada a una regla, una fórmula o un cálculo específico.	Una función es un proceso de entrada-salida generalizado que define una asignación de un conjunto de valores de entrada a un conjunto de valores de salida.
El estudiante debe efectuar o al menos imaginar *cada una de las acciones.*	El estudiante puede imaginar el *proceso completo* sin tener que efectuar cada acción.
La «respuesta» depende de la fórmula.	El proceso es independiente de la fórmula.
El estudiante sólo puede imaginar un valor de entrada o salida a la vez (es decir, x representa un número concreto).	El estudiante puede imaginarse todas las entradas a la vez o «recorrer» un continuo de entradas. Una función es una transformación entre espacios al completo.
La composición es sustituir en x una fórmula.	La composición es la *coordinación* de dos procesos de entrada-salida; la entrada es procesada por una función y su salida es a su vez procesada por una segunda función.
La inversa es algo algebraico (cambiar y por x y luego despejar) o geométrico (reflejar a lo largo de la recta x=y).	La inversa consiste en *darle la vuelta a un proceso* para definir una asignación de un conjunto de valores de salida un conjunto de valores de entrada.
Hallar el dominio y el recorrido es concebido como un problema algebraico (por ejemplo, el denominador no puede ser cero, y el radicando no puede ser negativo).	El dominio y el recorrido se producen al operar y reflexionar sobre el conjunto de todas las entradas y salidas posibles
Las funciones se conciben como estáticas.	Las funciones se conciben como dinámicas.
La gráfica de una función es una figura geométrica.	La gráfica de una función define una asignación específica de un conjunto de valores de entrada a un conjunto de valores de salida.

Varios autores entienden que el desarrollo de un entendimiento de las funciones como proceso va necesariamente ligado a lo que se denomina el *razonamiento covariacional* (Oehrtman, Carlson y Thompson, 2008). Por ilustrarlo con un ejemplo, un estudiante que tenga fuertemente desarrollada la visión de las funciones como proceso puede entender la fórmula $A(s)=s^2$ como una forma de determinar el área de un cuadrado para un conjunto de posibles valores de entrada. Esta persona vería la función como una entidad que acepta cualquier longitud del lado s como entrada para producir el área A como valor de salida. En seguida esta persona se daría cuenta de que, cuando el valor de s aumenta, también aumenta el valor de A. Más aún, podría también notar que al variar s de manera continua el área crece cada vez más rápido e incluso esbozar la gráfica de la función.

El razonamiento covariacional como noción teórica apareció en la literatura a finales de los años 80 del siglo pasado en los trabajos de Confrey y Thompson. Confrey caracterizó la covariación como coordinación de los valores de dos variables cuando éstos varían. Por otra parte, Thompson entendía la covariación en términos del entendimiento de cantidades individuales en variación para después entender varias cantidades variando simultáneamente.

Confrey hizo especial énfasis en la concepción de las funciones como coordinación de dos sucesiones. En sus propias palabras (traducción del autor): «en la aproximación [a las funciones] como covariación, una función se entiende como la yuxtaposición de dos sucesiones, cada una de las cuales es generada independientemente a través de un patrón de valores de los datos» (Thompson y Carlson, 2017, p. 424). Y también: «los elementos y la estructura del dominio y el recorrido son cogenerados a través de acciones simultáneas pero independientes, creando un modelo de función como covariación» (Thompson y Carlson, 2017, p. 424).

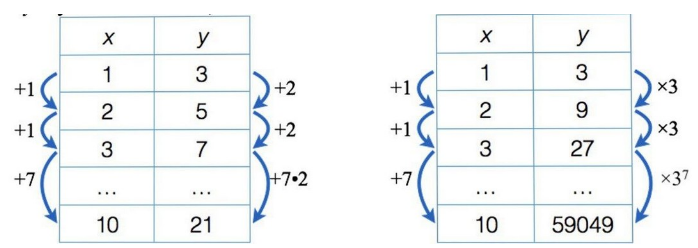


Figura 2: Dos ejemplos de covariación en Confrey: Los cambios en una variable se coordinan con los cambios en la otra. Fuente: (Thompson y Carlson, 2017).

En la Figura 2 podemos ver un ejemplo de razonamiento covariacional tal y como Confrey y Smith lo entendían. La clave está en ver cómo los cambios en una variable (por ejemplo, aumentar el valor de *x* en 1) se coordinan con cambios en la otra variable (por ejemplo, aumentar el valor de *y* en 2 en el caso de la izquierda o multiplicarlo por un factor de 3 en el caso de la derecha).

El punto de vista de Thompson era ligeramente distinto. Thompson estaba interesado en entender la forma en la que los estudiantes conciben distintas situaciones en las que se involucran cantidades y relaciones entre cantidades cuyos valores varían así como la forma en la que los estudiantes entienden la tasa de variación. En cualquier caso, Thompson y Carlson (2017) hacen énfasis en que para Thompson una «cantidad» no es lo mismo que un número. En sus palabras (traducción del autor):

> [Thompson] definió una cantidad como la conceptualización que alguien tiene de un objeto con un atributo que puede medirse. Los números pueden ser medidas de cantidades, o pueden abstraerse de las operaciones de medidas y verse «al desnudo». Pero los números tienen una raíz epigenética en el razonamiento sobre las medidas de las cantidades. […]
>
> En el sistema de Thompson, una persona podría usar un símbolo para representar el valor de una cantidad con tres significados. Si la persona ve la cantidad como si tuviera un valor que no varía nunca, el símbolo, para esa persona, tiene el significado de una constante. Si la persona ve la cantidad como teniendo un valor que puede cambiar entre distintas situaciones, pero que no varía dentro de una situación, el símbolo, para esa persona, tiene el significado de un parámetro. Si la persona entiende que el valor de la cantidad varía dentro de una misma situación, entonces, para esa persona, el símbolo tiene el significado de una variable. (Thompson y Carlson, 2017, p. 425).

En la teoría de Thompson, se entiende que una persona tiene un razonamiento covariacional si es capaz de visualizar los valores de dos cantidades variando y puede visualizarlos variando simultáneamente. Por ejemplo, si la persona está viendo a una persona corriendo, es capaz de visualizar la distancia recorrida y el tiempo transcurrido desde el punto de partida como cantidades que están variando y *también* como cantidades que varían *simultáneamente*.

En resumen, podemos entender la concepción de las funciones como covariación como la capacidad de entender los valores de dos cantidades variando de forma simultánea y de formar con ambos lo que se conoce como un *objeto multiplicativo*. En el siguiente subapartado explicaremos qué es lo que entendemos por un objeto multiplicativo y por qué consideramos que es central en la concepción de las funciones como covariación.

Para concluir el subapartado, presentamos una tabla que resume las distintas etapas de la obtención de una visión de las funciones como covariación.

Tabla 2: Etapas del marco de covariación. Fuente: Oehrtman, Carlson y Thompson (2008, p. 36), con traducción del autor.

Acción mental	Comportamiento
Coordinar la dependencia de una variable con otra variable	• Etiquetar los ejes con indicaciones verbales de la coordinación de las dos variables (por ejemplo, *y* cambia con los cambios en *x*)
Coordinar la dirección de variación de una variable con los cambios en la otra variable	• Construir una línea recta monótona • Verbalizar una noción de la dirección de variación de la variable de salida cuando se consideran cambios en la entrada
Coordinar la cantidad de variación de una variable con los cambios en la otra variable	• Representar puntos/construir rectas secantes. • Verbalizar una noción de la cantidad de variación de la variable de salida cuando se consideran cambios en la entrada
Coordinar la tasa de variación media de la función con incrementos uniformes de variación en la variable de entrada	• Construir rectas secantes para intervalos contiguos del dominio • Verbalizar una noción de la tasa de variación de la variable de salida al considerar incrementos uniformes en la entrada
Coordinar la tasa de variación instantánea de la función con cambios continuos en la variable independiente en todo el dominio de la función	• Construir una curva lisa con claras indicaciones de los cambios en la concavidad • Verbalizar una noción de los cambios instantáneos en la tasa de variación en todo el dominio de la función (la dirección de las concavidades y los puntos de inflexión son correctos)

Objetos multiplicativos

En este subapartado vamos a precisar un poco más alguna de las ideas concernientes a los *objetos multiplicativos*. El énfasis en los objetos multiplicativos para entender la covariación viene dado por Saldanha y Thompson (1998) —traducción del autor—:

> Nuestra noción de covariación es la de alguien que tiene en mente la imagen de los valores de dos cantidades (magnitudes) simultáneamente. Conlleva acoplar las dos cantidades, de modo que, en el entendimiento, se forma un objeto multiplicativo con ambas. (Thompson y Carlson, 2017, p. 433).

La idea de objeto multiplicativo en Saldanha y Thompson bebe de la noción de «y» como un operador multiplicativo, entendida por Piaget como una forma de clasificación subyacente al pensamiento de los niños. En palabras de Thompson y Carlson (2017, p. 433), «una persona forma un objeto multiplicativo a partir de dos cantidades cuando es capaz de unir mentalmente sus atributos para formar un nuevo objeto conceptual que es, simultáneamente, uno y el otro».

Los objetos multiplicativos pueden entenderse también desde un punto de vista lógico-matemático en el contexto de la teoría de categorías. La noción pertinente en este contexto para entender los objetos multiplicativos es la de *producto*. Por supuesto, no se pretende afirmar que la noción de producto en teoría de categorías sea de algún modo equivalente o sustituible por la de objeto multiplicativo en psicología, pero consideramos este enfoque interesante por dos motivos:

1. Porque conecta con una de las estructuras matemáticas más ubicuas (recordando en cierto sentido a las «estructuras fundamentales» que atraían a los bourbakistas).
2. Porque conecta con el enfoque de las «*Matemáticas Conceptuales*» de Lawvere (1991).

En la Sesión 1 de su libro, titulada «Galileo y la multiplicación de objetos», Lawvere (1991) ilustra de diversas maneras la noción de producto con varios ejemplos. De todos estos ejemplos para nosotros resulta especialmente interesante el de «Galileo y el vuelo de un ave», que introduce así:

> Comencemos con Galileo quien, hace cuatro siglos, intentaba descifrar el problema del movimiento. Deseaba comprender el movimiento preciso de una piedra lanzada y el arco elegante del chorro de agua de una fuente. Con el tiempo, Galileo encontró fórmulas simples para estos movimientos, pero su primer paso fue el de encontrar un método conceptual preciso para describir los movimientos en general, incluso uno tan impredecible y caprichoso como el vuelo de un ave. (Lawvere, 1991, p. 1).

En su ejemplo, Lawvere entiende el vuelo del ave como un morfismo

$$\text{Vuelo del ave: Tiempo} \to \text{Espacio.}$$

Ahora, Lawvere observa, con Galileo, que realmente el espacio puede describirse a partir del plano horizontal y el eje vertical. En un lenguaje moderno decimos que es un producto cartesiano

$$\text{Espacio} = \text{Plano} \times \text{Línea.}$$

Junto con esta observación entran en juego dos nuevos morfismos: el que a cada punto del espacio le asigna «su sombra» sobre el plano horizontal

$$\text{Sombra: Espacio} \rightarrow \text{Plano}$$

y el que a cada punto del espacio le asigna su altura sobre el plano horizontal

$$\text{Altura: Espacio} \rightarrow \text{Línea.}$$

Componiendo estos morfismos con el vuelo del ave obtenemos

$$\text{Sombra del vuelo del ave: Tiempo} \rightarrow \text{Plano}$$

$$\text{Altura del vuelo del ave: Tiempo} \rightarrow \text{Línea.}$$

La clave ahora es que podemos hacer el proceso inverso. Por la propiedad universal del producto, a partir de la sombra y la altura del vuelo del ave podemos recuperar completamente el vuelo del ave en el espacio. Diagramáticamente,

$$\begin{tikzcd}
& \text{Tiempo} \arrow[dl, "\text{Sombra del vuelo del ave}"'] \arrow[d, dashed, "\text{Vuelo del ave}"] \arrow[dr, "\text{Altura del vuelo del ave}"] & \\
\text{Plano} & \text{Espacio} \arrow[l, "\text{Sombra}"'] \arrow[r, "\text{Altura}"] & \text{Línea.}
\end{tikzcd}$$

Por si aún no es del todo evidente, en este ejemplo queda claro cómo esta noción de producto está en la génesis misma del concepto de función. Aquí además queda claro como surge la noción de covariación tal y como la entienden Saldanha y Thompson (1998), ya que precisamente lo que se está haciendo es considerar dos cantidades variando simultáneamente, la sombra y la altura, y construir a partir de ellas un objeto multiplicativo, el vuelo del ave, que en cierto sentido engloba a las dos a la vez.

