

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID



Facultad de Ciencias Matemáticas

Cohomología de Čech

Juan Martín Fajardo

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Tutorizado por:

Guillermo Gallego Sánchez

Guillermo Sánchez Arellano

Junio, 2024

Grab a galaxy

There — feel better?

Make the galaxy real big now —

Grab a solar system —

Make it surround you

Chick Corea

Resumen

El objetivo de este trabajo es proporcionar una introducción a la cohomología de Čech con coeficientes en haces de grupos. Comenzamos desarrollando los fundamentos de la teoría de haces. Posteriormente definimos la cohomología de Čech, discutimos su funtorialidad y la existencia de sucesión exacta larga. Incluimos una prueba autocontenida del teorema de Leray que garantiza que ciertos recubrimientos permiten computar la cohomología de Čech sin necesidad de usar a la definición. Relacionamos la cohomología de Čech con otras teorías de cohomología y discutimos brevemente el caso en el que el haz no es abeliano y su aplicación a la clasificación de fibrados vectoriales. Por último, calculamos múltiples ejemplos y desarrollamos un algoritmo para calcular la cohomología de Čech de un complejo simplicial finito.

Palabras clave: *Topología algebraica, cohomología de Čech, teoría de haces, espacios étale, sucesión exacta larga en cohomología, teorema de Leray, cohomología simplicial, cohomología de haces.*

Abstract

The purpose of this Bachelor Thesis is to provide an introduction to Čech cohomology with coefficients in sheaves. We start by developing the foundations of Sheaf Theory. Then we define Čech cohomology. We discuss the functoriality of this theory and the existence of the long exact sequence. We include a self-contained proof of Leray's Theorem, which states that in some cases Čech cohomology can be computed from the information given by some special coverings. Later we compare Čech cohomology with other cohomology theories and we briefly discuss the case when the sheaf is not abelian and its applications to vector bundle classification. Finally we study several examples and we develop an algorithm to compute Čech cohomology of a finite simplicial complex.

Keywords: *Algebraic Topology, Čech cohomology, sheaf Theory, étale spaces, long exact sequence in cohomology, Leray Theorem, simplicial cohomology, sheaf cohomology.*

Índice general

1	Introducción	1
1.1	Notación	3
1.2	Referencias	3
1.3	Nota histórica	4
2	Teoría de haces	5
2.1	Haces de grupos	5
2.2	Espacios étale	8
2.3	El haz de secciones	10
2.4	Espacio étale asociado a un prehaz	10
2.5	Relación entre haces y espacios étale	12
2.6	Construcciones	14
2.7	Sucesiones de morfismos de haces	16
2.8	Exactitud al tomar secciones	19
3	Cohomología de Čech	22
3.1	Cohomología de Čech dependiente del recubrimiento	22
3.2	Cohomología de Čech independiente del recubrimiento	27
3.3	Sucesión exacta larga	29
3.4	Teorema de Leray	35
3.5	Relación con otras teorías de cohomología	39
3.6	Cohomología no abeliana	41

4 Ejemplos y aplicaciones	43
4.1 Cálculo de grupos de cohomología	43
4.2 Cohomología de complejos simpliciales	46
4.3 Otras aplicaciones	52
A Álgebra	54
A.1 Álgebra homológica	54
A.1.1 Complejos de cocadenas	54
A.1.2 La cohomología de un complejo	55
A.1.3 Homotopía en complejos de cocadenas	59
A.2 Algunas definiciones de teoría de categorías	60
A.3 Límites directos	61
B Implementación del algoritmo de cálculo de grupos de cohomología	64
B.1 Ejemplo de ejecución I	64
B.2 Ejemplo de ejecución II y código en SageMath	67
Bibliografía	71
Agradecimientos	72

Capítulo 1

Introducción

La teoría de cohomología ocupa un lugar central en la topología algebraica. Intuitivamente, una teoría de cohomología trata de asignar cierta secuencia de grupos a un espacio topológico X . Hay múltiples teorías de este tipo y, en ciertos casos (que precisaremos más adelante) coinciden. En este trabajo desarrollaremos los fundamentos de la cohomología de Čech con coeficientes en haces de grupos abelianos. La cohomología de Čech es una teoría que destaca por su simplicidad para hacer cálculos. Mientras que otras teorías usan definiciones muy complicadas de precisar en los ejemplos (como la cohomología singular, o la cohomología de haces), la cohomología de Čech de espacios concretos puede ser calculada usando cálculos elementales. Y eso haremos al final del trabajo. Esto le aporta un lugar privilegiado entre las teorías de cohomología. Resaltar esta sencillez será uno de los objetivos que perseguiremos a lo largo del trabajo.

Empezaremos el capítulo 2 introduciendo los haces de grupos: Un haz F sobre X consistirá en asignar a cada abierto $U \subset X$ un grupo $F(U)$. Probaremos que siempre podremos pensar en $F(U)$ como el grupo de funciones continuas de U a cierto espacio topológico.

Paralelamente, un espacio étale sobre X es un par (E, π) donde E es un espacio topológico y $\pi : E \rightarrow X$ es un homeomorfismo local verificando, entre otras cosas, que la preimagen de cada punto por π es un grupo. Esta estructura de grupo dota a las *secciones* de E por π (aplicaciones continuas $f : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ f = \text{Id}_U$) de estructura de haz. De hecho, a cualquier haz F le podemos asignar un espacio étale $\beta(F)$, de forma que los elementos $F(U)$ son secciones $f : U \rightarrow \beta(F)$. Esto se traducirá en que la categoría de haces y la de espacios étale son equivalentes y podremos construir múltiples haces pasando por espacios étale.

Posteriormente hablaremos de las sucesiones exactas de haces, y veremos que el funtor que a cada haz F le asigna el grupo $F(X)$ (llamado *funtor tomar secciones*), es exacto por la izquierda. Es decir: manda sucesiones exactas de haces $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F''$ a sucesiones exactas de grupos $0 \rightarrow F'(X) \rightarrow F(X) \rightarrow F''(X)$. Veremos un contraejemplo que impide extender la exactitud a la derecha.

