Principios variacionales en geometría

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Román Ahumada Gialanella
Directores: Guillermo Gallego Sánchez y Ángel González Prieto
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Trabajo de Fin de Grado presentado para optar al Grado de
Grado en Matemáticas

Septiembre 2023

Índice general

Abstract

In this thesis we study different variational problems that arise in the context of riemannian geometry. In particular, we will use the heat flow method. We will use it to study two results with similar statements and that use the same proof technique, the first one referred to the existence of a unique geodesic in each homotopy class of closed curves in a compact riemannian manifold, the latter, the well-known result that states that for a compact orientable riemannian manifold there is only one harmonic form in every de Rham cohomology class.

We start with a reminder of some basics about riemannian geometry. Next, we introduce connections and we define geodesics as the minimum of the energy operator. In this section we introduce the heat flow method to prove the result concerning geodesics stated previously. After this, we move onto defining harmonic forms, then, Hodge $*$ operator and Laplace–Beltrami operator are introduced.

Lastly, we introduce some related results, as Hodge decomposition theorem or Poincaré duality, together with the main result relation with electromagnetism.

An appendix with basic theory of elliptic and parabolic operators used throughout the text is added at the end of the thesis.

Resumen

En este trabajo estudiamos diversos problemas variacionales que aparecen en el contexto de la geometría riemanniana. En particular usaremos el método del flujo de calor. Lo haremos para estudiar dos resultados con enunciados similares y con la misma técnica de demostración, el primero, referido a la existencia de una única geodésica en cada clase de homotopía de curvas cerradas en una variedad riemanniana compacta, y el segundo, el conocido resultado que dice que en cada clase de cohomología de de Rham de una variedad riemanniana compacta orientable hay una única forma armónica.

Se comienza con un recordatorio de algunos conceptos de geometría riemanniana. A continuación se introducen conexiones y se definen las geodésicas como minimizadores del funcional de energía. En esta sección se introduce el método del flujo de calor para demostrar el resultado mencionado anteriormente. Seguidamente se pasa a definir las formas armónicas, se introduce la $*$ de Hodge y el operador de Laplace–Beltrami.

Finalmente se enuncian algunos resultados relacionados, como el teorema de descomposición de Hodge o la dualidad de Poincaré así como la relación del resultado con el electromagnetismo.

Se concluye la memoria con un apéndice con los resultados básicos de operadores elípticos y parabólicos que se usan en el trabajo.

Introduction

The main goal of the thesis is to give a proof of the following result due to Hodge (Theorem 3.3).

Teorema (Hodge). *Let M be a compact orientable Riemannian manifold. Then every cohomology class in $H^p(M)$ (for $0 \leq p \leq n = \dim M$) contains precisely one harmonic form.*

We will base the proof in the proof of the Milgram–Rosenblom Theorem using the heat flow method ([4, Theorem 3.5.1]).

Teorema (Milgram–Rosenbloom). *Given a p-form $\omega_0(x)$ on M of class $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ for some $0 < \alpha < 1$, there exists a unique solution of*

$$\Delta\omega(x,t) = -\frac{d}{dt}\omega(x,t), \text{for } 0 \leq t < \infty\,,$$

subject to

$$\omega(x,0) = \omega_0(x).$$

And, as $t \to \infty$, $\omega(\cdot,t)$ converges in $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ to a harmonic form $\mathcal{H}\omega$. If ω_0 is closed, then all the forms $\omega(\cdot,t)$ are closed. Also, in this case, if η is a coclosed $(n-p)$-form ($d^*\eta = 0$) then $\int_M \omega(x,t) \wedge \eta(x)$ does not depend on t, and we have $\int_M \mathcal{H}\omega(x) \wedge \eta(x) = \int_M \omega_0(x) \wedge \eta(x)$

Here Δ represents the *Laplace–Beltrami* operator, and ω_0 is a p-form in the given cohomology class.

The strategy will consist in, firstly, adding a temporal variable to the n-forms in order to make sense of the evolution equation [3, Chapter 7], and then using techniques and results from partial differential equations and functional analysis to prove the existence and uniqueness of the solution of said equation. The proof will consist in performing a *gradient descent* for the form until we arrive to a critical point, $\frac{d}{dt}\omega(x,t) = 0$, where we will have $\Delta\omega = 0$, an harmonic form.

Following a small summary of each section of the thesis is presented. We start with a brief summary of riemannian geometry, introducing basic concepts, in particular de Rham cohomology, riemannian metrics and volume forms.

The next chapter will be dedicated to geodesics, we start introducing connections and the Levi–Civita connection, to then focus on the proof of the following theorem (Theorem 2.3.3).

Teorema. *Let M be a compact Riemannian manifold. Then every homotopy class of closed curves contains a geodesic.*

In order to complete the proof, we will take a closed curve γ in the given homotopy class. This curve is going to be the object that we will make evolve following the evolution equation.

Then we will add a temporal parameter in order to makes sense of the evolution:

$$u : \mathbb{S}^1 \times [0, \infty) \to M,$$

and we will impose the following partial differential equation:

$$\begin{gathered} u^i_t(s,t) = u^i_{ss}(s,t) + \Gamma^i_{jk}(u_s(s,t))u^j_s(s,t)u^k_s(s,t), \\ u(s,0) = \gamma(s) \, \text{for every} \, s \in \mathbb{S}^1. \end{gathered}$$

Where the equation will evolve until we arrive to

$$u^i_{ss}(s,t) + \Gamma^i_{jk}(u_s(s,t))u^j_s(s,t)u^k_s(s,t) = 0.$$

Which is the equation of a geodesic.

In the following section we will introduce the main objects involved in the theorem, harmonic forms and the *Laplace–Beltrami operator*, $\Delta\omega = dd^* + d^*d : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ where d is the exterior derivative and d^* its formal L^2 - adjoint. Finally we list some of the main properties of these forms, focusing specially on their role as critical points of the energy operator for forms. Following this introduction to harmonic we move onto proving the Main Theorem, by using the same strategy as used to prove the former theorem regarding geodesics.

Finally we will list some consequences of the theorem and connections with other branches of mathematics.

An appendix of elliptic and parabolic operators is included at the end of the text.

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es probar el siguiente resultado probado por Hodge (Teorema 3.3).

Teorema (Hodge)**.** *Sea M una variedad compacta y orientable. Entonces, en toda clase de cohomología de de Rham existe un único representante armónico.*

La demostración se hará usando el método del calor, basándonos en la demostración del siguiente teorema ([4, Teorema 3.5.1]).

Teorema (Milgram–Rosenbloom)**.** *Dada una p-forma $\omega_0(x)$ en M de clase $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ para algún $0 < \alpha < 1$, existe una solución única de*

$$\Delta\omega(x,t) = -\frac{d}{dt}\omega(x,t), \text{for } 0 \leq t < \infty\,,$$

con condición inicial

$$\omega(x,0) = \omega_0(x).$$

Además, cuando $t \to \infty$, $\omega(\cdot,t)$ converge $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ a una forma armónica $\mathcal{H}\omega$. Si ω_0 es cerrada, entonces todas las formas $\omega(\cdot,t)$ serán cerradas. Si este es el caso, si además η es una $(n-p)$-forma cocerrada ($d^*\eta = 0$) entonces $\int_M \omega(x,t) \wedge \eta(x)$ no depende de t y se tiene $\int_M \mathcal{H}\omega(x) \wedge \eta(x) = \int_M \omega_0(x) \wedge \eta(x)$

Donde Δ representa el *operador de Laplace–Beltrami* 3.2.2 y ω_0 una p-forma en la clase de cohomología dada. La estrategia consistirá en añadir una variable temporal t a las p-formas, de modo que la “evolución”tenga sentido. Luego, usando técnicas y resultados propias de las ecuaciones en derivadas parciales se probará la existencia y unicidad de la solución. La prueba consistirá en hacer un *descenso de gradiente*, hasta llegar a un punto crítico, la forma armónica (3.2.6). A continuación se introducen brevemente los contenidos de cada sección.

Se comienza con un breve resumen de geometría riemanniana, donde se introducen las definiciones principales, en particular, cohomología de de Rham, métrica riemannianas y formas de volumen.

El siguiente capítulo va dedicado al estudio de las geodésicas, se introduce el concepto de conexión y conexión de Levi–Civita, para posteriormente exponer detalladamente el método del flujo del calor probando el siguiente resultado (Teorema 2.3.3).

Teorema. *Sea M una variedad riemanniana compacta. Entonces en cada clase de homotopía de curvas cerradas existe una geodésica.*

Para la demostración tomaremos una curva cerrada γ en la clase de homotopía correspondiente. Este será el objeto que haremos evolucionar. Se añadirá una variable temporal para poder hacer "evolucionar"la curva:

$$u : \mathbb{S}^1 \times [0, \infty) \to M,$$

e impondremos la siguiente ecuación.

$$\begin{gathered} u_t^i(s,t) = u_{ss}^i(s,t) + \Gamma_{jk}^i(u_s(s,t))u_s^j(s,t)u_s^k(s,t), \\ u(s,0) = \gamma(s)\,\text{para todo}\, s \in \mathbb{S}^1. \end{gathered}$$

Que se hará evolucionar hasta llegar a

$$u_{ss}^i(s,t) + \Gamma_{jk}^i(u_s(s,t))u_s^j(s,t)u_s^k(s,t) = 0.$$

que es la ecuación de la geodésica 2.3

A continuación se introducen las formas armónicas y el operador de Laplace–Beltrami 3.2.2. Se comienza introduciendo aspectos básicos de la cohomología de de Rham, definiendo formas exactas cerradas y coexactas, así como el grupo de cohomología. A continuación se define el operador de Laplace–Beltrami en términos de la diferencial exterior d y su adjunto L^2, $\Delta = dd^* + d^*d$. Se listarán alguna de sus propiedades, haciendo énfasis en su rol como puntos críticos del operador de energía para formas. Finalmente se probará el teorema principal 3.3, usando la misma estructura de demostración que para el teorema 2.3.3 para geodésicas. Finalmente se enuncian algunas consecuencias del teorema, así como su relación con la física.