Finalmente, por decirlo con Oehrtman, Carlson y Thompson (2008) —traducción del autor—:

> La idea de la covariación es fundamentalmente la de las funciones paramétricas. Cuando uno se imagina recorriendo los valores de una de las variables mientras

sigue el rastro de los valores de otra variable, uno está esencialmente imaginando la función paramétrica $(x,y) = (f(t),g(t))$. (Oehrtman, Carlson y Thompson, 2008, p. 38).

Covariación instrumentada

Arzarello (2019) ha propuesto recientemente la idea de la *covariación instrumentada*, que consiste en el diseño de situaciones didácticas —en el sentido de Brousseau (1998)— que permitan a los estudiantes desarrollar una concepción de las funciones como covariación. El autor además hace énfasis en el papel que pueden jugar las nuevas tecnologías en el desarrollo de estas situaciones didácticas, especialmente los entornos de geometría dinámica, como GeoGebra.

Lo que se pretende hacer entonces en este trabajo es diseñar una actividad que induzca a los estudiantes ideas relacionadas con la covariación. En particular, se trata de simular variables y funciones usando las distintas herramientas que ofrecen los entornos de geometría dinámica y hacerlas interactuar entre sí.

En las actividades planteadas se hará especial énfasis en la noción de objeto multiplicativo y en ver de qué distintas maneras es posible integrar varias variables que co-varían en un solo objeto. Como hemos explicado ya, la noción de objeto multiplicativo está en el corazón de la covariación.

Análisis de los libros de texto

Nos interesa ahora comprobar qué clase de trasposición didáctica del concepto de función es la que presentan los libros de texto. Es decir, vamos a contrastar y a analizar detenidamente las distintas definiciones de función e introducciones a este concepto que se dan en estos libros. A la hora de estudiar un texto en concreto, nos haremos las siguientes preguntas:

- ¿Se da la definición rigurosa del concepto de función?
- ¿Se explica o hace referencia a la génesis histórica del concepto de función?
- ¿Se conciben las variables como la modelización de cantidades que varían?
- ¿Se presenta una noción dinámica de las variables?
- ¿Se presenta una visión de covariación de las funciones?

El curso más temprano del currículum de la Educación Secundaria(MECD, 2014) en el que los alumnos españoles entran en contacto con la noción de función es el primero de todos, 1º de ESO. Vamos a empezar entonces por consultar un libro de texto de este curso. Concretamente, abrimos el texto de la Editorial Bruño, que introduce las funciones en su capítulo 14 llamado «Funciones, tablas, gráficas y probabilidad». El capítulo comienza con una sección dedicada a las coordenadas cartesianas. Es en su sección 2, llamada «Funciones: Interpretación de gráficas», donde primeramente se introducen las funciones. Al principio de la sección se plantea una situación en la que se representa en una gráfica la paga de una niña a lo largo de la semana. Lo primero que aparece aquí que podríamos considerar como una definición de función es lo siguiente

> Una tabla de valores es una función lineal o de proporcionalidad directa si los valores son directamente proporcionales. La constante de proporcionalidad directa se calcula al dividir una cantidad cualquiera de la 2ª magnitud entre la cantidad correspondiente de la 1ª magnitud.

En este caso esta forma de introducir las funciones sí que es respetuosa con la génesis histórica de la noción. Además se comienza por el ejemplo más sencillo de función, que son las funciones lineales, y no que se da una definición abstracta incomprensible a ese nivel. Cabe notar también que aquí necesariamente se están entendiendo las variables como una *modelización de cantidades que varían*, ya que es así como se introducen cuando se estudia el tema de proporcionalidad, y no como una aritmética generalizada.

Aunque la noción de variable va necesariamente ligada al concepto de función, el mismo libro no hace por conectar las tres nociones: proporcionalidad, variables y funciones. Esto es así puesto que, en el capítulo 9, titulado «Ecuaciones de 1er grado», la introducción de las variables es la de una *aritmética generalizada*.

Por cambiar de editorial y de curso, podemos consultar ahora el texto de la Editorial Anaya para la asignatura «Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas» de 3º de ESO. En primer lugar, resulta interesante que en la primera página del capítulo se incluyen tres recuadros comentando la historia del concepto de función. El primero de ellos trata de los «primeros acercamientos» a dicha noción, comentando cómo ya los antiguos astrónomos manejaban tablas de datos y obtenían relaciones entre variables. Los demás recuadros centran la atención en la figura de Galileo y finalmente atribuyen a Euler la «definición rigurosa» de función.

En la siguiente página incluyen unos párrafos introductorios sobre el concepto de función y sobre la forma de presentar las funciones. Antes de continuar, huelga decir que estas primeras páginas suelen ser las que en la práctica nunca se leen en clase ni en casa. Sin embargo, en esta introducción se da una primera «definición», pragmática, de función bastante acorde con su historia: «Las funciones son objetos matemáticos muy útiles para expresar la relación que existe entre dos o más variables». Lo interesante de esta definición es que no introduce la artificiosa distinción entre variables *independientes* y *dependientes*.

Cambiamos de etapa para ver de qué manera se introducen las funciones en Bachillerato. Consultamos el texto de Matemáticas I del itinerario de ciencias de la Editorial Bruño. La definición es esencialmente «la de siempre»: «Una función es una relación entre dos variables de forma que a cada valor de la variable independiente, *x*, le corresponde un único valor de la variable dependiente, *y*». Resulta cómico de todas formas cómo en la primera página del capítulo dedicado al estudio de las funciones («8. Funciones»), a modo de introducción aparece el siguiente texto, que da una definición autorreferencial del concepto de función (la cursiva es del autor): «Las funciones estudian las relaciones entre dos magnitudes, de forma que se puede determinar el comportamiento de una de ellas *en función* de la otra».

Vamos a tomarnos ahora el lujo de pararnos a estudiar algunas de las definiciones de función que se dan en los cursos de matemáticas del primer año de universidad. Para ello, vamos a consultar dos de los manuales clásicos archiconocidos y usados en algún momento de su primer año de carrera por todos los estudiantes universitarios de ciencias e ingeniería. Nos referimos a los *Calculus*, el de Spivak y el de Apostol.

El libro de Spivak es prácticamente «matemático» y es sin duda una lectura muy agradable para cualquiera que sepa matemáticas. Sin embargo, sus propiedades didácticas hacia alguien que no sea un matemático o un estudiante de matemáticas son cuestionables. Spivak por supuesto presenta la definición «bourbakista» de función, algo que es totalmente razonable si se entiende a qué público va dirigido el libro.

El libro de Apostol es mucho más interesante desde nuestro punto de vista. Para empezar, en su prólogo Apostol afirma lo siguiente:

> Parece que no hay acuerdo sobre lo que ha de constituir un primer curso de Cálculo y Geometría Analítica. Unos sostienen que el camino verdadero para entender el Cálculo principia con un estudio completo del sistema de los números reales desarrollándolo de manera lógica y rigurosa. Otros insisten en que el Cálculo es ante todo un instrumento para los ingenieros y físicos; y por consiguiente, que un curso debe llevar a las aplicaciones del Cálculo apelando a la intuición, para después, por el ejercicio en la resolución de problemas, alcanzar destreza operatoria. En ambos puntos de vista hay mucha parte de razón. El Cálculo es una ciencia deductiva y una rama de la Matemática pura. Al mismo tiempo es muy importante recordar que el Cálculo tiene profundas raíces en problemas físicos y que gran parte de su potencia y belleza deriva de la variedad de sus aplicaciones. […]
>
> La disposición de este libro ha sido sugerida por el desarrollo histórico y filosófico del Cálculo y la Geometría Analítica. Por ejemplo, se estudia la integración antes de la

> diferenciación. Aunque esta manera de ordenar la materia del curso sea poco frecuente, es históricamente correcta y pedagógicamente adecuada. Además, es el mejor camino para hacer patente la verdadera conexión entre la derivada y la integral.

Este libro, lejos de ser un libro de historia de las matemáticas es un ejemplo de cómo, aunque sea a nivel universitario, puede conjugarse una introducción rigurosa al análisis matemático con una buena perspectiva histórica que no pierda de vista el origen de los conceptos trabajados. Por eso, aunque la definición formal de función que da en la página 63 es la «bourbakista», al menos no introduce esta definición «como si hubiera salido de la nada».

Finalmente, por hacer algo de contraste, vamos a ver cómo se transmite el concepto de función, si es que se transmite de alguna manera, en un libro que no es de matemáticas, sino de física. El libro que hemos tomado como ejemplo es también uno de los clásicos del primer año de universidad, *Física* (para científicos e ingenieros, en el original en inglés), de Tipler.

A mi juicio en este libro la noción de función se presenta, de forma más o menos implícita, en el capítulo 2, titulado «Movimiento en una dimensión». Para empezar, merece la pena notar que, como hemos explicado antes, es precisamente en este contexto en el que se origina el concepto de función. Este capítulo comienza presentando la velocidad desde ejemplos con los que los estudiantes están familiarizados. Lo bueno cuando se consideran este tipo de ejemplos, es que no se impone necesariamente una independencia del tiempo respecto de la posición, sino que lo que existe es una codependencia entre ambas variables (más aún, aunque resulte irrelevante para los argumentos que se quieren dar aquí, la realidad física nos da la razón, ya que según la teoría de la relatividad el tiempo, lejos de ser una «variable independiente», no es sino otra de las dimensiones del «espacio-tiempo»).

Más adelante, tras haber trabajado en varios ejemplos las relaciones entre las variables posición y tiempo, se presenta una primera «función»:

> En la figura se muestra un gráfico de x en función de t para un movimiento arbitrario a lo largo del eje x. Cada punto de la curva tiene un valor de x que localiza la partícula en un tiempo determinado y un valor t que representa el tiempo en el que la partícula estaba en dicha posición.

Es en este contexto donde el concepto de función se les aparece a los estudiantes casi como una necesidad natural en su estudio. Otra de las ventajas de introducir así las funciones es que la «regla de la recta vertical», por la cual a cada valor de la variable independiente sólo le puede corresponder un valor de la variable dependiente, aquí está clara: una partícula puede pasar dos veces por el mismo sitio, pero no puede estar en dos sitios a la vez.

Reunimos las observaciones que hemos realizado en los distintos libros considerados, respondiendo a las preguntas planteadas al inicio de este subapartado, en la siguiente tabla:

Pregunta	Bruño ESO	Anaya	Bruño Bach.	Spivak	Apostol	Tipler
¿Se da la definición rigurosa del concepto de función?	**Sí**	**Sí**	**Sí**	**Sí**	**Sí**	**No**
¿Se explica o hace referencia a la génesis histórica del concepto de función?	**No**	**Sí**	**No**	**No**	**Sí**	**No**
¿Se conciben las variables como la modelización de cantidades?	**Sí**	**Sí**	**No**	**No**	**Sí**	**Sí**
¿Se presenta una noción dinámica de las variables?	**No**	**No**	**No**	**No**	**No**	**Sí**
¿Se presenta una visión de covariación de las funciones?	**No**	**No**	**No**	**No**	**No**	**Sí**

Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje

Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) constituyen una herramienta de diseño instruccional planteadas desde una perspectiva constructivista por Simon (1995). Lo que se pretende con las THA es que los profesores, investigadores y desarrolladores del currículum diseñen y utilicen distintas tareas matemáticas para promover la enseñanza de determinados conceptos.

La elaboración de una THA consiste en realizar una predicción de cómo se desarrollará el aprendizaje de los alumnos de un cierto contenido de matemáticas en función de sus conocimientos previos y en diseñar tareas que faciliten este aprendizaje. Según Simon (1995), una THA se construye en torno a tres elementos:

- el objetivo de aprendizaje,
- las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje y
- las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje.

El uso del término «trayectoria *hipotética*» se debe a que lo que se realiza es una predicción de la trayectoria real de aprendizaje, que luego puede ser distinta. En palabras de Simon (1995) —con traducción del autor—:

> Consideremos que has decidido dar la vuelta al mundo en barco para visitar lugares que no has visto nunca. Uno no hace esto al azar (por ejemplo, ir a Francia, luego a Hawaii y luego a Inglaterra), pero tampoco hay un itinerario determinado. Más bien, adquirirías el mayor conocimiento posible relevante para planear tu viaje. Entonces elaboras un plan. Inicialmente podrías planear la excursión entera o sólo una parte. Sales a navegar de acuerdo a tu plan. Sin embargo, debes ajustarte constantemente a las condiciones que vas encontrando. […] El camino que viajas es tu «trayectoria». El camino que anticipas a cualquier punto es tu «trayectoria hipotética». (Simon, 1995, p. 136).