En el capítulo 3 entramos de lleno en la cohomología de Čech. Si F es un haz de grupos abelianos y $\mathcal{U}$

es un recubrimiento (indexado por un conjunto totalmente ordenado) de X , definiremos el q -ésimo grupo de cocadenas de Čech como

$$\check{C}^q(\mathfrak{U}, F) = \prod_{i_0 < i_1 < \dots < i_q} F(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q}).$$

Podemos ver una cocadena como una función que manda cada intersección finita a un elemento del haz evaluado en dicha intersección. Definiremos también un operador coborde $d^q : \check{C}^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{C}^{q+1}(\mathfrak{U}, F)$ y tendremos un complejo de cocadenas $\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, F)$. Los grupos de cohomología de este complejo se llamarán *grupos de cohomología de Čech dependientes del recubrimiento* (y se denotarán por $\check{H}^q(\mathfrak{U}, F)$). La ventaja de esta cohomología es que se calcula inmediatamente a partir de la definición. La desventaja es que, como depende del recubrimiento, parece no decir mucho sobre el espacio. Es por eso que se toma el *límite directo* de estos grupos según refinamos los recubrimientos y queda

$$\check{H}^q(X, F) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^q(\mathfrak{U}, F).$$

Estos grupos (llamados grupos de cohomología de Čech) sí que son un invariante topológico, pero son muy complicados de calcular por la definición. Sin embargo, cuando X sea Hausdorff y paracompacto, tendremos dos importantes teoremas:

- El teorema de la sucesión exacta larga (teorema 3.3.9): Este teorema es crucial en topología algebraica. Por un lado, resuelve el problema de la obstrucción a que el funtor *tomar secciones* sea exacto. Por otro, nos proporciona el hecho de que la cohomología de Čech (independientemente del recubrimiento) es una *teoría axiomática de cohomología de haces* (concepto que trataremos en la sección 3.5), por lo que será equivalente al resto de teorías. Un corolario de esto es que cuando el haz es constante, los grupos de cohomología son invariantes por homotopía.
- El teorema de Leray (teorema 3.4.2): Este teorema nos dirá que para ciertos recubrimientos (llamados *acíclicos*), la cohomología de Čech puede ser computada con la cohomología dependiente del recubrimiento. Esto será de gran utilidad, porque permitirá calcular los grupos de cohomología de múltiples espacios sin necesidad de tomar el límite directo.

Con este formalismo desarrollado, compararemos la cohomología de Čech con otras teorías de cohomología. Para terminar estudiaremos qué ocurre con la cohomología de Čech cuando el haz no es de grupos abelianos. Por la naturaleza de estos haces, podremos definir sólo hasta el $\check{H}^1(X, F)$, y ni siquiera será un grupo (será un conjunto con unidad). Sin embargo esto será suficiente para hablar de sucesiones exactas y probar que existe una sucesión exacta larga hasta $\check{H}^1$ (teorema 3.6.4).

En el cuarto capítulo usaremos las herramientas desarrolladas durante los dos anteriores. Comenzaremos calculando los grupos de cohomología de algunos espacios. Una vez asentada la idea general de cómo calcular la cohomología de Čech, introduciremos el nervio de Čech de un recubrimiento, que consistirá en un complejo simplicial en el que cada k -símplice se corresponde con una intersección no vacía $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$. Con

esto podremos desarrollar un algoritmo para calcular la cohomología en ciertos espacios. En el apéndice B incluimos dos ejemplos de ejecución de dicho algoritmo, así como su implementación en *SageMath*. Inmediatamente después probaremos que en complejos simpliciales la cohomología de Čech coincide con la cohomología simplicial. Esto nos permitirá dar la siguiente interpretación de la cohomología de Čech (al menos para haces constantes): Tomamos un recubrimiento bueno $\mathfrak{U}$ y obtenemos su nervio $N(\mathfrak{U})$, que es un complejo simplicial. Entonces $\check{H}^q(\mathfrak{U}, G)$ será la cohomología simplicial del nervio: $H_\Delta(N(\mathfrak{U}), G)$. Finalmente tomamos el límite directo por refinamiento de $\mathfrak{U}$, que se puede pensar como subdivisiones del nervio. De hecho, esta forma de definir la cohomología de Čech es la original históricamente. Terminaremos con algunas aplicaciones en topología, entre ellas daremos una idea de cómo se aplica la cohomología de Čech a la clasificación de fibrados vectoriales y algunas consecuencias de dicha clasificación.

Hemos incluido un apéndice (apéndice A) dedicado a cubrir todos los resultados algebraicos necesarios para el trabajo.

1.1 Notación

En este trabajo X será un espacio topológico. A partir del Teorema 3.3.9 necesitaremos que X sea paracompacto y Hausdorff. En ciertos ejemplos X será una variedad diferenciable, y en otros un complejo simplicial. Denotaremos por $\mathbf{Op}(X)$ la familia de abiertos en X , y por $\mathbf{Op}_x(X)$ el sistema de entornos abiertos de x en X . Si $S \subset X$ es un conjunto cualquiera también podemos considerar su sistema de entornos $\mathbf{Op}_S(X)$. Observemos que $\mathbf{Op}(X)$ es una categoría donde los objetos son los propios abiertos y los morfismos son las inclusiones conjuntistas entre estos. Es decir: si $U, V \in \mathbf{Op}(X)$ entonces diremos que los morfismos de V a U son $\{V \hookrightarrow U\}$ si $V \subset U$ y $\emptyset$ en cualquier otro caso. Las categorías de grupos, grupos abelianos y espacios topológicos se denotarán por $\mathbf{Grp}$, $\mathbf{Ab}$ y $\mathbf{Top}$, respectivamente. Usaremos H , $\check{H}$, H_{sing} , H_Δ , H_{dR} para las cohomologías de haces, Čech, singular, simplicial y de Rham, respectivamente.

1.2 Referencias

Para el capítulo de teoría de haces han sido de gran ayuda [13] (téngase en cuenta que en este texto se llama *haz* a lo que nosotros denominamos como *espacio étale*) y [9].

No hemos encontrado una referencia que trate la cohomología de Čech de forma autocontenida e independiente del resto de cohomologías. Lo más parecido a un desarrollo sistemático se encuentra en [13]. En [3] se desarrolla para haces constantes, en [1] se trata usando maquinaria que escapa de los objetivos del trabajo, y en [12] se desarrolla para prehaces con el objetivo de compararla con la cohomología de Alexander. En particular, [13] ha sido de gran ayuda para demostrar el teorema 3.3.9. Para la parte de cohomología con haces no abelianos nos hemos basado en [14]. A lo largo del trabajo ha sido importante [7] para referenciar

algunos resultados de cohomología singular/simplicial o de topología algebraica general. Para los resultados principales de álgebra homológica nos hemos inspirado en [10].