Se incluye también un apéndice de operadores elípticos y parabólicos

Capítulo 1

Variedades riemannianas

Este primer capítulo estará centrado en definir e introducir los objetos básicos de la memoria, las variedades riemannianas y las p-formas, así cómo asentar la notación que se usará a lo largo de la misma.

Las variedades diferenciables carecen de una herramienta para poder efectuar *mediciones* sobre la misma, es por ello, que se definen las *variedades riemannianas*, que son variedades diferenciables con una estuctura adicional, una *métrica*, que nos va a permitir medir distancias, ángulos y volúmenes sobre la variedad. Se comienza con un breve recordatorio sobre las *variedades (diferenciables)*, objeto a partir del cual construiremos las variedades riemannianas.

1.1. Variedades diferenciables. Campos y formas

Un espacio topológico M es una *variedad topológica de dimensión* n si:

1. M es Hausdorff.

2. M es II AN.

3. M es localmente euclídeo, es decir, todo punto $p \in M$ tiene un entorno U homeomorfo a un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$.

Para ver que M es localmente euclídeo bastará con verlo para un recubrimento $\{U_\alpha\}$ y sus respectivos homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. El par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ se llama *carta de* M y a la colección $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ se llama *atlas*. El par $(M, \mathcal{A})$ (se escribe simplemente M) con M variedad topológica y $\mathcal{A}$ un atlas para X con X el espacio topológico subyacente a M se dice *variedad diferenciable* si todos los cambios de carta $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son diferenciables.

A lo largo de la memoria las variedades se supondrán compactas i.e lo son como espacios topológicos y orientables, concepto que se aclarará en la sección 1.2 y sin borde.

Se define a continuación el *espacio tangente a una variedad en un punto* p T_pM. Se define como el conjunto de todas las *derivaciones* en un punto. Las definimos a continuación: Sea $p \in U$, se define el *germen de funciones en* p como $C^\infty(p) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f\,\text{diferenciable}\}$. Una *derivación* es una función $X : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ tal que:

1. Es $\mathbb{R}$-lineal.

2. Cumple la regla de Leibniz: $X(fg)(p) = X(f)g(p) + f(p)X(q)$.

Finalmente, definimos el espacio tangente T_pM, como el conjunto de derivaciones en el punto p, $T_pM = \{X \in C^\infty(p) | X \text{ derivación}\}$.

Nótese que T_pM tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión la dimensión de la variedad.

Finalmente, introducimos el *espacio cotangente a una variedad* T_p^*M, el espacio de formas de una variedad, que se define como el dual del espacio tangente.

$$T_p^*M = (T_pM)^* = \{\omega : T_pM \to \mathbb{R} \mid \omega\,\text{forma lineal}\}$$

De nuevo, el espacio cotangente tiene estructura de espacio vectorial. Y su base será la base dual de la base del espacio tangente definida de la manera usual:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p^* = dx_p^i.$$

Una p-forma será de la forma $\omega = \omega_I dx^I$. Donde I es el conjunto de índices $i_1, \cdots, i_r$ con $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, $|I| = p$. Denotaremos el conjunto de p-formas en M como $\Omega^p(M)$.

Finalmente introducimos otro operador que será clave en el desarrollo del teorema, la *diferencial exterior.*

Teorema 1.1.1. *La diferencial exterior d, es el único operador*

$$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

con las siguientes propiedades:

1. *Es $\mathbb{R}$-lineal.*

2. $d^2 = 0$.

3. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge \omega_2$ *para* $\omega_1 \in \Omega^r(M)$ *y* $\omega_2 \in \Omega^s(M)$.

4. $df(X) = X(f)$ *con* X *campo vectorial y* f *función diferenciable.*

Cohomología de de Rham

Se estudia en esta sección la cohomología de de Rham, que nos dice en qué medida una forma *cerrada* dista de ser *exacta*. Comenzamos definiendo estas formas:

Definición 1.1.2. Una forma diferenciable $\omega \in \Omega^p(M)$ se dice *exacta* si $d\omega = 0$ y *cerrada* si existe alguna $\tau \in \Omega^{p-1}(M)$ tal que $d\tau = \omega$.

Observación 1.1.3. Toda forma exacta es cerrada, ya que $d \circ d = 0$.

Podemos construir el siguiente complejo de cocadenas:

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{p-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^p(M) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M)$$

Vemos ahora como se construye el *grupo de cohomología de de Rham de grado p de M*, estudiando el núcleo e imagen de la diferencial exterior. Las formas cerradas seran aquellas que estén en el núcleo

$$\mathrm{Ker}(d_p : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))$$

y análogamente, las formas exactas estarán en la imagen

$$\mathrm{Im}(d_{p-1} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))$$

En la definición se ha añadido el subíndice p y $p-1$ para aclarar el espacio de partida para la diferencial exterior en cada caso. En adelante, simplemente se escribirá d. Se define ahora el *grupo de cohomología de de Rham* como:

Definición 1.1.4. Se define el *grupo de cohomología de de Rham de grado p de M* $H^p_{dR}(M)$ como el cociente de espacios vectoriales

$$H^p_{dR}(M) = \mathrm{Ker(d_p)/Im(d_{p-1})}.$$

De esta definición obtenemos que dos formas cerradas $\omega, \tau \in \Omega^r(M)$ serán equivalentes en $\mathrm{H^p_{dR}}(M)$ si su diferencia $\omega - \tau$ es exacta.

Métricas riemannianas

Con estas definiciones ya estamos en posición de dotar de una métrica a la variedad para poder definir una *variedad riemanniana*, que se definirá como una variedad diferenciable equipada con una *métrica riemanniana*, que consiste en un producto escalar sobre T_pM para todo $p \in M$ que varía de manera diferenciable a lo largo de la variedad. Para poder definir adecuadamente esta métrica, se hará uso de las coordenadas locales $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de un punto $p \in M$, y la métrica vendrá dada como una matriz simétrica definida positiva:

$$(g_{ij}(x))_{i,j} \,\mathrm{con}\, i, j = 1, \cdots, n.$$

El producto escalar que nos induce esta métrica se define de la forma usual:

$$\langle v, w\rangle := g_{ij}(\varphi(p))v^i w^j$$

con $v, w \in T_pM$.

Observación 1.1.5. El producto escalar definido en 1.1 está definido punto a punto, sin embargo, también nos permite operar campos vectoriales dando como resultado una función C^∞.

Se introducen a continuación algunas notaciones que se usarán a lo largo de la memoria:

1. $g_{ij}^{-1} = g^{ij}$ para la matriz inversa de la matriz que nos da la métrica, en particular se tiene $g^{il}g_{lm} = \delta_{im}$
2. $g_{ij,k} = \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}$ para las derivadas de las componentes de la métrica.
3. $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}(g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l})$, los símbolos de Christoffel, que se definirán más adelante de manera más detallada en 2.1.1

Observación 1.1.6. A lo largo de la memoria se hará uso la notación de Einstein para sumas. En caso de repetirse un subíndice y superíndice entonces existe un sumatorio en dicho índice.

Al igual que en el caso euclídeo, este producto escalar nos permite definir el módulo de un vector tangente $v \in T_pM$ como: $||v|| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Lema 1.1.7. *Toda variedad diferenciable M puede equiparse con una métrica riemanniana.*

Demostración. Sea un atlas para la variedad M, $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ con $\alpha \in A$ algún conjunto de índices. Consideramos ahora $\{\psi_\alpha\}$ la partición de la unidad subordinada a U_α.
Se toma ahora $v, w \in T_pM$, con $p \in U_\alpha$. Las coordenadas locales de cada vector serán: $v = (v^1_\alpha, \cdots, v^n_\alpha)$ y $w = (w^1_\alpha, \cdots, w^n_\alpha)$.
Se define,

$$\langle v, w\rangle = \sum_{p\in U_\alpha} \psi_\alpha(p) v^i_\alpha w^i_\alpha$$

Esto nos define una métrica riemanniana, ya que tenemos la métrica euclídea en cada U_α y la definimos globalmente gracias a una partición de la unidad. $\square$

1.2. Formas de volumen. Orientabilidad

Dedicaremos esta parte del capítulo introductorio a dar una explicación somera de las *formas de volumen*, que nos permitirán integrar sobre variedades y además nos darán una caracterización de la *orientabilidad* de una variedad.

Comenzamos introduciendo las *formas de volumen*

Definición 1.2.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Una *forma de volumen* se define como una forma de grado n que nunca se anula.

Haciendo uso de esta definición se tiene el siguiente resultado,

Teorema 1.2.2. *Una variedad M es orientable si y solo si tiene una forma de volumen.*

Para el caso de variedades riemannianas, la métrica g nos inducirá una forma de volumen particular, que se denotará vol_g. Esta forma de volumen es la única tal que $\mathrm{vol}_g\ (e_1, \cdots, e_n) = 1$ para toda base ortonormal $\{e_1, \cdots, e_n$ de $T_pM\}$ orientada positivamente en el sentido de álgebra lineal. Obsérvese que es posible construir esta forma de volumen a partir de cualquier n-forma nunca nula multiplicando por un factor de reescalado.

Tomando coordenadas, la forma de volumen que la métrica nos induce naturalmente es $\mathrm{vol}_g = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Tomando una base ortonormal de T_pM y por la definición de la métrica g, al aplicarle la forma obtendremos 1, ya que tendríamos el determinante de la matriz identidad.