La analogía sugiere que en una THA el profesor no siempre persigue una sola meta a la vez o que sólo se considera una trayectoria. Más bien, de lo que se trata es de tener en cuenta la importancia de que haya una meta y unas decisiones de enseñanza planeadas de forma racional. Lo que sugiere la noción de THA más concretamente es que el desarrollo del proceso de enseñanza hipotético y el desarrollo de las actividades de aprendizaje tienen una relación de retroalimentación, como se indica en la Figura 3.

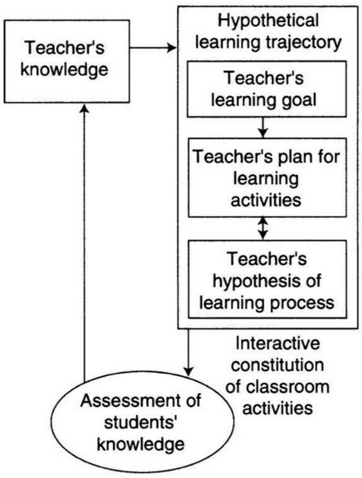


Figura 3: El ciclo de enseñanza.
Fuente: Simon (1995)

Gómez y Lupiáñez (2007) sugieren que las THA pueden utilizarse para el diseño de unidades didácticas, mediante el método que ellos denominan *análisis didáctico*. En sus palabras: «el análisis didáctico es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje». El análisis didáctico consta de cuatro partes: el *análisis de contenido*, el *análisis cognitivo*, el *análisis de instrucción* y el *análisis de actuación*. Nosotros sólo nos centraremos en las dos primeras partes de este procedimiento. En el análsis de contenido, el profesor selecciona los significados de un procedimiento matemático relevantes para la planificación de la instrucción. En el análisis cognitivo, los docentes deben realizar hipótesis acerca de la capacidad de progreso de los estudiantes en el desarrollo de la instrucción. Gómez y Lupiáñez (2007, p. 84) proponen cinco elementos en los que la descripción del progreso de los estudiantes debe fundamentarse:

1. las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción,
2. las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción,
3. las tareas que conforman la instrucción,
4. las dificultades que los escolares pueden encontrar al abordar estas tareas, y
5. las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

Para Gómez y Lupiáñez (2007), la noción de *capacidad* tiene una definición precisa: «utilizamos este término para referirnos a la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo tarea. […] Afirmaremos que un individuo ha desarrollado una cierta capacidad cuando él puede resolver tareas que la requieren».

Los dos primeros elementos del análisis didáctico requieren recopilar información acerca de lo que los estudiantes son capaces de hacer antes del proceso de enseñanza y aprendizaje y de lo que se espera que ellos sean capaces de hacer después. Para poder vincular la planificación a nivel local y a nivel global, Gómez y Lupiáñez (2007) sugieren considerar la noción de *competencia*, en línea con las ideas propuestas en el Proyecto PISA (OCDE, 2004).

En este trabajo va a diseñarse una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para el trabajo del concepto de función. Para el diseño seguiremos el método del análisis didáctico propuesto por Gómez y Lupiáñez (2007). Queremos entonces diseñar y organizar una serie de actividades para trabajar las funciones que posteriormente pueda llevarse al aula y corregirse en base al trabajo desarrollado por los estudiantes.

(Página intencionadamente en blanco)

3. Objetivos

Nuestro trabajo consiste en el desarrollo de una propuesta para trabajar el concepto de función en varios cursos de Secundaria. Exponemos a continuación los objetivos generales y específicos que pretendemos alcanzar:

Objetivos generales

- Desarrollar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para un primer tema de funciones en la ESO.
- Diseñar esta Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en el marco teórico de la covariación instrumentada propuesto por Arzarello (2019) mediante el manejo de un software de geometría dinámica.

Objetivos específicos

- Desarrollar una concepción de las variables como la modelización de cantidades físicas (o de otra índole) que varían.
- Fomentar el uso de las variables como simbolización de relaciones funcionales (entendido en el marco de la teoría 3UV).
- Trabajar las diferentes formas que existen para determinar una función (expresiones analíticas, gráficas y tablas de valores) y las relaciones entre ellas.
- Transmitir cuál es el sentido físico de la «regla de la recta vertical» y mostrar que en ciertas situaciones puede ser interesante considerar «funciones generalizadas» que no cumplan esta regla.
- Fomentar una visión de las funciones como proceso.
- Fomentar una visión de las funciones como covariación.
- Trabajar la construcción de objetos multiplicativos a partir de la co-variación de varias variables.
- Trabajar con familias de funciones dependientes de un parámetro y conseguir englobarlas y visualizarlas en un objeto multiplicativo.

Para el desarrollo de esta THA nos serviremos del método de análisis didáctico de Gómez y Lupiáñez (2007). Idealmente, para el desarrollo de una THA se requeriría una larga experiencia en el aula, un análisis previo del alumnado y una readaptación de la trayectoria a medida que el alumnado avanza en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este trabajo es necesario simplificar este procedimiento, centrándonos sólo en las dos primeras partes del análisis didáctico, como hemos explicado antes. Así, asumiremos algunos conocimientos previos genéricos esperables de los alumnos al nivel que trabajemos, en base al currículum (MECD, 2014), y sugeriremos algunas reconfiguraciones de la trayectoria propuesta según algunos casos que anticipamos que podrían darse.

4. Metodología

En esta sección vamos a describir la metodología a seguir en este trabajo. Siguiendo el método de análisis didáctico de Gómez y Lupiáñez (2007), realizaremos en primer lugar un análisis de los contenidos a trabajar, seguido de un análisis cognitivo, que tendrá en cuenta las capacidades previas necesarias y las capacidades que se desean desarrollar. Concluimos la sección con una descripción del material que se pretende utilizar para el diseño de las actividades, concretamente, especificaremos qué software de geometría dinámica vamos a emplear y con qué fin.

Análisis de contenido

Como ya hemos explicado antes, el tema de funciones aparece en todos los niveles de la Educación Secundaria y Bachillerato y diversas trayectorias de aprendizaje podrían diseñarse para cualquiera de sus cursos. Sin embargo, no queremos acogernos a los contenidos concretos de uno de los cursos concretos, ya lo que queremos es trabajar de forma genérica la concepción que tienen los estudiantes de las funciones, sin necesidad de profundizar en los contenidos curriculares concretos como puede ser el estudio de la continuidad, la monotonía, la derivabilidad, etc. Así, los contenidos trabajados en esta THA serán unos contenidos genéricos relativos a las funciones, para enseñarse en un primer tema de introducción a las funciones en la ESO y que podemos seleccionar de los programas de las distintas asignaturas de Matemáticas que se presentan en el currículum (MECD, 2014).

Concretamente, presentamos a continuación una lista de los contenidos curriculares que se quieren trabajar:

- El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula).
- Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
- Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.
- Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.

- Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
- Estudio de otros modelos funcionales y descripción de sus características, usando el lenguaje matemático apropiado. Aplicación en contextos reales.
- Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
- Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.
- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.

Como se ha afirmado antes, esta lista de contenidos es una selección de entre todos los cursos de la ESO de los contenidos concernientes al temario de funciones tal y como aparecen en el currículum oficial (MECD, 2014).

Análisis cognitivo

Capacidades previas

Puesto que las funciones se empiezan a estudiar ya en 1º de ESO, las capacidades previas que asumiremos serán las relativas a estos niveles. Concretamente, partiremos de la base de que el alumno tiene familiaridad con el concepto de proporcionalidad (inversa y directa) y que ha estudiado los conceptos básicos del álgebra. También es conveniente, aunque no necesario, para tener un abanico más amplio de ejemplos con los que trabajar, tener una base de geometría, concretamente, conocer las técnicas de cálculo de áreas y perímetros para formas geométricas sencillas, que se estudia ya en 1º de ESO.

En cualquier caso, la trayectoria propuesta es fácilmente adaptable a diferentes niveles de la educación secundaria, de modo que pueden modificarse ligeramente las capacidades previas para incluir tareas similares pero que requieran de alguna capacidad más. Nos referimos por ejemplo al trabajo con funciones trigonométricas como un caso posible de función con el que tratar (y en consecuencia, por ejemplo, al manejo de circunferencias), que requieren conocimientos previos de trigonometría básica.

Capacidades a desarrollar

En cuanto a las capacidades a desarrollar, de forma similar a como hicimos con el contenido, haremos una selección de los estándares de aprendizaje planteados en los temas relativos a las funciones de los distintos cursos de la ESO, tal y como vienen descritos en el currículum oficial (MECD, 2014).

Por otra parte, de acuerdo con el marco teórico que hemos expuesto previamente, consideraremos otro tipo de capacidades, no necesariamente curriculares, sino complementarias con estas y asociadas a una perspectiva covariacional de las funciones (siguiendo el marco de covariación y de la visualización de las funciones como proceso, y centrándonos en la idea de objeto multiplicativo) y a una concepción de las variables como herramienta de simbolización funcional y de modelización (siguiendo las propuestas de la teoría 3UV y de la TAD). Englobaremos esta serie de capacidades con la etiqueta de *capacidades asociadas al marco teórico* para distinguirlas de las capacidades que están incluidas de forma explícita en el currículum.

A) Enumeramos a continuación las **capacidades curriculares** a desarrollar:

1. Pasar de unas formas de representación de una función a otras y elegir la más adecuada en función del contexto.
2. Reconocer si una gráfica representa o no una función. (Desde nuestro punto de vista, más bien: «Conocer y saber aplicar la "regla de la línea vertical"»).
3. Interpretar una gráfica y analizarla, reconociendo sus propiedades más características.
4. Reconocer y representar una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtener la pendiente. Obtener la ecuación a partir de la tabla de valores o de la gráfica.
5. Escribir la ecuación correspondiente a la relación lineal existente entre dos magnitudes y representarla.
6. Representar gráficamente funciones polinómicas de grado dos y describir sus características.

7. Identificar y describir situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones lineales o cuadráticas, estudiarlas y representarlas, usando medios tecnológicos cuando sea necesario.

B) Enumeramos ahora las **capacidades asociadas al marco teórico**:

1. Ser capaz de utilizar las variables para modelizar cantidades físicas o, en general, cantidades que aparecen en situaciones de la vida cotidiana en un estado de variación. (Esta capacidad está por supuesto altamente relacionada con la capacidad A7).
2. Simbolizar relaciones funcionales por medio de variables a partir de los datos de un problema.
3. Dominar las diferentes formas de determinación de una función (expresiones analíticas, gráficas y tablas de valores) y las relaciones entre ellas. (Coincide con la A1).
4. Entender el sentido físico de la «regla de la recta vertical» y saber cómo y cuándo hay que aplicar dicha regla. (Coincide con la A2).
5. Visualizar las funciones como un proceso de entrada-salida que define una asignación «simultánea» de un conjunto de valores de entrada a un conjunto de valores de salida.
6. Coordinar la variación de dos variables en la construcción de un objeto multiplicativo.

Material

Siguiendo las propuestas de Arzarello (2019) el material principal usado en las actividades que diseñemos para nuestra Trayectoria Hipotética de Aprendizaje será un entorno de geometría dinámica, concretamente GeoGebra.

Un entorno de geometría dinámica es un programa informático que permite crear y manipular construcciones geométricas. En la mayoría de este tipo de programas, uno puede empezar una construcción definiendo unos pocos puntos y usarlos para construir nuevos objetos como líneas, círculos u otros puntos. Tras hacer una construcción, los puntos con los que se empezó pueden moverse y la construcción cambia acordemente; de ahí el nombre «geometría *dinámica*». Creo que no hace falta resaltar el hecho de que la idea de covariación está arraigada en la propia esencia de cualquier entorno de geometría dinámica.

GeoGebra (2018) es un software de matemáticas que a día de hoy incluye herramientas aptas «para todo nivel educativo» y que «reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculos», según se afirma en su página web. Originalmente, GeoGebra fue planteado como un entorno de geometría dinámica (DGE) en el trabajo de fin de máster de Hohenwarter (2002). En los años siguientes, GeoGebra ganó varios premios internacionales y se hizo muy popular en todo el mundo. Desde entonces, se han incorporado muchas características como la capacidad de trabajar con figuras en 3D (GeoGebra 3D) o un sistema de álgebra computacional (CAS).