A pesar de tratarse de un trabajo sobre la cohomología de Čech, en el proceso ha habido que aprender de *cohomología de haces* y de *cohomología axiomática de haces* para estudiar las limitaciones de la cohomología de Čech, su relación con otras teorías de cohomología y adaptar algunas pruebas (como la de 3.4.2). Una exposición clara y concisa de la primera puede encontrarse en [6], y para la segunda hemos usado [13]. Por último, cabe destacar las notas [4], que han sido de ayuda en numerosas ocasiones.

1.3 Nota histórica

Las ideas de este trabajo se fundamentan en el trabajo de múltiples matemáticos a lo largo del siglo XX. Pero cabe destacar el trabajo de Jean Leray (1906-1998) y Eduard Čech (1893-1960). La principal referencia para esta sección ha sido [2].

- A principios del siglo XX había una voluntad generalizada por extender a espacios más generales los métodos para el estudio topológico de las variedades diferenciables que habían introducido matemáticos como Henri Poincaré (1854-1912) o Élie Cartan (1869-1951). Una de las ideas con las que se trabajaba (debida a Alexandroff (1896-1982)) para extender la homología simplicial a espacios no simpliciales era la de tomar un recubrimiento del espacio, obtener el nervio del recubrimiento y calcular su homología simplicial. Sin embargo, tratando de refinar el recubrimiento, Alexandroff utilizaba propiedades métricas. Fue Čech quien, en 1932, tuvo la idea de *tomar el límite inverso por refinamiento* de este recubrimiento. Nació así la *homología de Čech con coeficientes en un grupo*. Para formalizar esto inventó el concepto de límite inverso. Su teoría dual: la cohomología de Čech, fue trabajada por Steenrod en su tesis doctoral (1936).
 - Además de matemático, Leray era un oficial francés dedicado principalmente a áreas relacionadas con la mecánica de fluidos. Él mismo bromeaba autodenominándose 'mecánico' (en francés 'mecanicien'). La topología algebraica tenía un papel secundario para él. Sin embargo, cuando estalló la Segunda Guerra Mundial, cayó prisionero de los alemanes y quedó recluido junto con otros matemáticos en Oflag (Austria, cerca de Salzburgo). En cautividad formó una academia con otros matemáticos. Pero como temía que los nazis le obligaran a aplicar sus conocimientos en mecánica de fluidos con fines bélicos, decidió alegar que su principal rama de investigación era la topología algebraica. Su principal intención dentro de esta rama residía en construir una teoría de cohomología que no dependiera de recubrimientos, simples o propiedades métricas del espacio. En su curso "Un cours de topologie algébrique professé en captivité" introducía el concepto de haz, la cohomología de haces y las sucesiones espectrales. Para más detalle sobre esta etapa de la vida de Leray, ver [11].
-

Capítulo 2

Teoría de haces

En este capítulo damos las nociones básicas de teoría de haces y espacios étale, y probamos que son equivalentes en el sentido categórico. Introducimos las sucesiones exactas de haces y damos algunos resultados.

2.1 Haces de grupos

Comenzamos dando algunas definiciones básicas

Definición 2.1.1. Un *prehaz de grupos* (sobre X) es un funtor contravariante $\mathbf{Op}(X) \rightarrow \mathbf{Grp}$. Es decir:

- Una asignación de un grupo $F(U)$ a cada abierto $U \subset X$.
- Para cada $U \subset V$, un homomorfismo $\text{res}_{U,V} : F(V) \rightarrow F(U)$. Verificando que $\text{res}_{U,U} = \text{id}_U$ y que si $U \subset V \subset W$ entonces $\text{res}_{U,W} = \text{res}_{U,V} \circ \text{res}_{V,W}$.

Exigimos que $F(\emptyset) = \{0\}$ sea el grupo trivial, que denotaremos por 0 . También usaremos el 0 para el prehaz trivial.

Si cambiamos la categoría de grupos por la de grupos abelianos diremos que el prehaz es un *prehaz de grupos abelianos* o que es un *prehaz abeliano*.

Aunque no exigiremos que el prehaz sea de grupos abelianos hasta la Sección 3, usaremos la notación aditiva en todo el trabajo. En la práctica, $F(U)$ será un grupo de funciones definidas sobre el abierto U . Los elementos de $F(U)$ llaman *secciones de U* , y el homomorfismo $\text{res}_{U,V}$ se llama *restricción* porque, como las secciones serán funciones, $\text{res}_{U,V}$ será la restricción de las funciones de V a U . Por esta razón, si $f \in F(V)$ y $U \subset V$, escribiremos $f|_U := \text{res}_{U,V}$.

Definición 2.1.2. Sea F un prehaz sobre X . Diremos que es un *haz* si satisface las siguientes condiciones.

- *Localidad*: Sean U abierto y $\{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto de U . Supongamos que $f, g \in F(U)$, y $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ para todo $i \in I$, entonces se tiene que $f = g$.
- *Pegamiento*: Sea U abierto y $\{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto de U . Sea $\{f_i \in F(U_i) | i \in I\}$ una familia de secciones. Si $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo $i, j \in I$, entonces existe una sección $f \in F(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo $i \in I$.

La propiedad de localidad nos dice que una sección queda totalmente determinada por sus restricciones locales, mientras que la de pegamiento nos dice que una familia de secciones que pegan bien localmente permiten definir una sección global.

Observación 2.1.3. Es importante observar que todo prehaz de funciones (F le asigna a cada U un conjunto de funciones $U \rightarrow S$ con S conjunto) verifica la propiedad de localidad. Sin embargo, no tiene por qué verificar la de pegamiento. Por ejemplo, tómese F como el haz que a cada U le asigna las funciones inyectivas $U \rightarrow \mathbb{R}$. Por otro lado, como la continuidad/diferenciabilidad/analiticidad son propiedades locales (una función verifica la propiedad globalmente si y solo si la verifica en cada punto), los prehaces de estas funciones sí verifican la propiedad de pegamiento.

Los ejemplos paradigmáticos en este trabajo serán los siguientes

Ejemplo 2.1.4.