1.3. Isomorfismos musicales

Una métrica riemanniana g nos identifica el espacio tangente y el cotangente en cada punto. Vemos como actúa sobre campos vectoriales: Sea $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un campo vectorial, se define el isomorfismo *bemol* $\flat$ como:

$$X^\flat = X_i dx^i.$$

Donde $X_i = g_{ij}X^j$. Por como se define g sabemos que su matriz tiene inversa, que vendrá dada por $(g_{ij}^{-1}$, y se denotará como (g^{ij})). Esto nos permite definir una aplicación inversa para la aplicación bemol. Esta aplicación será la apliación *sostenido* $\sharp$ y se define como sigue: Sea $\omega = \omega_i dx^i$ una forma.

$$\omega^\sharp = \omega^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Donde $\omega^i = g^{ij}\omega_j$

Capítulo 2

Geodésicas y el flujo de calor

Este capítulo se dedica a introducir y aplicar el *método del flujo de calor* para demostrar el siguiente resultado:

Teorema. *Sea M una variedad riemanniana compacta. Entonces, en cada clase de homotopía de curvas cerradas existe una geodésica.*

Esta demostración tendrá la misma estructura que la que se usará más adelante para demostrar el *teorema principal* 3.3. Para poder aplicarlo se introducen los conceptos de *conexión* y *geodésica* así como las herramientas de geometría diferencial necesarias para trabajar con ellas. Comenzaremos introduciendo los conceptos de *longitud* y *energía de una curva*. Se definirá la longitud de una curva $\gamma : [a, b] \to M$ como:

$$L(\gamma) = \int_a^b \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right| dt.$$

Y su energía como:

$$E(\gamma) = \int_a^b \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right|^2 dt.$$

Hablaremos ahora de *geodésicas*. Veremos más adelante que las geodésicas de una variedad riemanniana minimizan la energía (y por tanto la longitud de un camino que une dos puntos sobre la variedad). Resulta que en 3.2.2 se verá que también las *formas armónicas* son minimizadores de la energía. Podemos pensar en una geodésica como una generalización de las rectas del espacio euclídeo, que son las *curvas* que minimizan la distancia entre dos puntos. Además, una línea recta, es la única curva que une dos puntos que tiene alguna *parametrización* con *aceleración* siempre nula (entendiendo la aceleración como la doble derivada de la parametrización respecto del tiempo).

El problema que surge es el siguiente, mientras que la velocidad de una curva que yace en una variedad está bien definida (un campo vectorial que yace en el espacio tangente a la variedad), para la aceleración necesitamos derivar campos vectoriales, para ello se introduce a continuación la noción de *conexión*.

2.1. Conexiones

Una conexión sirve en general como herramienta para derivar secciones de fibrados vectoriales. Se estudiará sólo el caso en el que el fibrado vectorial sobre el que queremos tomar la conexión es el fibrado tangente, cuyas secciones son los campos vectoriales.

Definición 2.1.1. Una *conexión* sobre el fibrado tangente TM se define como una aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

siendo $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales sobre M. Con las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$, siendo f, g funciones diferenciables en M y X, Y, Z campos vectoriales.

2. $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$ con f una función diferenciable en M.

Vemos como es la conexión en coordenadas:

Sean X, Y dos campos vectoriales sobre M, con $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$. Denotaremos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ como ∂_i por comodidad.

$$\nabla_X Y = X^i \nabla_{\partial_i}(Y^j \partial_j) = X^i Y^j \nabla_{\partial_i}\partial_j + X^i \partial_i(Y^j)\partial_j$$

De aquí definiremos los *símbolos de Christoffel* como $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k$. Con esta definición ya tenemos una noción de diferencial de un campo vectorial, ahora queremos estudiar en particular los campos vectoriales que yacen sobre curvas, es decir, sea $\gamma : I \to M$ una curva sobre nuestra variedad, es decir el campo vectorial $V : I \to TM$ definido de tal forma que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ para todo $t \in I$. Se introduce ahora la *derivada covariante*, que es la única conexión que a cada campo vectorial a lo largo de una curva le asocia otro campo vectorial a lo largo de la misma curva.

Definición 2.1.2 (Derivada covariante sobre una curva)**.** Sea M una variedad y ∇ una conexión en TM. Para cada curva diferenciable $\gamma : I \to M$, la conexión determina un único operador llamado *derivada covariante sobre* γ

$$D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$$

Siendo $\mathfrak{X}(\gamma)$ los campos vectoriales sobre γ. Cumpliendo las siguientes propiedades:

1. $D_t(aV + bW) = aD_t V + bD_t W$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

2. $D_t(fV) = f'V + fD_t V$ con f una función diferenciable en I.

3. Si $\tilde{V}(t) = V(\gamma(t))$ entonces

$$D_t V(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\tilde{V}.$$

2.2. Conexión de Levi-Civita

Al igual que podemos equipar una variedad diferenciable con distintas métricas riemannianas, podemos hacer lo propio con las conexiones, ya que para definir una conexión solo necesitamos de la estructura diferenciable de una variedad. Además, queremos elegir una conexión apropiada, que tenga buenas propiedades cuando equipamos a la variedad tanto de una métrica como de una conexión. En esta sección nos dedicaremos a introducir la *conexión de Levi-Civita.*

Seguidamente se introducen los conceptos básicos que forman parte de la definición.

Definición 2.2.1. Un campo vectorial V sobre una curva $\gamma : I \to M$ se dice *paralelo* si $\frac{DV}{dt} = 0$ para todo $t \in I$

Con esto podemos introducir la noción de conexión *compatible* con una métrica.

Definición 2.2.2. Dada una variedad riemanniana M y una conexión ∇. Se dice que la conexión es *compatible* con la métrica g si para toda curva diferenciable γ y para cada par de campos vectoriales paralelos a lo largo de γ V, V' se tiene que $\langle V, V' \rangle_g = k$ con k constante.

Proposición 2.2.3. *Sea M una variedad riemanniana. Una conexión ∇ será compatible con la métrica si y solo si, para todo par de campos vectoriales V, V' sobre una curva se tiene*

$$\frac{d}{dt}\langle V, V' \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, V' \rangle + \langle V, \frac{DV'}{dt}' \rangle$$

Concluimos con una última caracterización de la compatibilidad de una conexión que es consecuencia de esta última definición. Una especie de identidad de Jacobi.

Corolario 2.2.4. *Una conexión ∇ será compatible si y solo si*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

Para todos los campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

Finalmente, se introduce la definición de conexión simétrica.

Definición 2.2.5. Una conexión ∇ se dice *simétrica* si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Para todo campo X, Y. Esta condición también se conoce como conexión *sin torsión.*

Finalmente probamos la existencia y unicidad de la conexión de Levi-Civita.

Definición 2.2.6 (Conexión de Levi-Civita)**.** Dada una variedad riemanniana M. La *conexión de Levi-Civita* es la única conexión que es simétrica y compatible.

Demostración. La condición de compatibilidad se traduce en

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{2.1}$$

$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \tag{2.2}$$

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \tag{2.3}$$

Sumando las dos primeras expresiones y restando la tercera se obtiene

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle + Z\langle X,Y\rangle =& \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle \\ &- \langle X, \nabla_Z Y\rangle \end{aligned}$$

La condición de simetría significaba que $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, usando la simetría del producto escalar se tiene que

$$\begin{aligned} &X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle + Z\langle X,Y\rangle = \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ &= \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle \nabla_X Y, Z\rangle \\ &= \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_X Y\rangle \end{aligned}$$

De aquí obtenemos la siguiente expresión

$$\langle Z, \nabla_X Y\rangle = \frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle + Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle) \tag{2.4}$$

De esta expresión deducimos que la conexión así definida depende unicamente de la métrica, por lo tanto existe y es única. □

A partir de esta definición podemos dar sentido a los símbolos de Christoffel introducidos anteriormente. Como ya se vió en 2.1.1 los símbolos de Christoffel son las coordenadas de la conexión, es decir $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k X_k$ con $X_l, l \in \{i,j,k\}$ campos vectoriales. Entonces observando la ecuación 2.4, tenemos que

$$\Gamma_{ij}^k g_{km} = \frac{1}{2}(\partial_{x_i} g_{jk} + \partial_{x_i} g_{jk} - \partial_{x_i} g_{jk})$$

Donde $g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle$

Finalmente, podemos definir la *aceleración* de una curva γ como el campo vectorial definido por la derivada covariante de la velocidad de la curva.

2.3. Geodésicas

Se dice que una curva es una *geodésica* si su aceleración es siempre nula. Vemos ahora qué aspecto tienen las geodésicas: Sea $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \cdots, \gamma^n(t))$ nuestra curva, su campo de velocidades será de la forma $\gamma_t(t) = (\gamma_t^1(t), \cdots, \gamma_t^n(t)) \in T_{\gamma(t)}M$. Calculamos su derivada covariante:

$$D_t(\gamma_t^i \partial_i) = \gamma_{tt}^k \partial_k + \gamma_t^k D_t(\partial_k) = \gamma_{tt}^k \partial_k + \gamma_t^i \nabla_{\gamma_t} \partial_i = \gamma_{tt}^k \partial_k + \gamma_t^i \gamma_t^j \nabla_{\partial_j} \partial_i = \gamma_{tt}^k \partial_k + \gamma_t^i \gamma_t^j \Gamma_{ij}^k$$

Diremos entonces que la *ecuación de la geodésica* es:

$$\gamma_{tt}^k(t) + \gamma_t^i(t)\gamma_t^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0$$

Una vez vistas las geodésicas, introducimos una serie de construcciones relacionadas que nos simplificarán las operaciones más adelante. Comenzamos con la noción de *coordenadas normales*, para ello, primero necesitamos definir la *exponencial de Riemann*, en función de la cual están definidas: Para un punto fijado $p \in M$ de la variedad tendremos una familia de geodésicas $c_v(t)$ de nuestra variedad que pasan por dicho punto $p \in M$ con velocidad $v \in T_pM$ y que estén definidas para tiempos $t \in [0,1]$. Una vez tengamos estas curvas, definiremos el conjunto de todas las velocidades posibles para cada punto $p \in M$ de la variedad, esto es:

$$V_p = \{v \in T_pM : c_v(t)\,\text{bien definida}\}$$

Esto nos permite definir la *exponencial de Riemann* como la aplicación:

$$\begin{aligned} \exp_p : V_p &\to M \\ v &\mapsto c_v(1) \end{aligned}$$

Está aplicación identifica de manera difeomorfa entornos del $0 \in T_pM$ a entornos de $p \in M$. Podemos definir ahora, considerando la identificación canónica entre T_pM y $\mathbb{R}^n$, por su estructura de espacio vectorial, las *coordenadas normales*, como aquellas dadas por la carta (U, exp_p^{-1}). Usaremos estas coordenadas a la hora de hacer cáclulos debido a la siguiente propiedad:

Proposición 2.3.1. *En coordenadas normales se verifica lo siguiente:*

$$\begin{aligned} g_{ij}(0) &= \delta_{ij}\,\text{para todo}\,i,j \\ \Gamma_{jk}^i(0) &= 0\,\text{para todo}\,i,j,k \end{aligned}$$

De modo que, al tomar la carta resultará que las derivadas de la métrica se anulan y por tanto también los símbolos de Christoffel. Resulta que con esta definición las geodésicas actuan como minimizadores del operador de energía. Lo podemos ver aplicando las *ecuaciones de Euler – Lagrange* al operador de energía definido previamente.