Se trata entonces entonces de desarrollar una serie de actividades guiadas para los estudiantes en las que manipulen varios objetos en GeoGebra, tanto en las versiones 2D como 3D. En particular, unos de los objetos clave que queremos que manipulen son los *deslizadores*. Entendemos que los deslizadores ofrecen una buena forma de modelizar y visualizar las variables, especialmente en las versiones modernas de GeoGebra que permiten hacerlos moverse automáticamente.

Los dos motivos por los que hemos decidido emplear GeoGebra para el desarrollo de las actividades aquí planteadas frente a otros DGEs han sido su popularidad y el hecho de que, aunque, de acuerdo con la definición que da la *Free Software Foundation* (2019), no sea estrictamente software libre —«concretamente, la documentación, paquetes de idioma e instalador se distribuyen con una licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0, que no permite distribuir modificaciones ni su uso en aplicaciones comerciales» (Abánades, Botana, Escribano y Tabera, 2009)—, el motor que realiza los cálculos sí que lo es (tiene una licencia GNU GPL) y en cualquier caso es un software gratuito y de código abierto. En cuanto a la popularidad de GeoGebra, merece la pena destacar que entre los muchos idiomas a los que se encuentra traducido se encuentran, a parte del español, todas las lenguas oficiales del estado, lo que lo hace especialmente interesante para su uso en el sistema educativo español. Por otra parte, existen muchos argumentos a favor del uso exclusivo de software libre en la educación, por ejemplo, reproducimos aquí las palabras de la FSF (2016):

> La libertad del software asume un rol de fundamental importancia en el ámbito educativo. Las instituciones educativas de todos los niveles deben utilizar y enseñar exclusivamente software libre porque es el único que les permite cumplir con sus misiones fundamentales: difundir el conocimiento y enseñar a los estudiantes a ser buenos miembros de su comunidad. El código fuente y los métodos del software libre son parte del conocimiento humano. Al contrario, el software privativo es conocimiento secreto y restringido y, por lo tanto, se opone a la misión de las instituciones educativas. El software libre favorece la enseñanza, mientras el software privativo la prohíbe.

(Página intencionadamente en blanco)

5. Resultados

Procedemos ahora a analizar los resultados del trabajo realizado. Vamos a describir las tareas diseñadas y los motivos por los que se han diseñado de esta manera. Los enunciados de las tareas al completo se encuentran en el Anexo. Dentro de cada actividad, en el subapartado correspondiente a capacidades detallamos qué ejercicio dentro de cada actividad va asociado al desarrollo de qué capacidades curriculares y asociadas al marco teórico.

Actividad 1: De viaje por la A-1

Motivación

Las funciones lineales constituyen el primer ejemplo de función que los estudiantes trabajan con profundidad a lo largo de su carrera académica. Especialmente en primero de ESO, este tipo de funciones se presentan en gran proximidad temporal al álgebra elemental y a la teoría de proporcionalidad, constituyendo realmente estas tres unidades las partes de un todo indivisible.

Partiendo de la base de que el alumnado ha estudiado la proporcionalidad directa en esta actividad se intenta explotar al máximo sus conocimientos sobre dicho tema, comenzando por plantearle un ejercicio que bien podría haber hecho al estudiarlo. El hecho de comenzar el estudio de las funciones desde un problema que puede haber resuelto en otro contexto puede ayudar al alumno a ver cómo las variables aparecen de forma natural a la hora de modelizar ciertas cantidades en problemas cotidianos. Se está trabajando por tanto en esta actividad una concepción de las variables como modelización.

Por otra parte, mediante el uso de deslizadores, se invita al estudiante a modelizar en GeoGebra las distintas variables del problema, a priori sin imponer ninguna relación entre ellas. Es decir, en principio no se hace una distinción entre variable dependiente e independiente. Más aún, esta distinción realmente no se explicita en todo el ejercicio, ya que de hecho la elección es un puro convenio.

Al estar familiarizados con la noción de proporcionalidad, los alumnos son capaces de calcular la constante de proporcionalidad directa. Aquí entran directamente las funciones. Si los alumnos saben calcular la constante de proporcionalidad, entonces ya saben cómo relacionar ambas variables para obtener una función. Así, hemos llegado a las funciones desde un punto de vista esencialmente covariacional.

Finalmente, la simplicidad del problema da lugar al trabajo con las diferentes expresiones de una función, para lo que GeoGebra ofrece muchas facilidades. En particular, se puede trabajar en detalle con la tabla de valores.

Capacidades

En la Tabla 3 relacionamos cada ejercicio de la Actividad 1 con las capacidades curriculares y las capacidades asociadas al marco teórico que se desarrollan en él.

Tabla 3: Capacidades desarrolladas en los ejercicios de la Actividad 1

Ejercicios	Capacidades curriculares	Capacidades asociadas al marco teórico
1, 2, 3, 7	A1, A4	B3
4	A1, A4	B1, B3
5	A1, A4, A5, A7	B1, B2, B3
6	A1, A4, A5, A7	B1, B2, B3, B5
8	A2, A3	B4

En la Figura 4 detallamos la trayectoria de aprendizaje que se produce entre los distintos ejercicios que componen la actividad, donde puede observarse claramente en qué orden se van trabajando las distintas capacidades curriculares y las capacidades asociadas al marco teórico.

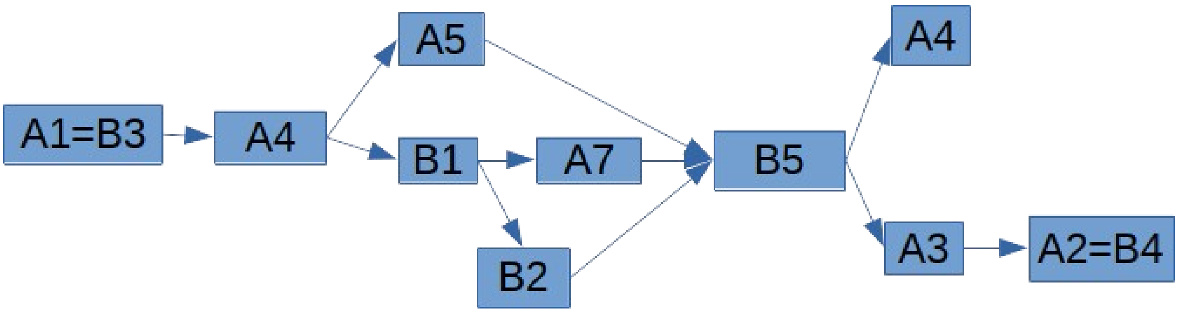


Figura 4: Trayectoria hipotética asociada a la Actividad 1

Descripción

Esta tarea puede ser realizada con alumnos de cualquier nivel de la Educación Secundaria, aunque creemos que se aprovechará al máximo con alumnos de 1º de ESO. El ejercicio consiste en el estudio de un viaje desde Madrid hasta Burdeos por la autovía A-1, suponiendo que se realiza a una velocidad constante y tomando como puntos de referencia las ciudades principales a las que se aproxima el trayecto: Burgos, Vitoria y San Sebastián.

En primer lugar, se les dan como dato las distancias a cada una de estas ciudades y a Burdeos y el tiempo en llegar a Burgos y se les plantea el sencillo ejercicio de calcular los tiempos a cada una de las demás ciudades. Se les pide que organicen la información en una tabla, trabajando así ya una de las formas de ver las funciones.

Seguidamente, se pide a los alumnos que representen los distintos pares (Tiempo,Distancia) que han obtenido usando GeoGebra para que se den cuenta de que los puntos están alineados. La idea de covariación se introduce al pedirles que modelicen las variables en juego por medio de deslizadores y que impongan la relación funcional dada por la constante de proporcionalidad. Representando los valores de los deslizadores y activando el rastro obtienen la gráfica de la función, que luego pueden obtener de otra forma representando la función directamente. Esto fomenta una detallada transición de una visión de acción a una visión de proceso.

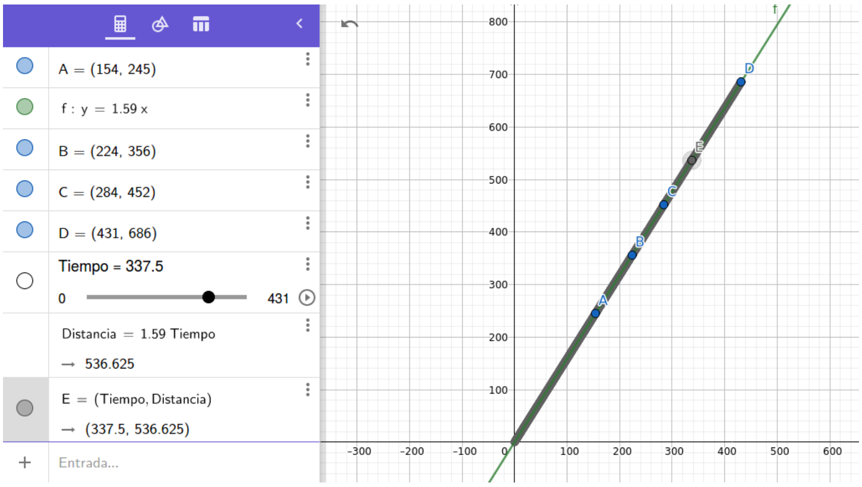


Figura 5: Gráfica de una función lineal obtenida de varias formas con GeoGebra

Finalmente, se les propone un ejercicio para que por ellos mismos sean capaces de descubrir la «regla de la línea vertical». La idea es sencilla, el coche no puede estar en dos sitios a la vez.

Actividad 2: Un lanzamiento vertical

Motivación

Tras el trabajo con funciones lineales, el siguiente ejemplo de función viene dado por las funciones cuadráticas. Hay multitud de situaciones que pueden ser modelizadas por funciones cuadráticas, pero una de las más cotidianas, con la que los alumnos tendrán más familiaridad y que de hecho estudian en la asignatura de Física y Química de 2º de ESO (MECD, 2014), es la de los movimientos verticales bajo la acción de la gravedad.

Esta tarea sigue una estructura muy similar a la anterior, con la gran diferencia de que ahora se trabajan funciones cuadráticas en vez de funciones lineales. Otra diferencia importante es que ahora se les pide a los alumnos calcular dos propiedades matemáticas de la función como son su extremo y el punto de corte con el eje OX, aunque introducidas estas propiedades de forma totalmente física (el punto de más altura del objeto lanzado y el instante en que vuelve a caer a nuestras manos). Creemos que estos cálculos pueden realizarse incluso a nivel de 1º de ESO con una buena guía por parte del profesor, y no deberían presentar ningún problema a niveles a partir de 2º.

Capacidades

En la Tabla 4 relacionamos cada ejercicio de la Actividad 2 con las capacidades curriculares y las capacidades asociadas al marco teórico que se desarrollan en él.

Tabla 4: Capacidades desarrolladas en los ejercicios de la Actividad 2

Ejercicios	Capacidades curriculares	Capacidades asociadas al marco teórico
1	A1, A6, A7	B1, B2, B3, B5
2	A1, A3, A6, A7	B1, B2, B3, B5
3	A1, A3, A6, A7	B1, B2, B3, B5, B6

En la Figura 6 detallamos la trayectoria de aprendizaje que se produce entre los distintos ejercicios que componen la actividad.

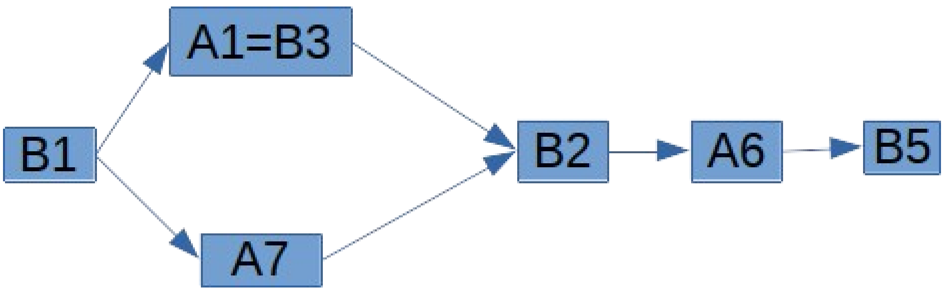


Figura 6: Trayectoria hipotética asociada a la Actividad 2

Descripción

El ejercicio consiste en el estudio del movimiento de un balón que hemos lanzado en un perfecto tiro vertical. Se da como dato la velocidad inicial en metros por segundo y se asume que la aceleración de la gravedad es igual a 10 m/s^2.