- *Haz funciones continuas con valores en un grupo topológico*: Supongamos que X es un espacio topológico y G es un grupo topológico. Definamos $C_X(-, G)$ como el haz que a cada $U \in \mathbf{Op}(X)$ le asigna el grupo $C_X(U, G) := \{f : U \rightarrow G \mid f \text{ es continua}\}$. Obsérvese que $C_X(U, G)$ es un abeliano si y sólo si G lo es. Escribiremos simplemente $G_X := C_X(-, G)$. Si X es una variedad diferenciable, podemos considerar el haz de funciones $C_X^\infty(-, G)$ con valores en un grupo de Lie G . Y si X es una variedad analítica podemos considerar su haz de funciones analíticas en un grupo de Lie analítico.
- *Haz de funciones localmente constantes con valores en un grupo*: Sea, de nuevo, X un espacio topológico y G un grupo topológico. Utilizaremos G_δ para denotar la topología discreta. En este caso, $C_X(-, G_\delta)$ asigna a cada abierto el grupo de funciones continuas de U en G_δ . Por tener el último la topología discreta, las funciones continuas son las localmente constantes y, si el abierto es conexo, dicho grupo será el propio G . Es por esto que usaremos la notación $G := C_X(-, G_\delta)$.

Ejemplo 2.1.5. El prehaz que a cualquier abierto no vacío U le asigna un grupo fijo $G \neq 0$ (al vacío le asigna $\{0\}$) y a cada inclusión $U \subset V$ la identidad (salvo si $U = \emptyset$, en cuyo caso es la aplicación nula) no es un haz en general porque no verifica la condición de pegamiento: Sean en X dos abiertos (no vacíos) disjuntos U_1, U_2 . Pongamos $f_1 \in G = F(U_1)$ y $f_2 \in G = F(U_2)$ tales que $f_1 \neq f_2$. Tenemos que $f_1|_{U_1 \cap U_2} = 0 = f_2|_{U_1 \cap U_2}$, por ser $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Entonces, por el axioma de pegamiento, debería existir un $f \in G = F(U_1 \cup U_2)$ tal que $f_1 = f|_{U_1} = f = f|_{U_2} = f_2$, lo que es absurdo. Este prehaz se suele llamar *prehaz constante*. Como no es

un haz, reservaremos el nombre de *haz constante* G para el haz de funciones localmente constantes sobre G . De hecho veremos en 2.5.7 que el haz constante es la *hacificación* del prehaz constante. Si $G = 0$ el prehaz constante sí es un haz, denominado *haz trivial*.

De hecho, tenemos la siguiente propiedad:

Lema 2.1.6. Si F es un haz sobre X y $U, V \in \mathbf{Op}(X)$ son abiertos disjuntos, tenemos que $F(U \cup V) = F(U) \times F(V)$.

Demostración. Construyamos un isomorfismo $\phi : F(U \cup V) \rightarrow F(U) \times F(V)$. A cada $x \in F(U \cup V)$ le asociamos $\phi(x) = (x|_U, x|_V)$. Si $x|_U = 0_U$ y $x|_V = 0_V$, la propiedad de localidad nos da que $x = 0_{U \cup V}$, luego ϕ es inyectiva. Y es sobreyectiva, porque si $(a, b) \in F(U) \times F(V)$, como $U \cap V = \emptyset$, $a|_{U \cap V} = 0 = b|_{U \cap V}$, la propiedad de pegamiento nos da que existe $x \in F(U \cup V)$ con $x|_U = a$ y $x|_V = b$. $\square$

Definición 2.1.7. Sean F, G (pre)haces sobre X , un *morfismo de (pre)haces* $\varphi : F \rightarrow G$ es una familia de homomorfismos $\{\varphi_U : F(U) \rightarrow G(U) \mid U \in \mathbf{Op}(X)\}$ tales que para cada $U \subset V$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & G(V) \\ \text{res}_{U,V} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{U,V} \\ F(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & G(U) \end{array}$$

Si E, F, G son (pre)haces y $\varphi : E \rightarrow F$, $\psi : F \rightarrow G$ son morfismos, definiremos la *composición* como el morfismo $\psi \circ \varphi$ que asocia a cada $U \in \mathbf{Op}(X)$ el morfismo de grupos $\psi_U \circ \varphi_U$. Este último conmuta con las restricciones. En efecto: $(\psi_U \circ \varphi_U) \circ \text{res}_{U,V} = \psi_U \circ (\text{res}_{U,V} \circ \varphi_V) = \text{res}_{U,V} \circ (\psi_V \circ \varphi_V)$. Luego es un morfismo de (pre)haces.

Observación 2.1.8. Un morfismo de prehaces no es más que una transformación natural entre funtores (ver A.2.1).

Definimos el *morfismo identidad* $\text{Id}_F : F \rightarrow F$ es aquel definido por $(\text{Id}_F)_U := \text{Id}_{F(U)}$ en cada $U \in \mathbf{Op}(X)$. Y decimos que $\varphi : F \rightarrow G$ es *isomorfismo* si existe $\psi : G \rightarrow F$ con $\varphi \circ \psi = \text{Id}_G$ y $\psi \circ \varphi = \text{Id}_F$. Es inmediato ver que φ es un isomorfismo si y solo si $\varphi_U : F(U) \rightarrow G(U)$ es isomorfismo para cada $U \in \mathbf{Op}(X)$.

Observación 2.1.9. Con todo esto tenemos que la clase de prehaces sobre X , con los morfismos de prehaces, forman una categoría, que denotaremos por $\mathbf{Psh}(X)$. Análogamente, la clase de haces sobre X con los morfismos de haces, forman la categoría $\mathbf{Sh}(X)$. Y podemos considerar la inclusión $\mathbf{Sh}(X) \hookrightarrow \mathbf{Psh}(X)$, porque todo haz es un prehaz.

Definición 2.1.10. El *núcleo* de un morfismo de prehaces $\varphi : F \rightarrow G$ es el prehaz $\ker \varphi$ dado por $(\ker \varphi)(U) := \ker \varphi_U$ para cada $U \in \mathbf{Op}(X)$.

Lema 2.1.11. $\ker \varphi$ es un haz si F es un haz.

Demostración. Probemos las propiedades de localidad y pegamiento.

Localidad: Sean $U \in \mathbf{Op}(X)$ y $f, g \in \ker \varphi$, y sea $\{U_i\}_i$ recubrimiento de U tal que $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ para todo i . Como f y g pertenecen a $\ker \varphi_U \subset F(U)$ y F es un haz, aplicamos la propiedad de localidad de F y tenemos que $f = g$ en U .