Teorema 2.3.2. *Las geodésicas son mínimos del funcional de energía.*

Demostración. Lo vemos resolviendo las *ecuaciones de Euler–Lagrange* para la energía. En general, para un operador $I(x) = \int_a^b f(t, x(t), x_t(t))dt$, sus ecuaciones de Euler – Lagrange son: $\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_t^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$ para $i = 1 \cdots n$. En este caso, el operador de energía (2) es: $E(\gamma) = \frac{1}{2}\int g_{jk}x_t^j x_t^k dt$. Por lo que $f(t, x(t), x_t(t)) = g_{jk}x_t^j x_t^k$. Entonces se tiene que

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial x_t^i}(g_{jk}x_t^j x_t^k)) = \frac{d}{dt}(g_{ik}x_t^k + g_{ji}x_t^j) = g_{ik}x_{tt}^k + g_{ji}x_{tt}^j + g_{ik,l}x_t^l x_t^k + g_{ji,l}x_t^l x_t^j.$$

Por otra parte
$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = g_{jk,i} x_t^j x_t^k.$$
De donde, aplicando las ecuaciones de Euler–Lagrange:

$$g_{ik} x_{tt}^k + g_{ji} x_{tt}^j + g_{ik,l} x_t^l x_t^k + g_{ji,l} x_t^l x_t^j - g_{jk,i} x_t^j x_t^k = 0$$

Renombrando los índices y operando usando la simetría de g tenemos

$$2 g_{lm} x_t t^m + (g_{lk,m} + g_{jl,k} - g_{jk,l}) x_t^j x_t^k = 0.$$

Multiplicando por $\frac{1}{2} g^{il}$.

$$g^{il} g_{lm} x_t t^m + \frac{1}{2} g^{il} (g_{lk,m} + g_{jl,k} - g_{jk,l}) x_t^j x_t^k = 0.$$

Hemos obtenido así, usando las notaciones introducidas en la observación 1.1 (3), (4):

$$x_{tt}^m + \Gamma_{jk}^i x_t^j x_t^k = 0.$$

Que es la ecuación de la geodésica. □

Llegamos ahora al siguiente teorema:

Teorema 2.3.3. *Sea M una variedad riemanniana compacta. Entonces en cada clase de homotopía de curvas cerradas existe una geodésica.*

Veremos ahora la demostración de este teorema para ejemplificar la estrategia de demostración que se usará posteriormente para la demostración del teorema principal, 3.3. Esta estrategia, conocida como *método del flujo de calor*, usa técnicas propias de las ecuaciones en derivadas parciales para resolver, en este caso, un problema de índole geométrica.

A rasgos generales, el método consiste en elegir un cierto representante geométrico dentro de una clase (en este caso una curva) y hacerlo variar de acuerdo a una ecuación de tipo parabólico de tipo calor, hasta alcanzar un extremal (en este caso un mínimo).

Observación 2.3.4. Ya que aplicaremos resultados de ecuaciones en derivadas parciales el espacio adecuado para trabajar es L^2, el espacio de funciones de cuadrado integrable.

Los pasos que se seguirán tanto aquí como posteriormente en la demostración del teorema son los siguientes:

1. Se plantea la ecuación parabólica, del tipo $Lu = u_t$ (ver A.2.2), dónde L es un operador parabólico como se define en A.2.2 y u es la función que deseamos hacer variar en t y minimizar. Entonces, lo que buscaremos será variar u en dirección contraria a su gradiente, hasta conseguir

$u_t = 0$. Esto es, alcanzamos un extremal de u, y al haber ido en dirección contraria al gradiente, habremos encontrado un mínimo. Para poder realizar esto añadiremos una variable temporal al problema, para que la *evolución* tenga sentido.

2. Vemos la existencia de soluciones a tiempos cortos.

3. Obtenemos un control de las derivadas de orden superior de u independientes del tiempo.

4. Mediante el método del *bootstraping* obtenemos la existencia para tiempos largos, y con un argumento topológico de conexión (en general, tendremos que el intervalo de existencia es abierto y cerrado) probaremos la existencia de soluciones a todo tiempo.

5. Finalmente, se usarán estimaciones para obtener que efectivamente la solución converge al objeto deseado.

Demostración (Teorema 2.3.3). Sea $\gamma(t) = u(t)$ (para aclarar la notación, remarcando que estudiaremos la curva desde el punto de vista de las ecuaciones en derivadas parciales) una curva diferenciable cerrada en una clase de homotopía dada en M. Esto es $u : [a, b] \to M$ tal que $u(a) = u(b)$. Como tendremos que añadir un parámetro temporal de evolución de la curva hacia la geodésica, parametrizaremos u sobre la circunferencia. Esto nos dará la condición de curva cerrada automaticamente, es decir, $u : \mathbb{S}^1 \to M$. Y finalmente añadiendo el parámetro temporal,

$$u : \mathbb{S}^1 \times [0, \infty) \to M.$$

Plantearemos ahora la el problema de valor inicial que deseamos resolver, usando la notación $\frac{\partial}{\partial s} u = u_s$ y $\frac{\partial}{\partial t} u = u_t$ y tomando coordenadas locales:

$$u_t^i(s,t) = u_{ss}^i(s,t) + \Gamma_{jk}^i(u_s(s,t))u_s^j(s,t)u_s^k(s,t) \tag{2.5}$$

$$u(s, 0) = \gamma(s) \, \text{para todo} \, s \in \mathbb{S}^1 \tag{2.6}$$

Y por comodidad, compactando más la notación:

$$u_t^i = u_s^i s + \Gamma_{jk}^i u_s^j u_s^k \tag{2.7}$$

Buscamos ahora entender la ecuación (2.5). En la parte izquierda tenemos u_t^i, que nos mide la "velocidad" con la que la curva evoluciona hacia la geodésica. Y al lado derecho tenemos precisamente la ecuación de la geodésica, por tanto, buscamos ver que esta evolución eventualmente se para, es decir, $u_t^i = 0$, con lo que tenemos una geodésica y se concluye el problema.

Comenzamos ahora la demostración propiamente dicha: como primer paso, buscamos ver que efectivamente la ecuación tiene solución, usando teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Como (2.5) es una ecuación de tipo parabólico, que podemos reescribir de la siguiente forma: $u_t + Lu = f$, siendo L el operador parabólico, que en coordenadas es, $(Lu)^i = \frac{\partial^2}{\partial s^2} u^i + \Gamma_j^i k \frac{\partial}{\partial s} u^j \frac{\partial}{\partial s} u^k$ con $u = \gamma$

como condición inicial, el teorema A.2.6 nos dice que si $f = \Gamma^i_{jk} u^j_s u^k_s$ y $g = \gamma$ son diferenciables, entonces existe una solución diferenciable única para el problema. Esta solución existirá en un intervalo $[0, t_0)$, lo cuál implica que el intervalo maximal de existencia de solución es no vacío y abierto.

Vamos a ver ahora que la velocidad de cada curva u_s está acotada para todo tiempo. De estar acotada, podremos reescribir nuestra ecuación 2.7 como $u^i_t - u^i_{ss} = f$ con f acotada, y desde ahí podremos aplicar teoría de ecuaciones en derivadas parciales para avanzar hacia la prueba.

Tenemos ahora,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)(g_{ij}(u(s,t))u^i_s(s,t)u^j_s(s,t)) &= g_{ij}u^i_{sss}u^j_s + g_{ij}u^i_{ss}u^j_{ss} + g_{ij,k}u^k_s u^i_{ss}u^j_s + g_{ij}u^i_{ss}u^j_{ss} \\ +g_{ij}u^i_s u^j_{sss} + g_{ij,k}u^k_s u^i_s u^j_{ss} &+ g_{ij,k}u^k_{ss}u^i_s u^j_s + g_{ij,k}u^k_s u^i_{ss}u^j_s + g_{ij,k}u^k_s u^i_s u^j_{ss} + g_{ij,kl}u^l_s u^k_s u^i_s u^j_s \\ &\quad - g_{ij}u^i_{st}u^j_s - g_{ij}u^i_s u^j_{st} - g_{ij,k}u^k_t u^i_s u^j_s\end{aligned}$$

Ahora, considerando la simetría $g_{ij} = g_{ji}$, y agrupando:

$$2g_{ij}u^i_{sss}u^j_s + 2g_{ij}u^i_{ss}u^j_{ss} + 4g_{ij,k}u^k_s u^i_{ss}u^j_s + g_{ij,k}u^k_{ss}u^i_s u^j_s + g_{ij,kl}u^l_s u^k_s u^i_s u^j_s - 2g_{ij}u^i_{st}u^j_s - g_{ij,k}u^k_t u^i_s u^j_s$$

Hacemos el cambio a *coordenadas normales* 2.3.1 para simplificar las cuentas, ya que en coordenadas normales $g_{ij,k} = 0$, entonces:

$$2g_{ij}u^i_{sss}u^j_s + 2g_{ij}u^i_{ss}u^j_{ss} - 2g_{ij}u^i_{st}u^j_s$$

Ahora, de 2.7 observamos que $u^i_{st} = u^i_{sss}$ (ya que los símbolos de Christoffel en coordenadas normales desaparecen). Finalmente:

$$2g_{ij}u^i_{sss}u^j_s + 2g_{ij}u^i_{ss}u^j_{ss} - 2g_{ij}u^i_{st}u^j_s = 2g_{ij}u^i_{ss}u^j_{ss}$$

Recapitulando se tiene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)(g_{ij}(u(s,t))u^i_s(s,t)u^j_s(s,t)) = \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\langle u_s, u_s\rangle = 2g_{ij}u^i_{ss}u^j_{ss} = 2\langle u_{ss}, u_{ss}\rangle \geq 0$$

Hemos obtenido así una *subsolución de la ecuación del calor*. A.2.3.