Se pide al estudiante calcular la altura máxima que alcanzará el balón así como el tiempo que tardará en volver a nuestras manos. Estos datos se usarán para establecer los límites de unos deslizadores que construimos a continuación. De manera análoga a la actividad anterior, se construyen deslizadores representando la altura y el tiempo y se impone la relación entre ellos dada por la solución del movimiento. Igual que antes, se obtiene la figura como el rastro de un punto móvil y también como una gráfica representada por GeoGebra.

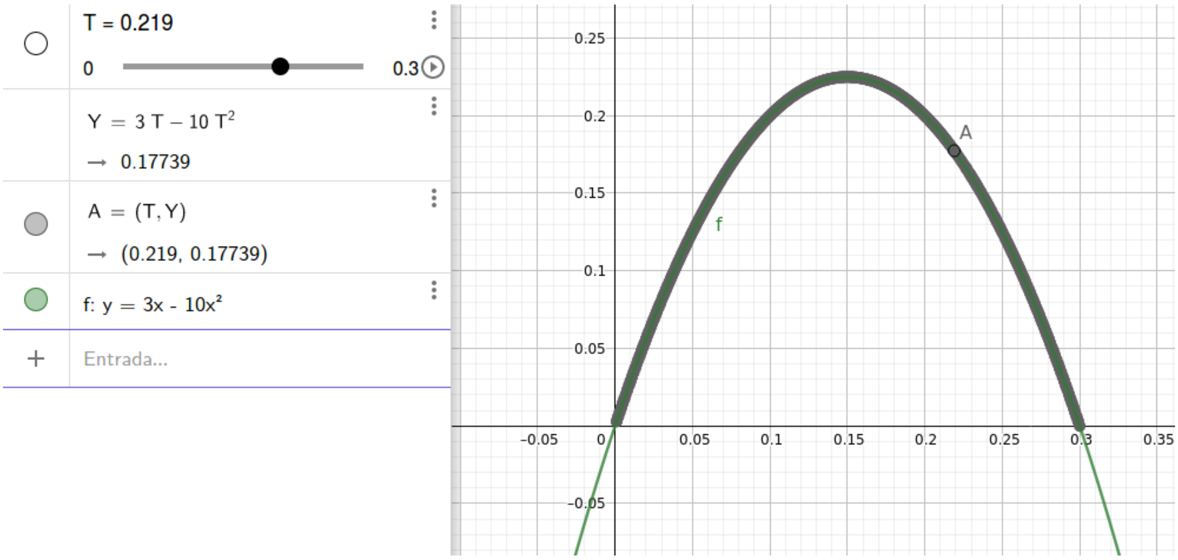


Figura 7: Gráfica de una función cuadrática obtenida de varias formas

Actividad 3: Un tiro a canasta

Motivación

En esta actividad se combinan las dos anteriores, entrando en juego con toda su potencia la idea de covariación. Esta vez las funciones serán construidas por dos cursos operatorios que confluirán en uno solo, consolidándose así el entendimiento del concepto de función.

Se manejan ahora esencialmente tres variables, el tiempo, la altura y la distancia horizontal, que entran en juego en el típico tiro parabólico. Las tres variables serán modelizadas por deslizadores de forma similar a como se ha hecho en las actividades anteriores. La gran diferencia ahora es que, mientras que las relaciones entre el tiempo y las otras dos variables sí que estarán impuestas por nosotros, no será así para la relación entre la altura y la distancia horizontal. Aparece así la noción de covariación como «funciones paramétricas», tal y como observan Oehrtman, Carlson y Thompson (2008).

La relación entre la altura y la distancia horizontal será en primer lugar visualizada gráficamente en GeoGebra mediante la variación de deslizadores y posteriormente calculada por los estudiantes. Cuando representen la fórmula calculada, los estudiantes observarán cómo la gráfica obtenida coincide con la figura anterior, asistiendo así a una confluencia de cursos operatorios.

Finalmente, es en esta actividad donde se empieza a sacar provecho de las capacidades de GeoGebra 3D. La posibilidad de introducir el tiempo como una variable visualizable más permitirá ver el movimiento como un objeto multiplicativo que engloba el movimiento de ambas variables. Más aún, las proyecciones a cada uno de los planos ofrecerán gráficas similares a las obtenidas en las actividades anteriores.

Capacidades

En la Tabla 5 relacionamos cada ejercicio de la Actividad 3 con las capacidades curriculares y las capacidades asociadas al marco teórico que se desarrollan en él.

Tabla 5: Capacidades desarrolladas en los ejercicios de la Actividad 3

Ejercicios	Capacidades curriculares	Capacidades asociadas al marco teórico
1	-	B1
2	A1, A4, A6, A7	B1, B2, B3, B6
3, 4	A1, A4, A6, A7	B1, B2, B3, B5, B6

En la Figura 8 detallamos la trayectoria de aprendizaje que se produce entre los distintos ejercicios que componen la actividad.

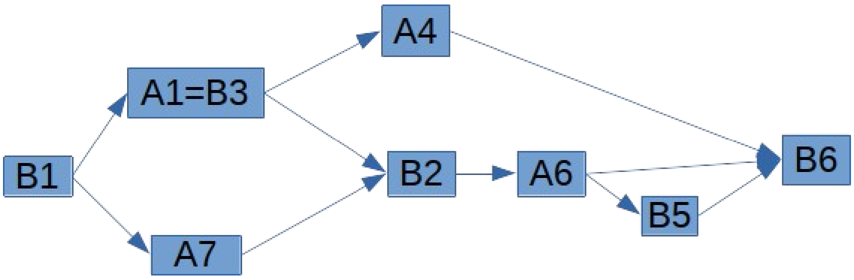


Figura 8: Trayectoria hipotética asociada a la Actividad 3

Descripción

El ejercicio consiste en el estudio de un tiro a canasta. Se dan como dato las velocidades iniciales en las direcciones vertical y horizontal y de nuevo se asume que el valor de la aceleración de la gravedad es de 10 m/s^2. Se les ofrecen también a los alumnos las fórmulas que describen el movimiento, que son por supuesto dos ecuaciones similares a las que han trabajado en las actividades previas.

Se les pide ahora que construyan tres deslizadores, correspondientes al tiempo, a la distancia vertical y a la distancia horizontal. Igual que en la actividad anterior, se les pide que calculen los extremos que deben fijar para estos deslizadores. Se representa en el plano el punto (Distancia horizontal, Distancia vertical).

Seguidamente, por medio de las fórmulas del movimiento, se imponen las relaciones entre el deslizador del tiempo y los otros dos deslizadores. Al mover el deslizador del tiempo y mostrar el rastro se obtiene una figura correspondiente a la relación entre las distancias horizontal y vertical.

Se pide entonces a los alumnos que obtengan esa relación a mano y que posteriormente la representen. Los alumnos obtienen una gráfica que se corresponde con la figura que obtuvieron antes.

Figura 9: Gráfica de un tiro parabólico

Finalmente, usando la Graficadora 3D, se les pide que representen el punto (Tiempo, Distancia horizontal, Distancia vertical), introduzcan las relaciones y muevan los deslizadores, activando el rastro. Se les pide observar la figura formada y rotar la visión para que recuperen las gráficas de las relaciones entre cada par de variables.

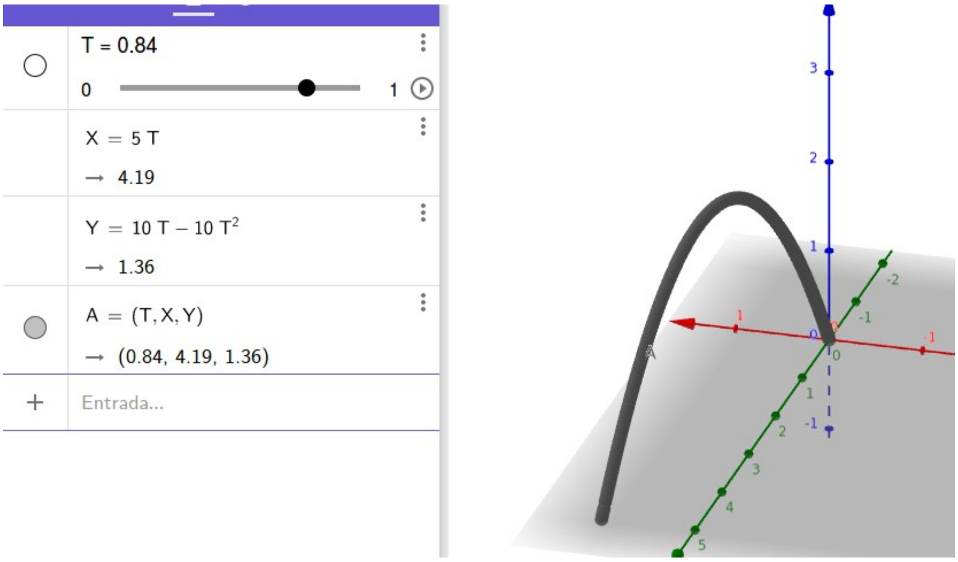
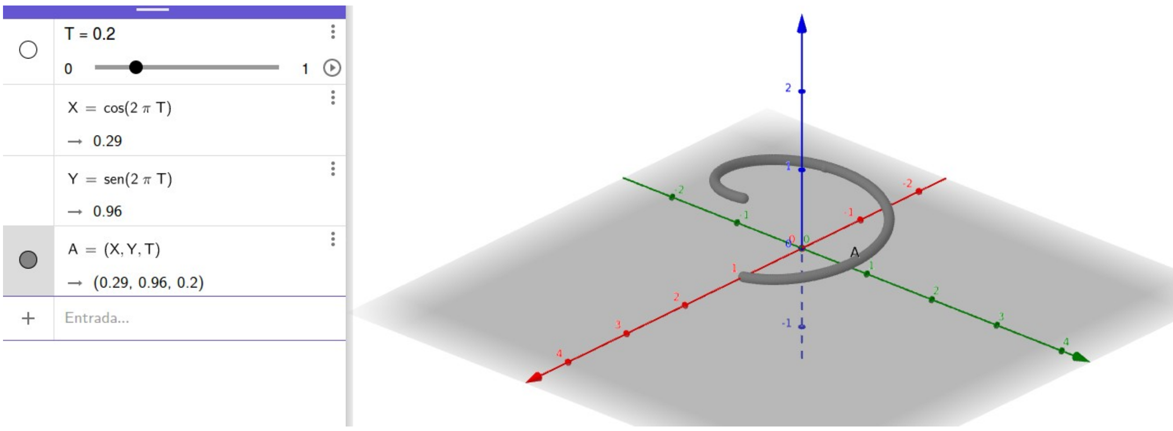


Figura 10: La covariación de las tres variables visualizada en un entorno tridimensional

Variante

En cursos más avanzados puede usarse el mismo tipo de actividad para trabajar el movimiento circular.



Actividad 4: Un tiro a canasta II. Entendiendo los parámetros

Motivación

Esta actividad trata de explorar el concepto de función paramétrica o, al menos, el papel que juegan los parámetros de las funciones, desde la modelización de una situación habitual, la de un tiro a canasta, pero (esta vez sí) con la intención de encestar.

En este caso, a parte de las variables habituales, tendremos dos deslizadores extra correspondientes a los posibles valores que puede tomar la velocidad inicial.

Variando estos deslizadores se pretende mostrar cómo el cambio de los parámetros afecta a la función en su conjunto y cómo podemos fijarnos en la función para seleccionar unos determinados parámetros frente a otros. En este caso el criterio de selección está determinado por la canasta.

De nuevo, usando GeoGebra 3D, vuelven a integrarse variables y parámetros en un objeto multiplicativo que las engloba, que en esta ocasión será una peculiar superficie.

Capacidades

En la Tabla 6 relacionamos cada ejercicio de la Actividad 4 con las capacidades curriculares y las capacidades asociadas al marco teórico que se desarrollan en él.

Tabla 6: Capacidades desarrolladas en los ejercicios de la Actividad 4

Ejercicios	Capacidades curriculares	Capacidades asociadas al marco teórico
1	-	B1
2	A6, A7	B1, B5
3, 4	A3, A6, A7	B1, B5, B6

En la Figura 11 detallamos la trayectoria de aprendizaje que se produce entre los distintos ejercicios que componen la actividad.