Pegamiento: De nuevo, tomamos $U \in \mathbf{Op}(X)$ y $\{U_i\}_i$ un recubrimiento abierto suyo. Sea $\{f_i \in \ker \varphi_{U_i}\}_i$ tales que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$. De nuevo, pertenecen a $F(U)$ así que aplicamos la propiedad de pegamiento en F y obtenemos que existe $f \in F(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$. Para ver que $f \in (\ker \varphi)(U)$ hay que ver que $\varphi_U(f) = 0$. En efecto, $\varphi_U(f)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(f|_{U_i}) = \varphi_{U_i}(f_i) = 0$. $\square$

Definición 2.1.12. Un morfismo de haces se dice *inyectivo* o *monomorfismo* si $\ker \varphi = 0$.

Querríamos hacer lo mismo para la imagen, sin embargo, el prehaz definido por $(\text{Im} \varphi)(U) := \text{Im} \varphi_U$ no es un haz. Habrá que desarrollar más la teoría para poder definir la imagen de un haz. Lo veremos en 2.6.

Definición 2.1.13. Si F y G son (pre)haces, diremos que F es un *sub(pre)haz* de G si $F(U)$ es subgrupo de $G(U)$ para cada $U \in \mathbf{Op}(X)$ abierto. Además la inclusión de $F(U) \hookrightarrow G(U)$ induce un homomorfismo de (pre)haces que llamaremos *inclusión* de F en G y denotaremos por $F \hookrightarrow G$.

2.2 Espacios étale

Para seguir hablando de haces será útil introducir el concepto de *espacio étale* que, en cierto modo (que precisaremos más tarde), es equivalente al de haz. Una vez definidos los espacios étale podremos hablar de la *hacificación*: proceso por el cual podemos construir un haz a partir de un prehaz. Esto será de gran utilidad para construir el *haz imagen* y el *haz cociente*.

Comenzaremos dando la noción de espiga, para la cual se usa el concepto de límite directo, cuya definición y propiedades se detallan en A.3.

Definición 2.2.1. Sea F un prehaz de grupos sobre X y $x \in X$. El conjunto de entornos abiertos de x , $\mathbf{Op}_x(X)$, es un conjunto parcialmente ordenado por la inclusión inversa, y cada par de entornos está acotado por su intersección. En particular, es un conjunto dirigido, que indexa la familia de grupos $\{F(U) : U \in \mathbf{Op}_x(X)\}$. Definimos los homomorfismos del conjunto dirigido como las restricciones $\text{res}_{U,V}$. Así, definimos la *espiga* de F en x como

$$F_x := \varinjlim_{U \in \mathbf{Op}_x(X)} F(U).$$

Observación 2.2.2. ¿En qué se traduce esta definición? Sean $f \in F(U)$, $g \in F(V)$. Serán equivalentes si existe alguna aplicación restricción que los transforma en el mismo elemento. Es decir, si existe un $W \subset U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$. La clase de un elemento $[f] \in F_x$ la denotaremos por f_x . La clase f_x se llama *germen* de

f . Obsérvese que si $f_x = g_x$ entonces $f(x) = g(x)$, ya que tienen que coincidir en un entorno de x . Este valor se llama *valor del germen* f_x en x y se suele denotar como $f_x(x)$.

Ejemplo 2.2.3. Sea F el haz de funciones localmente constantes: $F(U) = \{f : U \rightarrow G_\delta \mid \text{continua}\}$. Veamos que $F_x = G$. Para esto basta considerar el homomorfismo $f_x \mapsto f_x(x)$. Es claramente sobreyectivo porque para $g \in G$ podemos considerar la función constante g . Es inyectivo porque si $f_x(x) = 0_x$ entonces f vale 0 en un entorno de x . Pero por ser G discreto y f continua, $f^{-1}(0)$ es un entorno abierto de x , y f es constantemente nula en ese entorno, luego $f_x = 0_x$.

Observación 2.2.4. Un morfismo de prehaces $\varphi : F \rightarrow G$ induce un morfismo en las espigas. Un morfismo de prehaces es precisamente un morfismo de sistemas de grupos indexados por la familia de abiertos de X . Es por esto que induce un morfismo en los límites directos (ver A.3.5), es decir, un morfismo en cada espiga $\varphi_x : F_x \rightarrow G_x$. Explícitamente: si $f_x = [f_U]$ con $f_U \in F(U)$ y U entorno abierto de x , entonces $\varphi_x(f_x) := [\varphi_U(f_U)] = (\varphi_U(f_U))_x$.

Definición 2.2.5. Un *espacio étale* (sobre X) es un par (E, π) donde E es un espacio topológico y $\pi : E \rightarrow X$ es un homeomorfismo local que verifica:

1. $\pi^{-1}(x)$ es un grupo para cada $x \in X$.
2. La siguiente aplicación es continua:

$$\begin{aligned} E \circ E &:= \{(f, g) \in E \times E : \pi(f) = \pi(g)\} \rightarrow E \\ (f_x, g_x) &\mapsto f_x - g_x \end{aligned}$$

A veces, en un abuso de notación, denotaremos (E, π) por E . La aplicación π se llama *proyección* y el conjunto $\pi^{-1}(x)$ se llama *espiga* de x . Diremos que el espacio étale es *abeliano* si para todo x el grupo $\pi^{-1}(x)$ es abeliano.

Observación 2.2.6. La topología inducida en cada espiga es la discreta. En efecto, dados $x \in X$ y $p \in \pi^{-1}(x)$, restringimos π a un entorno U de p para que sea homeomorfismo, en particular biyectiva. Así, $\{p\} = U \cap \pi^{-1}(x)$, es abierto en $\pi^{-1}(x)$.

A continuación, introducimos los morfismos entre espacios étale.

Definición 2.2.7. Sean (E_1, π_1) , (E_2, π_2) dos espacios étale sobre X . Un morfismo de espacios étale es una aplicación continua $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_2 \\ & X & \end{array}$$

y tal que, al restringir a cada espiga, es un morfismo de grupos. Es claro también que dos morfismos de espacios étale se pueden componer y que existe un morfismo identidad de espacios étale Id_E definido por $\text{Id}_E(f) = f$ para cada $f \in E$.

Observación 2.2.8. Con esto podemos definir la categoría de espacios étale sobre X , con los morfismos de espacios étale, y la denotamos por $\mathbf{Et}(X)$.

Ejemplo 2.2.9. Si G es un grupo con la topología discreta, $(X \times G, \pi_1)$ es un espacio étale sobre X (donde π_1 es la proyección sobre la primera coordenada).

2.3 El haz de secciones

El próximo objetivo es el de asignar un haz a cada espacio étale.