A partir de aquí podemos aplicar el *principio del máximo para operadores parabólicos* A.2.4 que nos dice que u es no creciente.

Ahora que hemos verificado que la solución existe para un intervalo $[0, T)$ y reiterando el procedimiento anterior, tomando esta solución como nueva curva inicial concluimos que la solución para el problema 2.5 existe para todo tiempo.

Vemos ahora que la energía decrece independientemente de s y que es no negativa (entonces por el método convergerá a una geodésica):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(u(\cdot,t)) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{S}^1} g_{ij}u^i_s u^j_s &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^1} g_{ij}u^i_{st}u^j_s + g_{ij}u^i_s u^j_{st} + g_{ij,k}u^k_t u^i_s u^j_s \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^1} 2g_{ij}u^i_{st}u^j_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^1} g_{ij,k}u^k_t u^i_s u^j_s\end{aligned}$$

Integrando por partes en la primera integral, tomando y considerando que estamos en coordendas normales, $g_{ij,k=0}$ entonces la segunda integral es 0, se tiene:

$$\frac{d}{dt}E(u(\cdot,t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^1} -2g_{ij}u^i_{ss}u^j_s$$

Ahora, usando que $u^i_{ss} = u^i_t$ se tiene finalmente:

$$\frac{d}{dt}E(u(\cdot,t)) = -\int_{\mathbb{S}^1} g_{ij}u^i_t u^j_t = -\int_{\mathbb{S}^1} ||u_t(s,t)||^2 < 0$$

tenemos ahora que la energía decrece para todo tiempo, por lo tanto, podemos encontrar una sucesión de tiempos (t_n) tal que

$$\lim_{n\to\infty} E(u(\cdot,t_n)) = 0$$

Es decir, existe una sucesión tal que la energía converge a 0 (y por lo tanto obtenemos una geodésica). Vemos ahora, con un argumento de convexidad, que esto ocurre para cualquier sucesión de tiempo:

$$\partial_{tt}E(u(\cdot,t)) = \partial_t\left(-\int_{\mathbb{S}^1} g_{ij}u^i_t u^j_t\right) = -\int_{\mathbb{S}^1} 2g_{ij}u^i_{tt}u^j_t = -\int_{\mathbb{S}^1} 2g_{ij}u^i_{sst}u^j_t = \int_{\mathbb{S}^1} 2g_{ij}u^i_{st}u^j_{st} \geq 0$$

Esto nos dice que $\partial_t E$ cada vez decrece más, por lo tanto, como $E \geq 0$ no hay otra opción que $\partial_t E$ converja a 0 y, por lo tanto, el resultado es cierto para todo tiempo. Esto significa que la energía alcanza un mínimo, en particular la geodésica. $\square$

Capítulo 3

Formas armónicas

En este capítulo se introducirán los objetos fundamentales involucrados en el teorema principal, *las formas armónicas y el operador de Laplace – Beltrami.*

3.1. El operador $*$ de Hodge

Para poder proseguir necesitaremos operar con formas. La métrica g de la variedad nos induce un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en el espacio tangente a la variedad. Además, tenemos los isomorfismos musicales 1.3, que nos identifican el espacio tangente y el cotangente, por lo que esta métrica nos induce una métrica en el espacio cotangente y esta induce un producto escalar entre formas en este espacio $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que vendrá definido de la siguiente forma:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega^p(M) \times \Omega^p(M) \to \Omega^0(M)$$
$$\langle \omega, \eta \rangle = \langle \omega^\sharp, \eta^\sharp \rangle$$

En coordenadas:

$$\langle \omega, \eta \rangle = \omega^i \eta_i$$

Finalmente podemos definir el *operador $*$ de Hodge.*

Definición 3.1.1 (Operador $*$ de Hodge)**.** Se define el *operador * de Hodge* como el único operador $*_g : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}$ que verifica la siguiente igualdad,

$$\omega \wedge *_g \eta = \langle \omega, \eta \rangle \mathrm{vol}_g$$

Donde vol_g es la forma de volumen inducida por la métrica.

En coordenadas,

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \mapsto dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-p}}$$

Verificando que la base del cotangente, $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-p}}$ está orientada positivamente.

Definición 3.1.2. Se define el *operador $*$ de Hodge*, como el único operador lineal $*$ tal que:

$$* : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}$$
$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \mapsto dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-p}}$$

Verificando que la base $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-p}}$ está orientada positivamente.

Es decir, el operador $*$ de Hodge, me manda una base de $\Omega^p(M)$ en una base de $\Omega n - p$ de tal forma que la base $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-p}}$ está orientada positivamente.

Se ven a continuación alguna de sus propiedades:

1. $*(1) = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$

2. $*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = \pm 1$ dependiendo de la orientación de la base.

3. $** = (-1)^{p(n-p)}$.

Este operador depende de la métrica, ya que es el único que verifica la siguiente igualdad

$$\omega \wedge *\eta = \langle \omega, \eta \rangle \mathrm{vol}$$

Donde vol es la forma de volumen inducida por la métrica.

3.2. Operador de Laplace–Beltrami

Para poder definir el operador de Laplace - Beltrami, necesitaremos trabajar en L^2. Definimos entonces el producto L^2 para $\omega, \eta \in \Omega^p(M)$ como:

$$(\omega, \eta) = \int_M \langle \omega, \eta \rangle * (1) = \int_M \omega \wedge *\eta$$

Y consecuentemente, su norma L^2 definida como:

$$||\omega|| = (\omega, \omega)^{1/2}$$

Definición 3.2.1. El operador d^* es el adjunto formal de d, es decir, para $\omega \in \Omega^p(M)$ y $\eta \in \Omega^{p-1}$

$$(d\omega, \eta) = (\omega, d^*\eta)$$

Es decir, $d^* : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$. Su expresión es la siguiente: $d^* = (-1)^{n(p+1)+1} * d*$. [4, Lema 3.3.4] Una p-forma η se dice *coexacta* si existe una $p+1$-forma ω tal que $\eta = d^*\omega$

Finalmente podemos definir *el operador de Laplace - Beltrami*, en función del cuál se definen las funciones *armónicas*:

Definición 3.2.2. El *operador de Laplace - Beltrami* Δ, en adelante *laplaciano*, se define como:

$$\Delta = dd^* + d^*d : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$$

Una p-forma ω se dice *armónica* si:

$$\Delta\omega = 0$$

Observación 3.2.3. Se tiene que $\Delta\omega = 0$ si y solo si $d\omega = 0$ y $d^* = 0$

Demostración. Vemos simplemente la primera implicación.

Como $\Delta\omega = 0$, tenemos que $(\Delta\omega, \omega) = 0$. Entonces,

$$0 = ((dd^* + d^*d)\omega, \omega) = (dd^*\omega, \omega) + (d^*d\omega, \omega) = (d^*\omega, d^*\omega) + (d\omega, d\omega) = ||d^*\omega||^2 + ||d\omega||^2$$

De aquí se obtiene que $||d\omega|| = ||d^*\omega|| = 0$, por lo que $d\omega = d^*\omega = 0$. La otra implicación es inmediata por la definición de Δ. □

Se estudian a continuación algunas de las propiedades claves de Δ que se usarán más adelante intensivamente,

Proposición 3.2.4. *El laplaciano es autoadjunto, en el sentido de* $(\Delta\omega, \eta) = (\omega, \Delta\eta)$.

Demostración. Calculando directamente,

$$\begin{aligned}(\Delta\omega, \eta) &= ((dd^* + d^*d)\omega, \eta) = (dd^*\omega, \eta) + (d^*d\omega, \eta) \\ &= (d^*\omega, d^*\eta) + (d\omega, d\omega) = (\omega, dd^*\eta) + (\omega, d^*d\eta) = (\omega, \Delta\eta)\end{aligned}$$

Concluyendo así la demostración. □

Se tiene también el siguiente resultado que será relevante más adelante en 3.4.3,

Proposición 3.2.5. *La estrella de Hodge y el laplaciano conmutan* $*\Delta = \Delta*$.

Demostración. Ya que el operador $*$ es lineal lo vemos para cada término de Δ.

$*(dd^*) = *(d(-1)^{n(p+1)+1}*d*) = (-1)^{n(p+1)+1}*d*d*$. Ahora como se ve en la proposición 3.2.1 tenemos que $*d* = (-1)^{n(p+1)+1}d^*$. Usando esto obtenemos que $*(dd^*) = (-1)^{n(p+1)+1}(-1)^{n(p+1)+1}d^*d* = d^*d*$ De manera similar tenemos que, $*(d^*d) = *((-1)^{n(p+1)+1}*d*d)$. De nuevo, de 3.2.1, obtenemos que $d^** = (-1)^{n(p+1)+1}*d**$, y de la propiedad 3 obtenemos que $d^** = (-1)^{n(p+1)+1}(-1)^{p(n-p)}*d$, usando esto tenemos que $*(d^*d) = (-1)^{n(p+1)+1}**d*d = d(-1)^{n(p+1)+1}(-1)^{p(n-p)}*d = dd^**$. Y con esto se concluye la prueba. □

Finalmente, verificamos que una forma armónica es un punto extremal de la energía.

Proposición 3.2.6. *Una forma* $\omega \in \Omega^p(M)$ *es armónica si y solo si es un extremal de energía en el sentido de* $\frac{d}{dt}E(\omega + t\eta)|_{t=0} = 0$ *para toda forma* $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$.