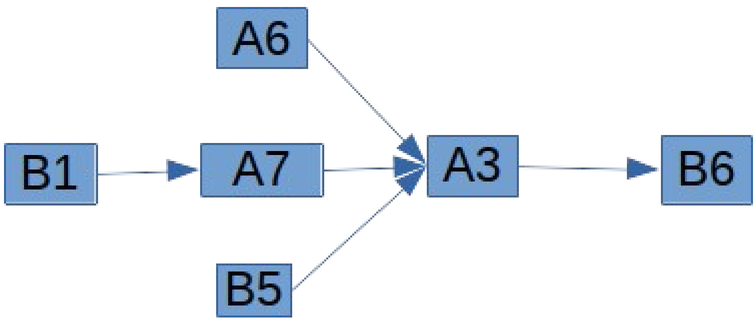


Figura 11: Trayectoria hipotética asociada a la Actividad 4

Descripción

El ejercicio consiste en el estudio de un tiro a canasta. La diferencia con la actividad anterior es que esta vez la velocidad inicial no se da como dato sino que no se especifica. De nuevo, se le ofrecen a los alumnos las fórmulas que describen el movimiento, y esta vez se les facilita el cálculo de la relación entre las distancias vertical y horizontal.

Puesto que la velocidad inicial no se especifica, los posibles valores de ésta se representan por medio de dos deslizadores, correspondientes a las velocidades iniciales vertical y horizontal. Se pide entonces representar la gráfica de la relación entre las distancias vertical y horizontal en función de los dos deslizadores.

Para añadir un criterio de selección de trayectorias se les pide a los alumnos que definan un punto del plano que corresponderá a la canasta. Mediante el desplazamiento de los deslizadores, se sugiere al alumno que seleccione trayectorias que proporcionen una canasta.

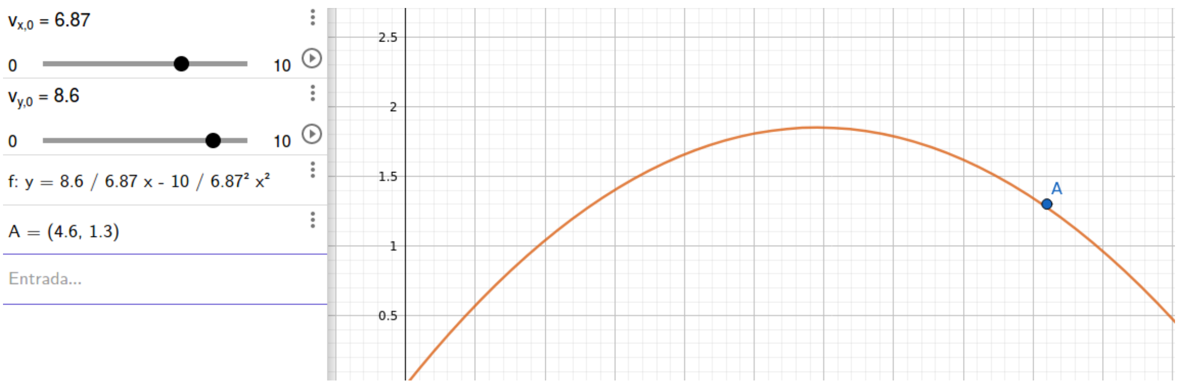


Figura 12: Selección de trayectorias

Finalmente, se le da otra perspectiva al ejercicio por medio de GeoGebra 3D. Se fija una de las componentes de la velocidad y la otra se modeliza por medio de un deslizador v, se representa entonces en la Graficadora 3D la curva (Distancia horizontal, Distancia vertical, v). Activando el rastro, se obtiene una superficie que engloba todas las posibles curvas que pueden obtenerse para diferentes valores del parámetro v.

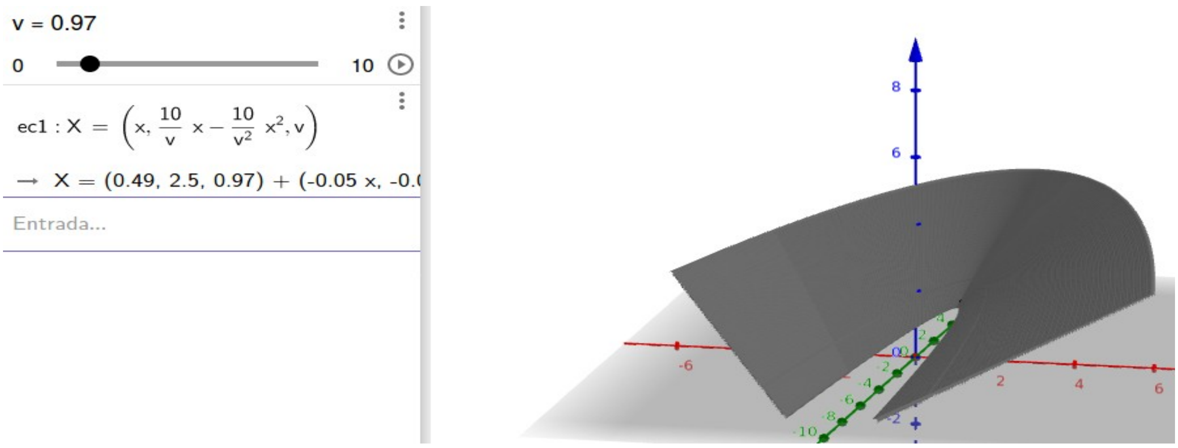
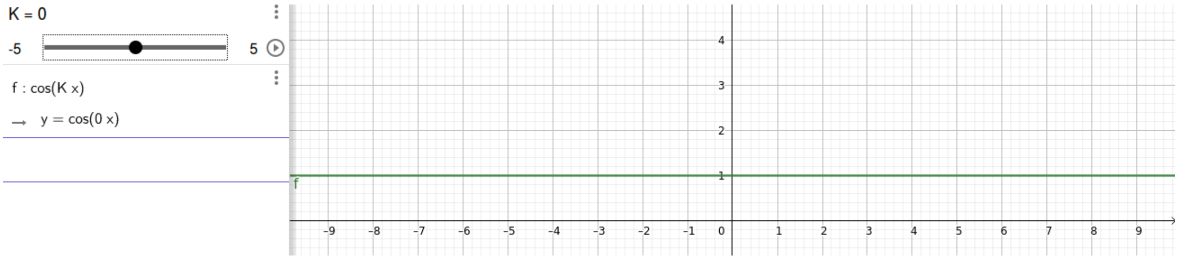
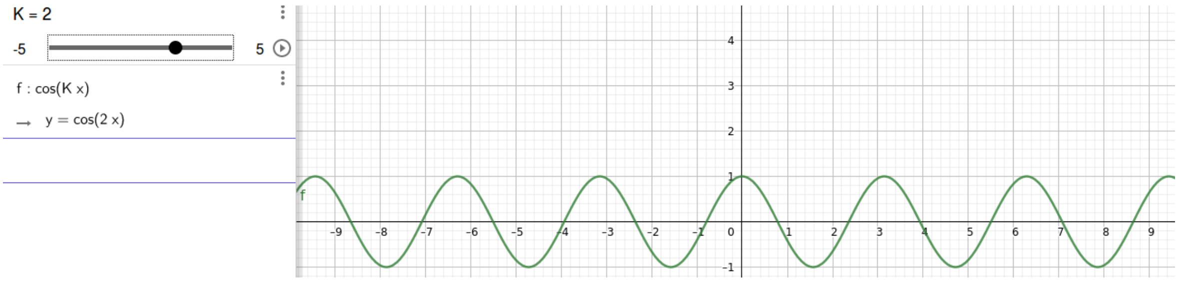


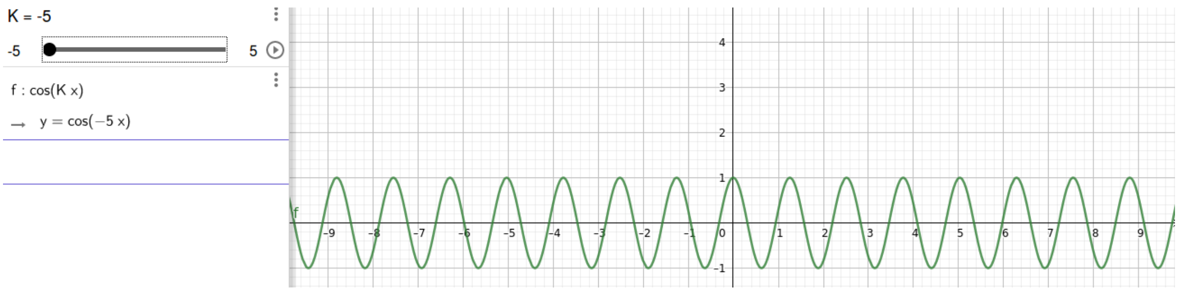
Figura 13: Superficie que engloba a toda la famila de curvas

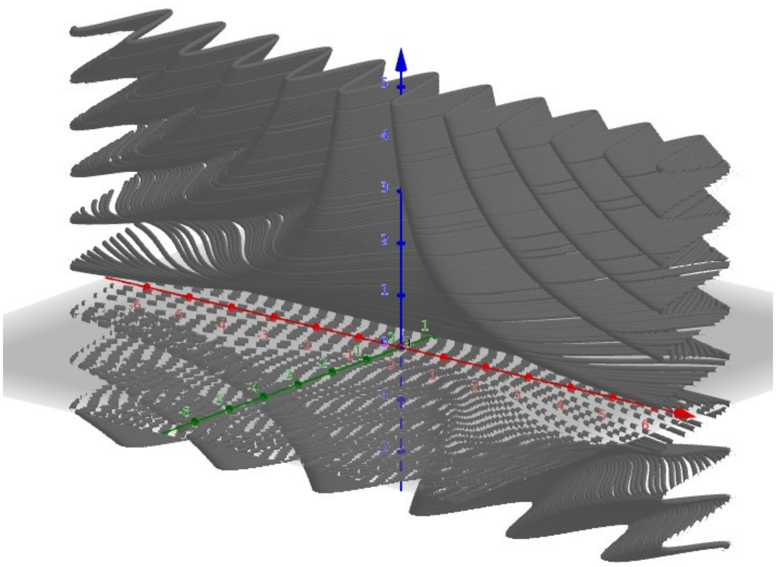
Variante

En cursos más avanzados puede usarse el mismo ejercicio para trabajar la dependencia de los parámetros en otras funciones más avanzadas, como por ejemplo, en una función trigonométrica.









Propuesta de implementación

A partir de las actividades propuestas hemos conseguido completar el diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. En esta trayectoria se detallan las capacidades trabajadas en cada una de las actividades y el orden en el que estas capacidades se van desarrollando a lo largo del proyecto de enseñanza y aprendizaje.

En la Figura 14 se presenta el diagrama de flujo de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, donde se concreta el orden de las capacidades curriculares y las capacidades asociadas al marco teórico desarrolladas.

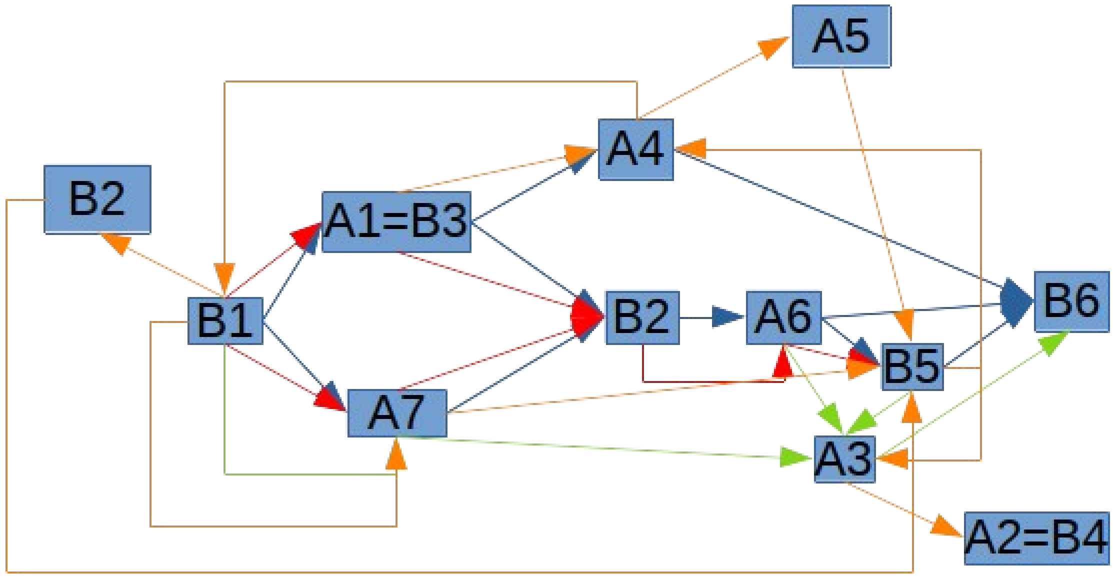


Figura 14: Diagrama de flujo de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje planteada. Las flechas en color Naranja corresponden a la Actividad 1, las flechas en color Rojo corresponden a la Actividad 2, las flechas en color Azul corresponden a la Actividad 3 y las flechas en color Verde corresponden a la Actividad 4.