Definición 2.3.1. Sea U un abierto de X y E un espacio étale sobre X . Una *sección de E sobre U* es una aplicación continua $f : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ f = \text{id}_U$. Decimos que una sección es *global* si $U = X$. Denotamos el conjunto de las secciones sobre U por $\Gamma(U, E)$.

Observación 2.3.2. Obsérvese que $\Gamma(U, E)$ es un grupo con el producto definido puntualmente. Este está bien definido por tratarse de secciones (las imágenes del mismo punto van a la misma espiga, donde la operación está definida e induce una aplicación continua).

Afirmamos que el funtor Γ_E

$$\Gamma_E : \mathbf{Op}(X) \rightarrow \mathbf{Grp}$$

que a cada $U \in \mathbf{Op}(X)$ le asigna el grupo $\Gamma(U, E)$, con la restricción de funciones como aplicación restricción, es un prehaz. Por tratarse de funciones continuas, verifican las propiedades de localidad y pegamiento. Lo único que hay que verificar es que al pegar secciones de π resulta una sección de π , pero eso es inmediato. Luego tenemos un haz. Así, a cada espacio étale E le hemos asignado de manera natural un haz, que llamaremos $\alpha(E)$. Observemos que si $U \subset X$ es abierto, entonces $\alpha(E)(U) = \Gamma(U, E)$.

Sean E_1, E_2 dos espacios étale y $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ un morfismo de espacios étale. Podemos definir un morfismo de haces $\alpha(\varphi) : \alpha(E_1) \rightarrow \alpha(E_2)$ por

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi)_U : \Gamma(U, E_1) &\rightarrow \Gamma(U, E_2) \\ f &\mapsto \varphi \circ f, \end{aligned}$$

y es rutinario comprobar que las aplicaciones $\alpha(\varphi)_U$ conmutan con las restricciones.

Así, tenemos un funtor

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbf{Et}(X) &\rightarrow \mathbf{Sh}(X) \\ E &\mapsto \alpha(E) = \Gamma_E \\ \varphi &\mapsto \alpha(\varphi). \end{aligned}$$

2.4 Espacio étale asociado a un prehaz

Ahora vamos a ver cómo construimos un espacio étale a partir de un prehaz cualquiera.

Definición 2.4.1. Sea F un pre haz. Definimos su *espacio étale* como $\beta(F) = (E, \pi)$ donde

1. $E = \bigsqcup_{x \in X} F_x$ es el conjunto dado por las uniones disjuntas de las espigas
2. $\pi : E \rightarrow X$ es la proyección que manda cada $f_x \in F_x$ a x

Definimos en E la topología generada por

$$\{A(U, f) : U \subset X \text{ abierto y } f \in F(U)\},$$

donde $A(U, f) = \{f_x : x \in U\}$.

Proposición 2.4.2. $\beta(F)$ es un espacio étale.

Demostración. Veamos que π es continua: Si $U \subset X$ es abierto, entonces

$$\pi^{-1}(U) = \{f_x : x \in U, f \in F(V), \text{ con } V \in \mathbf{Op}_x(U)\} = \bigcup_{x \in U} \bigcup_{V \in \mathbf{Op}_x(U)} \bigcup_{f \in F(V)} A(V, f),$$

que es unión de abiertos. También es abierta, puesto que transforma $A(U, f)$ en U . Y en cada uno de estos abiertos es claramente una biyección. Luego π es homeomorfismo local.

Si $x \in X$ se tiene que $\pi^{-1}(x) = F_x$ es la espiga en x , y por ser límite directo de grupos es grupo (ver A.3.3). Veamos que la aplicación $p : E \circ E \rightarrow E$, definida por $p(f_x, g_x) = f_x - g_x$ es continua. Sea $A(U, h)$ un entorno abierto de $h_x = f_x - g_x$ en E , con $h \in F(U)$. Pongamos que $f \in F(V)$ y $g \in F(W)$ para ciertos $V, W \in \mathbf{Op}_x(X)$, por lo que existe otro entorno abierto $Q \subset U \cap V \cap W$ tal que

$$h|_Q = f|_Q - g|_Q,$$

por lo que al localizar en cada punto $x \in Q$, se tiene $h_x = (h|_Q)_x = (f|_Q)_x - (g|_Q)_x$. Considerando el abierto $A(Q, f|_Q) \times A(Q, g|_Q) \subset E \times E$ restringido a $E \circ E$, que es entorno de (f_x, g_x) , verifica que su imagen por p está contenida en $A(Q, h) \subset A(U, h)$. $\square$

Definición 2.4.3. Sean F, G dos prehaces y sea $\varphi : F \rightarrow G$ un morfismo de prehaces. Podemos definir un morfismo de espacios étale

$$\begin{aligned} \beta(\varphi) : \beta(F) &\rightarrow \beta(G) \\ f_x &\mapsto \varphi_x(f_x), \end{aligned}$$

donde $\varphi_x : F_x \rightarrow G_x$ es la aplicación definida en 2.2.4. Claramente $\beta(\varphi)$ conmuta con las proyecciones. Solo falta ver que es continua.

En efecto, denotemos por (E_F, π_F) y (E_G, π_G) los espacios étale $\beta(F)$ y $\beta(G)$, respectivamente. Sea $f_x \in \beta(F)$, como π_F es homeomorfismo local, existe un $U \in \mathbf{Op}_{f_x}(\beta(F))$ en el cual π_F es homeomorfismo. Por ser π_G homeomorfismo local, existe un $V \in \mathbf{Op}_{\varphi_x(f_x)}(\beta(G))$ en el cual π_G es homeomorfismo. Como el diagrama (2.1) conmuta, $\pi_F(f_x) = x = \pi_G(\beta(\varphi)(f_x))$ y así, $\pi_F(U)$ y $\pi_G(V)$ son entornos abiertos de x . Es suficiente

con considerar su intersección: $W := \pi_F(E_F) \cap \pi_G(E_G) \subset X$, que sigue siendo entorno de x . De esta forma, $\beta(\varphi)|_{\pi_F^{-1}(W)} = (\pi_G|_{\pi_G(W)})^{-1} \circ \pi_F|_{\pi_F^{-1}(W)} : \pi_F^{-1}(W) \rightarrow \pi_G^{-1}(W)$ es un homeomorfismo. Hemos probado entonces que $\beta(\varphi)$ es un homeomorfismo local, por lo que es abierta y continua.

$$\begin{array}{ccc} E_F & \xrightarrow{\beta(\varphi)} & E_G \\ \pi_F \searrow & & \swarrow \pi_G \\ & X & \end{array} \quad (2.1)$$

Observación 2.4.4. Un espacio étale no es necesariamente Hausdorff. Consideremos el espacio étale asociado al haz de funciones diferenciables reales: $\beta(C_{\mathbb{R}}^{\infty}(-, \mathbb{R}))$. Tomemos $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}$ y g que sea 0 en $t \leq 0$ y $e^{-1/t}$ para $t > 0$. Ambas tienen el mismo germen en los negativos, y distinto en el 0, por lo que no se pueden separar f_0 de g_0 por abiertos disjuntos, ya que todo entorno de cero contiene reales negativos. Si queremos un espacio étale Hausdorff hay que exigir más rigidez en el haz. Por ejemplo, las funciones analíticas no permiten estos comportamientos gracias al principio de identidad.