Demostración. Vemos ambas implicaciones:

Sea ω una forma armónica, es decir, $\Delta\omega = 0$, y por tanto, $d\omega = 0$ y $d^* = 0$, luego, se define la energía como $E(\omega) = \frac{1}{2}||d\omega||^2 + \frac{1}{2}||d^*\omega||^2$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\omega + t\eta)|_{t=0} &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}(d\omega + td\eta, d\omega + td\eta) + \frac{d}{dt}(d^*\omega + td^*\eta, d^*\omega + td^*\eta)\right)|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}(td\eta, td\eta) + \frac{d}{dt}(td^*\eta, td^*\eta)\right)|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\left(2(d\eta, td\eta) + 2(d^*\eta, td^*\eta)\right)|_{t=0} \\
&= (d\eta, 0) + (d^*\eta, 0) = 0
\end{aligned}$$

Donde en la primera igualdad se ha usado que $\Delta\omega = 0$ y en la segunda la simetría de $(\cdot,\cdot)$

Vemos ahora la implicación contraria, tenemos $\frac{d}{dt}E(\omega + t\eta)|_{t=0} = 0$ para toda forma $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$, entonces:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}(d\omega + td\eta, d\omega + td\eta) + \frac{d}{dt}(d^*\omega + td^*\eta, d^*\omega + td^*\eta)\right)|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}(2(d\eta, d\omega + td\eta) + 2(d^*\eta, d^*\omega + td^*\eta))|_{t=0} \\
&= (d\eta, d\omega) + (d^*\eta, d^*\omega)
\end{aligned}$$

Ahora, por definición de d^*, tenemos:

$$(d\eta, d\omega) + (d^*\eta, d^*\omega) = (\eta, d^*d\omega) + (\eta, dd^*\omega) = (\eta, (d^*d + dd^*)\omega) = 0$$

Como se tiene que verificar para cualquier η, necesariamente $(d^*d + dd^*)\omega = 0$, concluyendo la demostración. □

Además tenemos también el siguiente resultado,

Teorema 3.2.7. *Las formas armónicas son las que minimizan la norma L^2.*

Demostración. Buscamos ahora un extremal (mínimo) de la norma de una forma. En el teorema trabajaremos en clases de cohomología, por lo que con minimizar la norma dentro de cada clase será suficiente. Para una forma ω en una clase dada, las formas cohomólogas a ella serán de la forma $\omega_0 = \omega + d\alpha$, es decir, difiere en una forma exacta del resto de los elementos de la clase.

Vemos que, efectivamente, Δ minimiza la norma en el siguiente sentido:

$$\frac{d}{dt}(\omega + td\alpha, \omega + td\alpha)|_{t=0} = 0$$

Para cualquier $\alpha \in \Omega^{p-1}$.

Esto es:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(\omega + td\alpha, \omega + td\alpha)|_{t=0} = 2\left(\frac{d}{dt}(\omega + td\alpha), \omega + td\alpha\right)|_{t=0} = 2(d\alpha, \omega + td\alpha)|_{t=0} \\
&= 2(d\alpha, \omega) = 2(\alpha, d^*\omega)
\end{aligned}$$

Esto nos dice que $d^*\omega = 0$, ya que la igualdad se da para cualquier $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$. En particular, esto nos dice que ω será extremal para la norma si verifica que $d\omega = 0$, pero esto es claro ya que todas las formas de la clase son exactas, y $d^*\omega = 0$, lo cuál por el teorema 3.2.3 es equivalente a que la forma es armónica ($\Delta\omega = 0$). □

3.3. Teorema principal

En esta sección procederemos a demostrar el *teorema principal.* Para ello seguiremos la misma estructura de demostración que para el teorema 2.3.3. En particular el teorema nos dice lo siguiente:

Teorema (Hodge)**.** *Sea M una variedad compacta y orientable. Entonces, en toda clase de cohomología de de Rham existe un único representante armónico.*

Es decir, en cada clase de cohomología habrá una forma ω que verifica $\Delta\omega = 0$. Nuestra método para probar este resultado consistirá en partir de una cualquiera forma en la clase de cohomología ω_0 y hacerla *variar* hasta llegar al representante armónico. Para que esta variación tenga sentido, tendremos que añadir una variable temporal $t \in [0, \infty)$ a la forma, es decir, las formas de nuestra demostración no solo dependerán de su posición $x \in M$ en la variedad. Esta variación la interpretaremos como una solución para la siguiente ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico (ecuación de tipo calor):

$$\Delta\omega(x,t) = -\frac{d}{dt}\omega(x,t) \tag{3.1}$$

Cuya condición inicial será:

$$\omega(x,0) = \omega_0(x)$$

De nuevo, interpretemos los elementos que forman parte de (3.1). En la parte izquierda de la igualdad tenemos $\Delta\omega$, e interpretaremos Δ como el operador que nos minimiza la norma L^2 de nuestra forma, y lo haremos variar (parte derecha) en el sentido contrario del “ gradiente” de la forma, de tal manera que buscamos un mínimo, ya que como se vió en 3.2.6 las formas armónicas son mínimos de la energía. El método finalizará cuándo se consiga que $\frac{d}{dt}\omega(x,t) = 0$, es decir, cuando la forma haya dejado de “variar ”.

Enunciaremos a continuación una serie de resultados de carácter general de teoría de ecuaciones en derivadas parciales A.2.2 que usaremos como argumentos durante la demostración. Estos resultados pueden ser trasladados a variedades riemannianas compactas por el teorema A.2.8.

Teorema 3.3.1 (Existencia de soluciones)**.** *Sea $\omega_0 \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega^p(M))$, para algún $\alpha \in (0,1)$. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que 3.1 tiene solución en $[0, t_0)$, además, esta solución también es de clase $\mathcal{C}^{2,\alpha}$*

Teorema 3.3.2 (Unicidad de soluciones)**.** *Las soluciones de 3.1 son únicas. Si hay dos soluciones ω_1 y ω_2 para tiempos $t \in [0,T]$ con la misma condición inicial, entonces coinciden en $[0,T]$. Además,* *satisfacen la propiedad de semigrupo, es decir, si $\omega(\cdot,t)$ resuelve la ecuación, entonces también $\omega(\cdot,t+s)=\omega_s(\cdot,t)$ con $\omega_s(\cdot,t)$ solución para el problema con valor incial $\omega_s(\cdot,0)=\omega(\cdot,s)$*

Observación 3.3.3. Con estos dos resultados, y considerando la solución del primer problema como valor inicial del siguiente podemos deducir la existencia de solución para todo tiempo

Teorema 3.3.4 (Estimación normas)**.** *Una solución ω para 3.1, con valor inicial $\omega_0 \in L^2$ y definida en $0 \geq t \geq T$ verifica la siguiente estimación para cualquier ε con $0 < \varepsilon \geq t \geq T$*

$$||\omega(\cdot,t)||_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(M)} + ||\frac{\partial}{\partial t}\omega(\cdot,t)||_{\mathcal{C}^{\alpha}(M)} \leq K$$

Donde K sólo depende de la norma L^2 de la forma, ε y de la geometría de la variedad.

Observación 3.3.5. Como corolario de este teorema se tiene el *teorema de Ascoli - Arzela*, que nos dice que si tenemos una sucesión acotada (f_n) en un espacio de Hölder, $\mathcal{C}^{\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$ entonces podemos encontrar una sucesión convergente en cualquier espacio de Hölder $\mathcal{C}^{\alpha'}$ con $\alpha' < \alpha$.

Finalmente, se usarán ciertas estimaciones de las derivadas de la norma y energía, que nos permitirán deducir la convergencia del método.

Teorema 3.3.6. *Se tienen las siguientes estimaciones:*

1. $\frac{d}{dt}||\omega(\cdot,t)||^2 \leq 0$. *Es decir, la norma de la forma es decreciente.*
2. $\frac{d^2}{dt^2}||\omega(\cdot,t)||^2 \geq 0$. *Es decir, la norma es convexa.*
3. $\frac{d}{dt}E(\omega(\cdot,t)) \leq 0$. *Es decir, la energía decrece.*

Demostración. $\frac{d}{dt}||\omega(\cdot,t)||^2 = \partial_t(\omega,\omega) = 2(\partial_t\omega,\omega) = -2(\Delta\omega,\omega) \leq 0.$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}||\omega(\cdot,t)||^2 &= \partial_t(-2(\Delta\omega,\omega)) = \partial_t(-2((dd^* + d^*d)\omega,\omega)) \\
&= \partial_t(-2((dd^*\omega,\omega) + (d * d\omega,\omega))) \\
&= \partial_t(-2((d^*\omega,d^*\omega) + (d\omega,d\omega))) \\
&= -4((d^*\partial_t\omega,d^*\omega) + (d\partial_t\omega,d\omega)) \\
&= 4((\Delta\omega,dd^*\omega) + (\Delta\omega,d^*d\omega)) \\
&= 4(\Delta\omega,\Delta\omega) \geq 0.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\partial_t E(\omega(\cdot,t)) &= \partial_t(\frac{1}{2}(d\omega,d\omega) + \frac{1}{2}(d^*\omega,d^*\omega)) \\
&= \frac{1}{2}2(d\partial_t\omega,d\omega) + \frac{1}{2}2(d^*\partial_t\omega,d^*\omega) \\
&= (\partial_t\omega,dd^*\omega) + (\partial_t\omega,d^*d\omega) \\
&= -(\Delta\omega,\Delta\omega) \leq 0.
\end{aligned}$$

□

Con estos resultados ya podemos demostrar el teorema.

Teorema 3.3.7 (Hodge). *Sea ω_0 una p - forma de clase $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ para algún $\alpha \in (0,1)$. Entonces existe una única solución para:*

$$\Delta\omega(x,t) = -\frac{d}{dt}\omega(x,t)$$
$$\omega(x,0) = \omega_0(x)$$

Demostración. Por el primer teorema 3.3.1, como $\omega_0 \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(M)$ entonces 3.3.7 tiene solución, y por el segundo teorema esta solución es única y esta definida para todo tiempo.

Ahora, vemos que la solución es precisamente la forma armónica deseada.

Sabemos, por 3.3.6, que como la norma de ω decrece para todo tiempo, existirá alguna sucesión de tiempos $(t_n) \to \infty$ tal que $||\partial_t\omega(\cdot, t_n)|| \to 0$.