6. Conclusiones

En esta última sección se recogen las conclusiones en relación a los objetivos planteados, las limitaciones del estudio, las perspectivas de futuro y las conclusiones respecto al desarrollo profesional como profesor.

Conclusiones en relación a los objetivos

Los objetivos generales propuestos eran:

- Desarrollar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para para un primer tema de funciones en la ESO.
- Diseñar esta Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en el marco teórico de la covariación instrumentada propuesto por Arzarello (2019) mediante el manejo de un software de geometría dinámica.

El primero de los objetivos se ha cumplido, ya que se ha realizado un análisis de contenido y un análisis cognitivo de las capacidades previas asumidas y de las capacidades a desarrollar. La THA ha sido detallada en las actividades diseñadas para trabajar en el aula. En cualquier caso, consideramos que para completar un ciclo de enseñanza tal y como lo plantea Simon (1995) habría sido necesario un trabajo en el aula, tanto de determinación concreta de los conocimientos del alumnado con el que se trabaja como de un análisis de instrucción y un análisis de actuación que pudieran realimentar la THA planteada.

Consideramos por otra parte que el objetivo de diseñar la THA bajo el enfoque de la covariación instrumentada sí que ha sido satisfecho. De hecho, ha sido este marco teórico el que ha motivado el uso de GeoGebra y la construcción de las tareas tal y como se ha realizado. El uso reiterado de deslizadores y la construcción apriorística de las variables, para sólo después imponer las relaciones funcionales ha estado guiada en todo momento por la idea de covariación.

En relación a los objetivos específicos precisamos en qué medida se ha llevado la consecución de los mismos. El contexto en el que se plantean todos y cada uno de los ejercicios propuestos hacen que el primero de los objetivos, relativo a la concepción de las variables como modelización se vea automáticamente satisfecho: en todos los ejercicios se trata de usar las variables para la modelización de magnitudes físicas y este objetivo se trabaja de forma específica al desarrollar las capacidades A7 y B1.

El segundo objetivo, relativo al uso de las variables como simbolización de relaciones funcionales ha sido satisfecho, ya que la forma en que se han ido utilizando las fórmulas para establecer ligaduras entre los deslizadores motiva un uso de las variables para la simbolización de las relaciones funcionales. De nuevo, este objetivo se ve cumplido por el desarrollo de la capacidad B2.

La actividad 1 plantea explícitamente un ejercicio llamado a reflexionar sobre la «regla de la recta vertical». Explícitamente, el objetivo relativo a la «regla de la recta vertical» se satisface con el desarrollo de la capacidad A2=B4.

Se entiende, a la vista de las trayectorias construidas, que la visión de las funciones como proceso y como covariación ha sido trabajada a lo largo de todas las actividades y de hecho ha sido la referencia para su construcción, de modo que podemos dar también esos objetivos por cumplidos. Concretamente, estos objetivos están relacionados con el desarrollo de las capacidades B5 y B6.

A su vez, el uso de GeoGebra 3D ha sido introducido con el motivo específico de trabajar la construcción de objetos multiplicativos, haciendo que se cumpla también ese objetivo, trabajado explícitamente en la capacidad B6. Finalmente, la actividad 4 está dirigida explícitamente al manejo de familias dependientes de un parámetro.

En conclusión, podemos dar todos y cada uno de los objetivos específicos por cumplidos, al menos en cuanto al diseño de actividades se refiere. Quedaría en todo caso, igual que con los objetivos generales, la aplicación de la THA al trabajo en el aula para completarla con la experiencia de ese trabajo y así cerrar el ciclo de enseñanza de Simon (1995).

Limitaciones del estudio

A causa de la pandemia COVID-19 causada por el coronavirus SARS-CoV-2, el 11 de marzo de 2020 se suspendieron las clases en todos los institutos de la Comunidad de Madrid y el 14 de marzo se decretó el Estado de Alarma en toda España, que aún sigue vigente a la fecha en que se están escribiendo estas palabras. Esto ha provocado que el trabajo que ya se estaba realizando en el centro de prácticas no haya podido ser continuado y finalizado como uno desearía.

En particular, la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje aquí desarrollada, que yo esperaba llevar al aula (al menos alguna de sus actividades) con algunos alumnos de las asignaturas que estaba impartiendo en el *Prácticum* para después estudiar cuidadosamente los resultados obtenidos, simplemente no pudo realizarse.

Futuras líneas de acción

De cara a futuras líneas de trabajo y actuación en el mismo tipo de cuestiones, tenemos una serie de propuestas teóricas y prácticas. En cuanto a las propuestas prácticas, en primer lugar, del propio desarrollo de este trabajo se deduce una clara continuación práctica: la implementación en el aula de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje aquí diseñada y su reconfiguración en base a la experiencia obtenida, cerrando así el ciclo de enseñanza. Como segunda propuesta, se sugiere la implementación de la THA planteada con algunas de las variaciones aquí comentadas, por ejemplo considerando un abanico más amplio de funciones, con situaciones más generales, que puedan ser de más interés en los cursos avanzados de la ESO que las funciones lineales y cuadráticas.

Más allá de estas propuestas inmediatas, creemos que el marco de la covariación instrumentada da aún mucho juego para el planteamiento de diversas actividades y para la construcción de otras Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje. Así, consideramos que pueden desarrollarse actividades similares en GeoGebra y también usando otro tipo de materiales manipulativos que permitan trabajar el razonamiento covariacional.

Como propuesta teórica consideramos que es interesante la exploración de la relación entre las funciones tal y cómo se trabaja con ellas en matemáticas y las funciones en informática y programación. En los últimos años esto ha tomado especial relevancia con la introducción de temario de programación en el currículum (MECD, 2014) de las asignaturas de Tecnología de la ESO, particularmente con el software/lenguaje de programación Scratch, desarrollado por el Grupo Lifelong Kindergarten del MIT Media Lab. Scratch forma parte del currículum de la educación secundaria, al menos en la Comunidad de Madrid, desde la asignatura Tecnología, Programación y Robótica de 1º de ESO. Esto quiere decir que al alumnado del instituto ahora se le presenta una noción de función en otro contexto adicional, lo que da cierta potencialidad aprovechable por los profesores a la hora de enseñar las funciones en el contexto de la clase de matemáticas. Sería por tanto interesante también en futuros estudios el desarrollo de actividades de covariación instrumentada en entornos como Scratch.

Desarrollo profesional como profesor

Una reflexión sobre la práctica docente realizada en este trabajo lleva a plantearse algunas de las conclusiones claras que el autor, en tanto que profesor, ha obtenido para sí mismo y de las aportaciones que este trabajo puede hacerle a su propia labor docente y en futuros trabajos de innovación e investigación en Didáctica de las Matemáticas.

En primer lugar, una primera reflexión sobre el currículum, la historia y los libros de texto hace patente que el concepto de función es central en toda la matemática y en consecuencia forma parte del temario de prácticamente todas las asignaturas de matemáticas que se enseñan en el instituto. Las investigaciones muestran que una comprensión profunda de este concepto es crucial para el desarrollo de una educación matemática íntegra. Es por tanto nuestra labor como profesores el posibilitar que esta comprensión se dé, con todos los medios que tengamos a nuestro alcance.

En el análisis de la práctica docente se descubre como resulta importante siempre que se quiere enseñar un concepto nuevo, por parte del profesor, conocer la forma en que este concepto se maneja a día de hoy en la «matemática erudita» y cómo se ha constituido históricamente. Esto da un peso importante al conocimiento del estado de la matemática «erudita» (es decir, de las Matemáticas) y al estudio de la Historia de las Matemáticas desde la Didáctica de las Matemáticas.

Finalmente, en la época en la que nos encontramos, las nuevas tecnologías, aunque no son la panacea, usadas sabiamente (y libremente), ofrecen a los profesores la capacidad de desarrollar todo tipo de actividades innovadoras, a la vez que llamativas para los estudiantes, y a los alumnos la oportunidad de manipular y visualizar estructuras que muchos grandes matemáticos ni llegaron a imaginar.

Referencias bibliográficas

Abánades, M. A., Botana, F., Escribano, J., y Tabera, L.F. (2009). Software matemático libre. *La Gaceta de la RSME*, 12(2), 325-346.

Álvarez, I., Gómez-Chacón, I.M., y Ursini, S. (2015). Understanding the Algebraic Variable: Comparative Study of Mexican and Spanish Students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education,* 11(6), 1507-1529.

Apostol, T. M. (1988). *CALCULUS. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* Reverté.

Arias, J. M. y Maza, I. (2015). *Código Bruño: Matemáticas 1º de ESO*. Bruño.

Arias, J. M. y Maza, I. (2015). *Código Bruño: Matemáticas 1 Bachillerato*. Bruño.

Arzarello, F. (2019). La covariación instrumentada: un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (18), 11-29.

Aubin, D. (2008). Nicolas Bourbaki. En T. Gowers, J. Barrow-Green e I. Leader (Eds.), *The Princeton companion to Mathematics* (pp. 823-825). Princeton University Press.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Bos, H. J. (1980). Mathematics and rational mechanics. En G. S. Rousseau y R. Porter (Eds.), *Ferment of knowledge* (pp. 327-355). Cambridge University Press.

Bourbaki, N. (1970). *Théorie des ensembles* (Vol. 1). París: Hermann.

Bueno, G. (1995). *¿Qué es la ciencia? La respuesta de la teoría del cierre categorial*. Oviedo: Pentalfa.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education III*, *7* (pp. 114-162).

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Horsori.

Colera, J., Gaztelu, I., y Colera, R. (2020). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas 3º ESO*. Anaya.

Confrey, J. y Smith, E. (1994). Multiplicative structures and the development of logarithms: What was lost by the invention of function. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 333-360). Albany, NY: SUNY Press.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 66-86.

Dubinski, E., y Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). MAA Notes.

Ferreirós, J. (2008). The Crisis in the Foundations of Mathematics. En T. Gowers, J. Barrow-Green e I. Leader (Eds.), *The Princeton companion to Mathematics* (pp. 142-156). Princeton University Press.

Free Software Foundation. (2016). Software libre y educación. Obtenido de: https://www.gnu.org/education/education.es.html

Free Software Foundation. (2019). ¿Qué es el software libre?. Obtenido de: https://www.gnu.org/philosophy/free-sw.es.html

Gómez, P., y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 1(2), 79-98.

Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*. Trabajo de fin de máster. Universidad de Salzburgo.

Instituto GeoGebra Internacional. (2018). GeoGebra 6.0.507.0. Obtenido de: https://www.geogebra.org

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20(4), 282-300. doi: 10.2307/2686848

Lawvere, W. (1991). *Matemáticas conceptuales*. [Edición digital]. Obtenido de: http://www.buffalo.edu/~wlawvere/concep-3.pdf

Mac Lane, S. (2013). *Categories for the working mathematician*. Springer Science & Business Media.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). *Real Decreto 1105/2014, del 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado del 3 de enero de 2015.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given a physical model. In G. Harel and E. Dubisnky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 175-193). MAA Notes.

Newton, I. (1676). Letter from Isaac Newton to Henry Oldenburg, dated 26 October 1676. Publicada online en septiembre de 2012. Obtenido de: http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00197

OCDE. (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. París: OECD.

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., y Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 27-42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. Columbia University Press.

Ruiz, N., Bosch, M., y Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M.M. Moreno, A. Esstrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lérida: SEIEM.

Rüthing, D. (1984). Some definitions of the concept of function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. *Math Intelligencer*, 6:4, 72-77.

Saldanha, L. A., y Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S. B. Berenson y W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education- North America* (Vol. 1, pp. 298-304). Raleigh: North Carolina State University.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

Spivak, M. (1986). *CALCULUS. Cálculo Infinitesimal.* Reverté.

Suppes, P. (1960). *Axiomatic Set Theory*. Princeton, Nueva Jersey: D. Van Nostrand Company.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En A. H. Schoenfeld y J. J. Kaput (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education, 4* (pp. 21-44).