2.5 Relación entre haces y espacios étale

El objetivo de esta sección es probar que la categoría de haces y la de espacios étale son equivalentes.

Proposición 2.5.1. Para cada $E \in \mathbf{Et}(X)$ se tiene $\beta \circ \alpha(E) \cong E$. En otras palabras, $\beta \circ \alpha$ recupera el étale original módulo isomorfismo.

Demostración. Sea E un espacio étale. Tomamos su haz de secciones $\alpha(E)$. Sea $f_x \in \beta(\alpha(E))$ el germen en cierto x de alguna sección $f \in \Gamma(U, E)$, donde U es un entorno abierto de x . Definimos entonces

$$\begin{aligned} \psi : \beta(\alpha(E)) &\rightarrow E \\ f_x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Esta aplicación está bien definida porque si tomamos otro representante $f' \in \Gamma(U', E)$ con U' entorno de x tal que $f'_x = f_x$, existe un entorno abierto de x , $W \subset U \cap U'$ tal que $f|_W = f'|_W$ y así $f(x) = f'(x)$. Es claro que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \beta(\alpha(E)) & \xrightarrow{\psi} & E \\ p \searrow & & \swarrow \pi \\ & X & \end{array}$$

conmuta, porque $f(x) \in E$ y f es una sección.

La demostración de que ψ es homeomorfismo local procede de manera exactamente igual que en la demostración de que $\beta(\varphi)$ es homeomorfismo local (definición 2.2.4).

Si probamos que es biyectiva tendremos que es un homeomorfismo. La sobreyectividad se deduce de que para cada $y \in E$ consideramos $f_x \in \beta(\alpha(E))$, donde $x = \pi(y)$ y $f : X \rightarrow E$ es la aplicación constantemente

y . Es claro que $\psi(f_x) = f(x) = y$. Veamos la inyectividad: Supongamos que $\psi(f_x) = \psi(g_y)$. Entonces $f(x) = g(y) \in E$ para ciertos $f \in \Gamma(U, E)$, $g \in \Gamma(U', E)$ con U, U' entornos de x, y respectivamente. Luego $x = \pi \circ f(x) = \pi \circ g(y) = y$. f y g son funciones continuas con valores en E . Falta ver $f = g$ en un entorno de x . Podemos suponer que $U = U'$. Como $\pi \circ f = \text{id}_U = \pi \circ g$ y π es homeomorfismo local, podemos invertir π en un entorno de $f(x) = g(x)$, por lo que existe un entorno de x en el que $f = g$. $\square$

Proposición 2.5.2. $\alpha \circ \beta|_{\text{Sh}(X)}$ recupera el haz original (módulo isomorfismo).

Demostración. Sea F un haz y $\beta(F)$ su espacio étale, veamos que $\alpha \circ \beta(F)$ es isomorfo a F como haz. Consideremos el homomorfismo de haces $\phi : F \rightarrow \alpha(\beta(F))$ definido de la siguiente forma: dado $U \in \mathbf{Op}(X)$, para cada $f \in F(U)$ definimos $\phi_U : F(U) \rightarrow \Gamma(U, \beta(F))$, donde $\phi_U(f)$ es la sección que a cada $x \in U$ le asigna f_x . Esta sección es claramente continua porque tomando cualquier entorno de f_x contenido en $A(U, f)$ se tiene que su preimagen por π es un abierto en U . También es inmediato que $\pi \circ \phi_U(f) = \text{Id}_U$. Por lo que, efectivamente, $\phi_U(f) \in \Gamma(U, \beta(F))$. Probar que el morfismo conmuta con las restricciones es automático y no aporta nada interesante a la demostración.

Probemos ahora que ϕ_U es isomorfismo. Vamos con la inyectividad: Supongamos que $\phi_U(f)$ es la sección que a cada x le asigna el neutro 0_x , es decir, $f_x = 0_x$. Entonces, para cada $x \in U$ existe un entorno abierto de x , $U^x \subset U$ tal que $0|_{U^x} = f|_{U^x}$. Tomando el recubrimiento $\{U^x : x \in U\}$ podemos usar la propiedad de localidad del haz F para obtener que $f = 0_U \in F(U)$.

Probemos ahora la sobreyectividad: Sea $g \in \Gamma(U, \beta(F))$. Tomemos un representante de g en torno a un punto x . Cada $x \in U$ tiene un entorno abierto U^x y existe una sección $g_{U^x} \in F(U^x)$ tal que $g_{U^x}(p) = g(p)$ para cada $p \in U^x$. Si $x, y \in U$, tenemos que

$$g_{U^x}|_{U^x \cap U^y} = g_{U^y}|_{U^x \cap U^y}.$$

Luego, por la propiedad de pegamiento de F , se tiene que existe un $f \in F(U)$ tal que $f|_{U^x} = g_{U^x}$. $\square$

Observación 2.5.3. Estas dos proposiciones muestran que tomar el haz de secciones de un étale y tomar el espacio étale formado por las espigas de un haz son procesos inversos (salvo isomorfismo). Entonces, si encontramos un haz y un étale de forma que los grupos de secciones del espacio étale $\Gamma(U, E)$ coincidan con los grupos $F(U)$, tendremos que $E \cong \beta(F)$.

Ejemplo 2.5.4. Si F es el haz de funciones localmente constantes sobre un grupo, el espacio étale asociado a F es $X \times G_\delta$ con la topología producto, y la aplicación proyección sobre la primera coordenada.