Ahora, ya que tenemos una sucesión acotada en un espacio de Hölder $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, aplicando el teorema de Ascoli - Arzela, tenemos una subsucesión convergente en $\mathcal{C}^{2,\alpha'}$ para todo $\alpha' < \alpha$. Es decir, tomando $\Delta\omega(\cdot, t_n) = -\partial_t\omega(\cdot, t_n)$, obtenemos que $\Delta\omega(\cdot, t_n) \to 0$ con $t_n \to \infty$ en algún espacio de Hölder $\mathcal{C}^{2,\alpha'}$. Es decir, $\omega(\cdot, t_n)$ converge a una forma armónica $\mathcal{H}\omega$.

Finalmente, veremos que la elección de la forma inicial en cada clase de cohomología no cambia el representante armónico al que converge la solución.

Sea $\omega_1(x,t) := \omega(x,t) - \mathcal{H}\omega(x)$. Vemos que ω_1 está en la misma clase que ω ya que difieren en una forma armónica, en particular, exacta. Además, ω_1 también es solución de 3.3.7, ya que $\Delta\mathcal{H}\omega = 0$.

Repitiendo el primer paso de la demostración obtenemos que $\omega_1 \to \mathcal{H}\omega$ cuando $t \to \infty$, entonces, $||\omega(\cdot, t) - \mathcal{H}\omega(\cdot)|| \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir, $\omega(x,t) \to \mathcal{H}\omega(x)$ en $\mathcal{C}^{2,\alpha'}$

□

Obtenemos de manera inmediata el siguiente corolario,

Corolario 3.3.8. *Sea M una variedad compacta orientada. Entonces se tiene el siguiente isomorfismo.*

$$\phi : \ker\Delta \to H^k_{dR}(M)$$
$$\omega \mapsto [\omega]$$

donde $\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$

3.4. Algunas consecuencias

En este capítulo nos dedicaremos a ver algunos resultados básicos de la teoría de Hodge. Entre ellas destaca el teorema de descomposición de Hodge, que nos dice que toda p-forma puede expresarse como suma directa de una diferencial una codiferencial y una forma armónica. Otra consecuencia será la finito dimensionalidad de los grupos de cohomología de de Rham para variedades compactas orientables. Finalmente, se probará la dualidad de Poincaré, que nos identifica la homología singular de una variedad de grado p con el $n-p$ grupo de cohomología de de Rham.

Uno de los principales resultados es el *teorema de descomposición de Hodge*, que nos permite descomponer cualquier forma ω como suma de una forma exacta, una forma coexacta y una forma armónica. Para la siguiente demostración usaremos la estructura L^2 de $\Omega^p(M)$, es decir, lo miraremos como el espacio de Hilbert de p-formas con la norma L^2 definida anteriormente en 3.2 $\Omega^p_{L^2}(M) = (\Omega^p(M), (\cdot,\cdot)_{L^2})$.

Teorema 3.4.1 (Descomposición de Hodge)**.** *Sea M una variedad compacta orientada. Entonces se tiene*

$$\Omega^p(M) = \overline{\mathrm{im}d} \oplus \overline{\mathrm{im}d^*} \oplus \left(\overline{\mathrm{im}d}^{\perp} \cap \overline{\mathrm{im}d^*}^{\perp} \right)$$

Donde $\overline{A}$ denota la clausura L^2 de A.

Resultará que $\overline{\mathrm{im}d}^{\perp} \cap \overline{\mathrm{im}d^*}^{\perp}$ es precisamente el conjunto de formas armónicas, por lo tanto la descomposición quedará

$$\Omega^p(M) = \overline{\mathrm{im}d} \oplus \overline{\mathrm{im}d^*} \oplus \ker\Delta$$

Demostración. Ya que hemos tomado la clausura L^2 de cada uno de los conjuntos de la descomposición, podemos aplicar el Teorema de descomposición de espacios de Hilbert A.1.9. Observamos que $\mathrm{im}d$ y $\mathrm{im}d^*$ son ortogonales, ya que, sea $\omega \in \mathrm{im}d$ y $\eta \in \mathrm{im}d^*$, tenemos que $(\omega, \eta) = (d\alpha, d^*\beta) = (d^2\alpha, \beta) = 0$. Por lo tanto son ortogonales, entonces podemos descomponer $\Omega^p(M) = \mathrm{im}d \oplus \mathrm{im}d^* \oplus (\mathrm{im}d^{\perp} \cap \mathrm{im}d^{*\perp})$. Bastará con ver que $(\mathrm{im}d^{\perp} \cap \mathrm{im}d^{*\perp}) = \ker\Delta$. $\omega \in \mathrm{im}d^{\perp}$ significará que $(\omega, \alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \mathrm{im}d$, es decir, las formas de la forma $d^*\eta = 0$. De manera análoga, $\omega \in \mathrm{im}d^{*\perp}$ significará que $(\omega, \alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \mathrm{im}d^*$, es decir, las formas de la forma $d\eta = 0$. Por lo tanto, las que verifiquen ambas serán formas armónicas. Lo cual concluye la prueba. □

Corolario 3.4.2. *Los grupos de cohomología de de Rham para variedades compactas tienen dimensión finita.*

Demostración. Ya que hemos identificado el núcleo del laplaciano con el grupo de cohomología en el corolario 3.3.8 y por A.2.7 sabemos que el núcleo es finito dimensional. □

Se tiene también el siguiente isomorfismo, consecuencia de la conmutatividad de la estrella de Hodge con el laplaciano.

Corolario 3.4.3. $H^k_{dR}(M) = H^{n-k}_{dR}(M)$

Demostración. Como se vió en la proposición 3.4.3, se tiene que $*\Delta = \Delta*$, esto nos dice que, para una forma cualquiera ω, se tendrá que $*\Delta\omega = \Delta * \omega$, de dónde se observa que si ω es armónica también lo será $*\omega$. Este resultado nos establece un isomorfismo $\ker\Delta_k \to \ker\Delta_{n-k}$, definido como $\omega \mapsto *\omega$. Como consecuencia del resultado anterior se establece el isomorfismo deseado. □

Se concluye la sección con una prueba de la *dualidad de Poincaré.*

Teorema 3.4.4 (Dualidad de Poincarè)**.** *Sea $H_p(M)$ el p-ésimo grupo de homología de M, variedad diferenciable y compacta definido como $(H^p_{dR}(M))^*$. Entonces se tiene que la siguiente aplicación*

$$H_p(M) \to H^{n-p}_{dR}$$

es un isomorfismo

Demostración. La identificación anterior, el corolario 3.4.3, nos permite la siguiente prueba elemental. Viendolos como espacios vectoriales, serán isomorfos si tienen la misma dimensión, entonces sabemos que un espacio vectorial y su dual tienen la misma dimensión. De aqui tenemos que $\dim H_p(M) = \dim H^p_{dR} = H^{n-p}_{dR}$, donde la última igualdad viene dada por el resultado anterior. □

Este teorema tiene un importante corolario.

Corolario 3.4.5. $H^n_{dR}(M) \cong \mathbb{R}$

Demostración. $H^n_{dR} \cong H^0_{dR}(M) \cong \ker\Delta_0$. Donde $\Delta_0 : \Omega^0(M) \to \Omega^0(M)$ y ya que las únicas funciones continuas sobre una variedad compacta sin borde son las constantes por el principio del máximo, se tiene que $\ker\Delta_0 \cong \mathbb{R}$ □

3.5. Formas armónicas y electromagnetismo

Para acabar la memoria, se introducen brevemente las ecuaciones de Maxwell en el caso particular estático. Resulta ventajoso reescribir las ecuaciones de Maxwell en términos de formas diferenciables, y así poder aplicar los resultados de la memoria. Para esta sección trabajamos en una región compacta de $\mathbb{R}^4$

Esta sección se basa en el primer capítulo de [1], donde se podrán encontrar los detalles omitidos.

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \tag{3.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \tag{3.5}$$

Donde $\nabla\cdot$ representa la *divergencia* y $\nabla\times$ el *rotacional.* Los elementos que participan en las ecuaciones son, $\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es el *campo eléctrico* y $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es el *campo magnético*, ρ es la *densidad de carga* y $\mathbf{j}$ la *densidad de corriente.*

Para nuestro caso, asumiremos las condiciones más simples posibles: vacío y estática. Luego las ecuaciones serán las siguientes

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3.6}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{3.7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{3.8}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \tag{3.9}$$

Una vez tenemos planteadas las ecuaciones en su forma *clásica*, comenzamos a plantearlas en términos de formas diferenciables. Para ello es necesario tener en mente la siguiente observación,

Observación 3.5.1. Se tiene la siguiente situación particular en $\mathbb{R}^3$, $\dim(\Omega^1(\mathbb{R}^3)) = \dim(\Omega^2(\mathbb{R}^3))$ $= 3$. Es decir, los campos vectoriales de $\mathbb{R}^3$ pueden ser vistos tanto como 1-formas, como como 2-formas. Además, se tienen las siguientes definiciones,

- $\Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ es el *gradiente.*
- $\Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ es el *rotacional.*
- $\Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ es la *divergencia.*

Para nuestro objetivo nos convendrá considerar el campo eléctrico $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ como una 1-forma y el campo magnético $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ como una 2-forma, luego

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

Nótese que $*(dx) = dy \wedge dz$, $*(dy) = dz \wedge dx$ y $*(dz) = dx \wedge dy$.