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., Hatfield, N., Joshua, S., Yoon, H., y Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among U. S. and South Korean secondary mathematics teachers. *The Journal of Mathematical Behavior,* 48, 95-111.

Tipler, P. A. (1995). *Física.* Reverté.

Trigueros, M., y Ursini, S. (2003). First year undergraduates' difficulties in working with the concept of variable. CBMS, *Research in Collegiate Mathematics Education, 12,* 1-29.

Anexo: Actividades

Actividad 1: De viaje por la A-1

Supongamos que vas a realizar un viaje en coche de Madrid a Burdeos (una bonita ciudad al sur de Francia). Este viaje suele realizarse a través de la autovía A-1, que pasa cerca de algunas ciudades importantes de España como son Burgos, Vitoria y San Sebastián, en ese orden, para horas más tarde llegar a Burdeos.

1. Vamos a suponer que el coche va siempre a la misma velocidad. Sabemos que Burgos se encuentra a una distancia de 245 km de Madrid, y que se tarda en llegar 2 horas y 34 minutos. Sabiendo que las distancias a Vitoria, San Sebastián y Burdeos son 356 km, 452 km y 686 km, respectivamente, ¿cuánto tardarás en llegar a cada una de esas ciudades?

Puedes usar la siguiente tabla como ayuda:

Ciudad	**Distancia**	**Tiempo**
Burgos	245 km	2 h 34 min
Vitoria	356 km	
San Sebastián	452 km	
Burdeos	686 km	

BONUS: Puedes comparar ahora con los tiempos que según Google Maps se tardaría en llegar a cada una de estas ciudades y verás que son muy parecidos (la diferencia es de unos 10 minutos), lo que quiere decir que nuestra suposición de que el coche a velocidad constante es bastante precisa.

2. Cambia los tiempos que obtengas a minutos y representa los pares (Tiempo, Distancia), en GeoGebra. Es decir, por ejemplo, 2 h y 34 min son aproximadamente 154 minutos. Entra en la Calculadora Gráfica de GeoGebra y escribe `(154, 245)`. Si ajustas la escala de la ventana gráfica, verás varios puntos representados en el plano. Observa que los puntos representados están alineados.

3. Como ya te habrás dado cuenta, el ejercicio **1** era básicamente un problema de proporcionalidad directa. ¿Sabrías calcular la constante de proporcionalidad? Hazlo. (Nota: Calcula la constante que obtendrías al hacer Distancia/Tiempo, y no la de Tiempo/Distancia. Considera los tiempos en minutos y las distancias en kilómetros. De esta forma la constante de proporcionalidad saldrá en kilómetros por minuto. ¿Sabrías dar su valor en kilómetros por hora?).

4. Construye ahora dos deslizadores en GeoGebra, uno que se llamará `Tiempo` y otro que se llamará `Distancia`. El primer deslizador variará entre los valores 0 y el tiempo que se tarda en llegar a Burdeos, el segundo variará entre los valores 0 y la distancia a Burdeos (686 km). Introduce la orden `(Tiempo, Distancia)` y observa que representa un punto en el plano que varía según ajustas los valores del deslizador.

5. Observa que si calculaste la constante de proporcionalidad como se te pidió, al multiplicarla por cualquier tiempo de la tabla obtienes la distancia correspondiente. Si la constante de proporcionalidad que calculaste es *k*, introduce en GeoGebra la orden:

`Distancia=`*k*`*Tiempo`.

O sea, si por ejemplo obtuviste una constante de proporcionalidad de 2, tienes que introducir

`Distancia=2*Tiempo`.

Observa lo que le sucede ahora al punto representado si mueves el deslizador Tiempo (puedes moverlo de forma automática accionando el botón «Play» que aparece al lado del deslizador). Activa la opción Rastro dando clic derecho en el punto y observa la figura que se obtiene al hacer variar el tiempo. ¿Qué relación tiene esta figura con los puntos que representante antes?

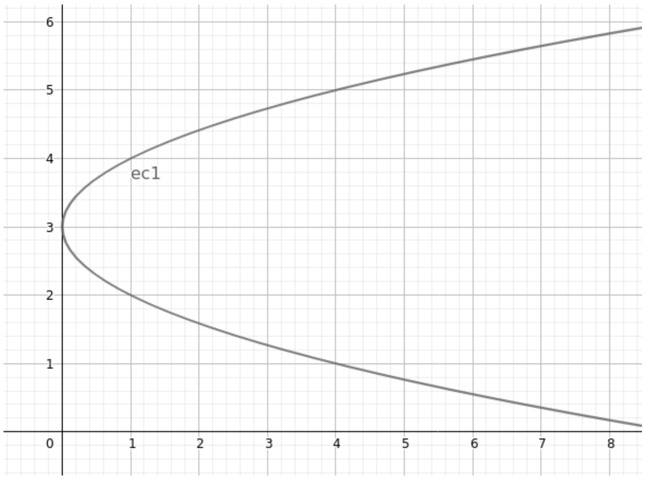
6. De nuevo, si *k* es la constante de proporcionalidad que obtuviste, introduce en GeoGebra la orden:

y=*k**x.

Como puedes observar, esto genera una gráfica, ¿qué relación hay entre esta gráfica y la figura que has obtenido en el ejercicio **5**?

7. Haz clic derecho en la gráfica que acabas de representar y activa la opción tabla de valores introduce como valores inicial y final de x los tiempos en llegar a Burgos y a Burdeos, respectivamente, y ponle un paso de 2. Observa la tabla y compárala con la tabla que rellenaste en el ejercicio **1**.

8. Consideremos otro viaje en coche por la A-1, pero esta vez sin asumir que viajamos a velocidad constante. Esta situación es más realista, porque durante el viaje es posible que realicemos paradas, haya tramos en los que vayamos más despacio, etc. En cualquier caso, ¿crees que si hiciéramos una gráfica de la distancia a la que estamos de Madrid (por la carretera) en función del tiempo, con la distancia en el eje vertical y el tiempo en el eje horizontal, sería posible obtener una gráfica como la siguiente? Justifica tu respuesta.



Actividad 2: Un lanzamiento vertical

Supón que has cogido un balón de baloncesto y lo has lanzado al aire, en un perfecto tiro vertical. Como a lo mejor ya te han dicho en otra asignatura, si y mide la altura del balón desde la posición en que lo lanzaste y t mide el tiempo transcurrido desde el lanzamiento, la fórmula que describe la altura del balón a cada instante es

$$y=v_0 t - g\, t^2,$$

donde v_0 denota la velocidad inicial y g la aceleración de la gravedad. Como no sé cuanta fuerza tienes, voy a suponer que la velocidad inicial con la que has lanzado el balón es de 3 metros por segundo. Vamos a aproximar también la aceleración de la gravedad por 10 metros por segundo. Ahora, si medimos el tiempo en segundos y la altura en metros, la fórmula queda

$$y=3t-10t^2.$$

1. ¿A qué instante volverá a la altura que lo lanzaste? (Pista: Se trata de resolver y=0, saca factor común a t y supón que t es distinto de 0). Calcula la altura a la mitad del tiempo que has obtenido. Esa es la altura máxima que alcanzará el balón.

2. Construye en GeoGebra dos deslizadores, llamados `Y` y `T`, cuyos límites serán 0 y la altura máxima, para `Y` y 0 y el tiempo en el que el balón vuelve a la altura inicial, para `T`. Introduce la orden `(T,Y)` y observa que representa un punto en el plano que varía según ajustas los valores de los deslizadores.

3. Introduce ahora la relación entre la altura y el tiempo mediante la orden

```
Y=3*T-10*T^2.
```

Observa ahora cómo se mueve el punto representado al mover el deslizador `T` y activa la opción de mostrar rastro para ver qué figura se forma.

4. Representa ahora la función cuadrática que describe el procedimiento introduciendo la orden

```
y=3*x-10*x^2.
```

Compara ahora la gráfica obtenida con la gráfica del ejercicio **3**.

Actividad 3: Un tiro a canasta

Esta vez, en vez de lanzar el balón hacia arriba, lo lanzarás hacia arriba y hacia delante, como si quisieras encestar en una canasta. El movimiento estará ahora compuesto de dos movimientos: uno en la dirección horizontal, bastante similar al de la Actividad 1, y otro en la dirección vertical, bastante similar al de la Actividad 2. Concretamente, si denotamos por t el tiempo transcurrido en segundos desde el lanzamiento, por x la distancia horizontal del balón al punto desde el que lo tiraste en metros y por y la altura del balón desde el punto en que lo lanzaste en metros, si asumimos que la velocidad vertical inicial es de 10 metros por segundo y la horizontal es de 5 metros por segundo, las fórmulas que describen el movimiento son:

$$x=5t$$

$$y=10t-10t^2.$$

1. Construye tres deslizadores, llamados `T`, `X` e `Y`. El extremo inferior de cada uno de estos deslizadores debe ser 0. Los extremos superiores de cada uno de estos deslizadores deben ser, para `T`, el tiempo transcurrido cuando el balón vuelve a estar a la altura inicial (calcúlalo como en la Actividad 2), para `X`, el valor de x obtenido al sustituir el tiempo máximo en la fórmula que relaciona x y t y, para `Y`, el valor de y obtenido al sustituir la mitad del tiempo máximo en la fórmula que relaciona y y t. Representa un punto mediante la orden `(X,Y)`.

2. Introduce ahora la relación entre los deslizadores mediante las órdenes

```
X=5*T
Y=10*T-10*T^2.
```

Activa la opción mostrar rastro en el punto representado y observa la figura que se forma al mover el deslizador `T`.

3. Obtén la relación entre las variables x e y. (PISTA: Despeja t en la primera ecuación y sustitúyela en la segunda). Introduce esa fórmula como una orden en GeoGebra con las variables `x` e `y`. Observa la figura que obtienes y compárala con la del ejercicio anterior.

4. Abre ahora la opción Graficadora 3D de GeoGebra y vuelve a crear los deslizadores del ejercicio **1**. Representa un punto mediante la orden `(T,X,Y)`. Vuelve a introducir las relaciones del ejercicio **2**, activa el rastro y mueve los deslizadores. Observa la figura que se forma. Intenta rotar la visión para obtener la figura del ejercicio **3** y figuras similares a las de las actividades 1 y 2.

Actividad 4: Un tiro a canasta II. Entendiendo los parámetros

En este caso vamos a seguir considerando un tiro a canasta. Sin embargo, esta vez te vamos a dejar libertad para elegir las velocidades de tiro. En este caso, si $v_{x,0}$ y $v_{y,0}$ denotan las velocidades iniciales vertical y horizontal, respectivamente, las fórmulas para x e y son

$$x=v_{x,0}\,t$$

$$y=v_{y,0}\,t-10t^2.$$

Si, igual que en el ejercicio anterior, despejamos t y sustituimos, obtenemos la fórmula que relaciona x e y,

$$y=(v_{y,0}/\ v_{x,0})x-(10/\ v_{x,0}^2)x^2.$$

1. Crea dos deslizadores que representen los parámetros de la velocidad inicial, con valor mínimo 0 y máximo 10. Representa y con respecto a x introduciendo la fórmula anterior como una orden y observa cómo varía la gráfica al mover los deslizadores.

2. Oficialmente, el tiro libre se realiza a una distancia de 4,6 metros del tablero y la canasta está a una altura de 3,05 metros sobre el suelo. Puesto que normalmente uno no tira a la altura del suelo, si no más o menos a la altura de su cabeza y teniendo en cuenta las alturas medias, podemos suponer que la canasta está a en torno 1,3 metros sobre el nivel desde el que tiramos. Representa entonces la canasta introduciendo en GeoGebra la orden `(4.6,1.3)`. Mueve los deslizadores y observa para qué valores de las velocidades iniciales el balón entraría en la canasta (ten en cuenta que el balón debe entrar desde arriba).

Vamos a usar ahora el poder de GeoGebra 3D para obtener cuál es la velocidad horizontal perfecta, suponiendo que fijamos la vertical a, por ejemplo, 10 metros por segundo.

3. Abre GeoGebra 3D y crea un deslizador `v` variando entre 0 y 10. Representa una curva mediante la orden `(x,(10/v)*x-(10/v²)*x²,v)`. Activa el rastro y mueve el deslizador. Observa la superficie que se obtiene. Dibuja la recta vertical `(4.6,1.3,z)` y obtén su plano perpendicular. El corte de este plano con la superficie que has obtenido es la trayectoria perfecta.