Con esto, ya podemos reescribir el primer par de ecuaciones en términos de formas. Usando la observación 3.5.1como $dB = 0$ y $dE = 0$. Además, podemos unificar ambos campos en el *campo electromagnético*, para el cuál necesitaremos vivir en $\mathbb{R}^4$. Para los cálculos que siguen es conveniente separar $\mathbb{R}^4$ en sus componentes espaciales y temporal (los detalles explícitos se encuentran en la referencia citada anteriormente).

$$F = B + E \wedge dt$$

También lo veremos como una 2-forma, ya que, viendolo así conseguimos simplificar aún más el primer par de ecuaciones y conseguimos expresarlas como

$$dF = 0 \tag{3.10}$$

Procediendo de manera análoga para el segundo par, y atendiendo a resultados físicos, se obtiene que el segundo par de ecuaciones es equivalente a

$$*d * F = 0$$

Entonces hemos conseguido reescribir las ecuaciones de Maxwell 3.6 como

$$dF = 0 \tag{3.11}$$

$$*d * F = 0 \tag{3.12}$$

Observese que tenemos por la definición 3.2.1 que $d^* = (-1)^{4(2+1)+1} * d*$, luego la expresión 3.12 puede reescribirse como $-d^*F = 0$, que equivale a $d^*F = 0$. Entonces finalmente, hemos llegado a la siguiente expresión,

$$dF = 0$$

$$d^*F = 0$$

Estas ecuaciones son equivalentes a que F sea una forma armónica y, sabemos que tendrán solución por el teorema principal, que nos garantiza la existencia y unicidad de dicha forma armónica en cada una de las clases de cohomología.

Apéndice A

Operadores elípticos y parabólicos

Todos los resultados de esta sección provienen de [3, Capítulos 5, 6 y 7]. Se comienza introduciendo los espacios de funciones sobre los que se darán los resultados que se usarán en el trabajo.

A.1. Espacios de funciones

Definición A.1.1. Una *norma* sobre un espacio vectorial X se define como una aplicación $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ para todo $u, v \in X$

2. $||\lambda u|| = |\lambda| ||u||$ para todo $u \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

3. $||u|| = 0$ si y solo si $u = 0$

Definición A.1.2. Un espacio normado se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición A.1.3 (Espacio de Banach)**.** Un espacio es *Banach* si es normado y completo con la métrica definida por la norma.

Se destacan algunos espacios de funciones Banach que aparecerán en la memoria:

Definición A.1.4 (Espacio Hölder)**.** El *espacio Hölder* de funciones, $C^{k,\gamma}(V)$ está formado por las funciones que son k veces diferenciables cuya k-ésima derivada es γ-*Hölder* continua y está acotada en la γ-*ésima norma de Hölder*, donde:

1. Se dice que una función f es γ-*Hölder* continua en V si:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\gamma$$

   para todo $x, y \in V$ y con $0 < \gamma \leq 1$

2. La γ-*ésima norma de Hölder* para la k-*ésima derivada* de f se define como:

$$||f||_{C^{k,\gamma}(V)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup\nolimits_{x\in V} ||D^\alpha f|| + \sum_{|\alpha|=k} \sup\nolimits_{x,y\in V; x\neq y} \{ \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x - y|^\gamma} \}$$

Con esta norma el espacio Hölder es Banach.

Definición A.1.5 (Espacios de Sobolev)**.** Sea $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Se definen los *espacios de Sobolev* y la *norma de Sobolev* como sigue:

$$W^{k,p}(U) := \{f \in L^p(U) : \forall \alpha \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq k\ D_\alpha f \in L^p(U)\}$$

$$||f||_{W^{k,p}(U)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \int_U |D_\alpha f|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Con α un multiíndice y $1 \leq p < \infty$.

Se denotará $H_0^{k,p}(U)$ a la clausura $\mathcal{C}_0^\infty(U)$ y $H^{k,p}(U)$ a la clausura $\mathcal{C}^\infty(U)$ con respecto a la norma de Sobolev.

Teorema A.1.6. *Se tiene la siguiente igualdad $H^{k,p} = W^{k,p}$ para $1 \leq p < \infty$ y $k \in \mathbb{N}$. Además, $H^{k,p}$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Definición A.1.7. Un *espacio de Hilbert* es un espacio de Banach cuya norma es inducida por un producto escalar.

Definición A.1.8. El espacio de funciones $L^2(V)$ se define como el conjunto de funciones f que son *Lebesgue medibles* y su norma L^2 está acotada, dónde:

$$||f||_{L^2(V)} = (\int_V |f|^2)^{1/2}$$

El espacio de funciones L^2 es de Hilbert.

Teorema A.1.9 (Descomposición ortogonal de espacios de Hilbert)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y $S \subset H$ un cerrado. Entonces H se puede descomponer de la siguiente forma*

$$H = S \oplus S^\perp$$

Donde $S^\perp$ es el espacio ortogonal a S.

A.2. Operadores elípticos y parabólicos

Definición A.2.1 (Operador elíptico)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Se estudia el siguiente problema.

$$\begin{cases} Lu = f \text{ en } U \\ u = 0 \text{ en } \partial U \end{cases}$$

El operador L tendrá forma de divergencia y, usando el criterio de Einstein para índices:

$$Lu = -(a^{ij}(s)u_{s^i})u_{s^j} + b^i(s)u_{s^i} + c(s)u$$

o en su forma de no divergencia,

$$Lu = -a^{ij}(s)u_{s^i s^j} + b^i(s)u_{s^i} + c(s)u$$

con $u : U \to \mathbb{R}$. Se dice que un operador L es *elíptico* si existe una constante $\theta > 0$ tal que:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\epsilon^i\epsilon^j \geq \theta|\epsilon|^2$$

Para casi todo x con a_{ij} las funciones que acompañan a las segundas derivadas parciales en el operador elíptico y $\epsilon \in \mathbb{R}^n$.

Definición A.2.2 (Operador parabólico)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Sea $U_T = U \times (0, T]$ para algún tiempo T. Un problema de tipo parabólico se plantea como sigue:

$$\begin{cases} u_t + Lu = f \text{ en } U_T \\ u = 0 \text{ en } \partial U \times [0, T] \\ u = g \text{ en } U \times \{t = 0\} \end{cases} . \tag{A.1}$$

Con $f : U_T \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$ y $u : \bar{U}_T \to \mathbb{R}$, se denotará $u = u(s,t)$ con s haciendo referencia a la variable *espacial* y t a la *temporal*. L será un operador parabólico de la siguiente forma, usando el criterio de Einstein para indíces repetidos:

$$Lu = -(a^{ij}(s,t)u_{s^i})u_{s^j} + b^i(s,t)u_{s^i} + c(s,t)u$$

Esta es la *forma de divergencia* del operador L. Aunque también puede aparecer en su *forma de no divergencia* como sigue,

$$Lu = -a^{ij}(s,t)u_{s^i s^j} + b^i(s,t)u_{s^i} + c(s,t)u$$

El operador diferencial $\frac{\partial}{\partial t} + L$ se dirá parabólico si existe una constante $\theta > 0$ tal que:

$$a^{ij}(s,t)\epsilon_i\epsilon_j \geq \theta|\epsilon|^2$$

Donde $\epsilon \in \mathbb{R}^n$.

En el caso particular de la ecuación del calor, $L = -\Delta$, se tendrá $a^{ij} = \delta_{ij}$ y $b = c = f = 0$.

Definición A.2.3 (Subsolución y supersolución de una ecuación de tipo parabólico)**.** Sea L un operador de tipo parabólico, y sea $u \in C_1^2(U) \cap C(\bar{U})$, si se tiene

$$u_t + Lu \leq 0$$

se dice que u es una *subsolución*. De manera análoga, si se tiene

$$u_t + Lu \geq 0$$

se dice que u es una *supersolución*.

Teorema A.2.4. *Sea $U \subset M$, un subconjunto abierto y acotado de una variedad riemanniana. Sea $f \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ con respecto al espacio y $C^1((0,T)) \cap C^0([0,T])$ con respecto del tiempo. Sea*

$$\frac{\partial}{\partial t} f - Lf \leq 0 \text{ en } U \times [0,T]$$

Entonces f alcanza su máximo para (s,t) con $s \in \partial U$ o con $t = 0$. Para variedades compactas, el supremo de $f(\cdot, t)$ es una función decreciente en el tiempo.

Teorema A.2.5 (Regularidad de soluciones)**.** *Sea $g \in H^{2m+1}(U), \frac{d^k}{dt^k} f \in L^2(0,T; H^{2m-2k}(U))$ con $k = 0, \cdots, m$. Supongase que se dan las siguientes condiciones de compatibilidad de orden m:*

$$\begin{cases} g_0 := g \in H_0^1(U), g_1 := f(0) - Lg_0 \in H_0^1(U), \\ \cdots, g_m := \frac{d^{m-1}}{dtm-1} f(0) - Lg_{m-1} \in H_0^1(U) \end{cases} \tag{A.2}$$

Entonces se tiene,

$$\frac{d^k}{dt^k} u \in L^2(0,T; H^{2m+2-2k}(U))$$

para $k = 0, \cdots, m+1$.

Con este teorema podemos demostrar la regularidad de la única solución de nuestro problema de tipo parabólico.

Teorema A.2.6 (Diferenciabilidad de la solución)**.** *Sean $g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{U})$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{U}_T)$ tal que las condiciones de compatibilidad de orden m se verifican para cualquier m, entonces el problema de tipo parabólico tiene solución única $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{U})$.*

Teorema A.2.7 (Finito dimensionalidad del núcleo de operadores elípticos sobre un compacto)**.** *Si M es compacto y*

$$L : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

es elíptico. Entonces el núcleo de L es finito dimensional.

Finalmente, el siguiente resultado nos permite traducir todos los resultados que se obtengan en $\mathbb{R}^n$ a variedades riemannianas compactas.

Teorema A.2.8 (Rellich–Kondrachov)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Sea $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$ si $p < n$ y $1 \leq q < \infty$ si $p \geq n$. Entonces, $H_0^{1,p}(U)$ está contenido de manera compacta en $L^q(U)$.*

Corolario A.2.9. *En una variedad riemanniana compacta M, $H^{1,2}(M)$ está contenido de manera compacta en $L^2(M)$.*

Bibliografía

[1] J. C. Baez and J. P. Muniain. *Gauge fields, knots and gravity*, volume 4. World Scientific Publishing Company, 1994.

[2] M. P. Do Carmo. *Riemannian geometry*, volume 6. Springer, 1992.

[3] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, 2022.

[4] J. Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*, volume 42005. Springer, 2008.

[5] J. M. Lee. *Smooth manifolds*. Springer, 2012.

[6] J. M. Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*, volume 2. Springer, 2018.

[7] I. H. Madsen and J. Tornehave. *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge university press, 1997.