En efecto, el grupo $F(U)$ coincide con el grupo de funciones continuas $C(U, G_\delta)$, que a su vez se identifica con el grupo de funciones continuas $C(U, X \times G_\delta)$ que verifican $\pi \circ f = \text{id}_U$. Es decir, $\Gamma(U, X \times G_\delta)$. Como $(X \times G_\delta, \pi)$ es un espacio étale y su grupo de secciones coincide con $F(U)$ (para cada U), tenemos por la observación 2.5.3 que es isomorfo a F .

Corolario 2.5.5. La categoría de haces y la categoría de espacios étale son equivalentes (en el sentido de A.2.2).

Demostración. Hemos definido un funtor $\alpha : \mathbf{Et}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$ que, gracias a 2.3 transforma los morfismos de espacios étale en los respectivos morfismos de haces.

En el sentido opuesto, tenemos un funtor $\beta|_{\mathbf{Sh}(X)} : \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{Et}(X)$ que, gracias a 2.4.3 transforma los morfismos de prehaces en los respectivos morfismos de espacios étale. En la proposición 2.5.2 probamos que para cada haz F existe un isomorfismo $\phi_F : \alpha \circ \beta(F) \rightarrow F$. Y en la proposición 2.5.1 vemos que para espacio étale E existe un isomorfismo $\psi_E : \beta \circ \alpha(E) \rightarrow E$. Es rutinario comprobar que para cualesquiera F_1, F_2 haces y cualquier morfismo $\varphi : F_1 \rightarrow F_2$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \alpha \circ \beta(F_1) & \xrightarrow{\alpha \circ \beta(\varphi)} & \alpha \circ \beta(F_2) \\ \phi_{F_1} \downarrow & & \downarrow \phi_{F_2} \\ F_1 & \xrightarrow{\varphi} & F_2, \end{array}$$

lo que nos dice que hay un isomorfismo natural entre el funtor identidad y el funtor $\alpha \circ \beta$.

Análogamente, para cualesquiera espacios étale E_1 y E_2 , y cualquier morfismo $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \beta \circ \alpha(E_1) & \xrightarrow{\beta \circ \alpha(\varphi)} & \beta \circ \alpha(E_2) \\ \psi_{E_1} \downarrow & & \downarrow \psi_{E_2} \\ E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2, \end{array}$$

y tenemos que hay un isomorfismo natural entre el funtor identidad (en la categoría de espacios étale) y el funtor $\beta \circ \alpha$. Estas dos conclusiones nos proporcionan que la categoría de haces es equivalente a la categoría de espacios étale. $\square$

Definición 2.5.6. Hemos visto que el funtor $\alpha \circ \beta : \mathbf{Psh}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$ restringido a $\mathbf{Sh}(X)$ es la identidad. Así que si tomamos un prehaz F que no sea haz y le aplicamos $\alpha \circ \beta$ obtenemos un haz F^+ . El proceso por el que se construye el haz F^+ a partir del prehaz F se llama *hacificación*.

Ejemplo 2.5.7. Con esta nueva terminología, el ejemplo 2.5.4 nos dice que el haz constante es la hacificación del prehaz constante.

2.6 Construcciones

Definición 2.6.1. Sea F es un haz de grupos y G es un subhaz de forma que $G(U)$ es un subgrupo normal en $F(U)$ para cada $U \in \mathbf{Op}(X)$. Definimos el *prehaz cociente* F/G el prehaz que a cada U le asigna el grupo $F(U)/G(U)$. Este prehaz en general no es un haz (ver ejemplo 2.6.2). Así que definimos el *haz cociente* F/G como la hacificación del prehaz cociente.

Ejemplo 2.6.2. Un ejemplo en el que el prehaz cociente no es un haz es el siguiente: Considérense en el espacio $X = S^1$ los haces $F = C_X(-, \mathbb{R})$ y G el haz constante $2\pi\mathbb{Z}$. Es claro que G es un subhaz de F . Veamos que el prehaz F/G no cumple la propiedad de pegamiento. Sean U_1 y U_2 dos arcos abiertos de circunferencia que se solapan en la unión disjunta de los arcos (la definición precisa se encuentra en el ejemplo 3.1.10). Sean f_i ($i = 1, 2$) funciones argumento definidas en U_i . (miden el ángulo con el punto $(1, 0)$). Es bien sabido que no existe una función argumento global. Aunque f_1 y f_2 no tienen por qué coincidir en las intersecciones, difieren en un múltiplo entero de 2π . Es por esto que en el cociente sí coinciden:

$$f_1(x) + 2\pi\mathbb{Z}(U_1) = f_2(x) + 2\pi\mathbb{Z}(U_2)$$

para todo $x \in U_1 \cap U_2$. Sin embargo, no existe ninguna sección global.

Proposición 2.6.3. Si tomamos el haz cociente F/G , tenemos que $(F/G)_x = F_x/G_x$.

Demostración. Sea $x \in X$, por definición

$$(F/G)_x := \varinjlim_{U \in \mathbf{Op}_x(X)} F(U)/G(U) = \varinjlim_{U \in \mathbf{Op}_x(X)} \{f + G(U) : f \in F(U)\}$$

Definamos un isomorfismo $\phi : (F/G)_x \rightarrow F_x/G_x$. Sea $h_x \in (F/G)_x$. h_x es una clase de equivalencia, así que escojamos un representante suyo: $f + G(U)$, para cierto U entorno abierto de x y $f \in F(U)$. Y así definimos $\phi(h_x) = f_x + G_x \in F_x/G_x$. Probemos que está bien definido: Tomemos otro representante $f' + G(V)$, con $V \in \mathbf{Op}_x(X)$ y $f' \in F(V)$. Por estar en la misma clase que $f + G(U)$, existe otro entorno de x abierto $W \subset U \cap V$, tal que $(f + G(U))|_W = (f' + G(V))|_W$. Como $(f + G(U))|_W = f|_W + G(W)$ y $(f' + G(V))|_W = f'|_W + G(W)$ tenemos $f|_W + G(W) = f'|_W + G(W)$. Aplicando la proyección sobre el límite directo queda

$$f_x + G_x = (f|_W)_x + G(W)_x = (f|_W + G(W))_x = (f'|_W + G(W))_x = f'_x + G_x.$$

Es rutinario probar que ϕ respeta la operación del grupo. Veamos la inyectividad: Si $\phi(h_x) = 0_x + G_x$ entonces existe un representante $f + G(U)$ verifica que $f_x \in G_x$. Es por esto que

$$h_x = (f + G(U))_x = f_x + G(U)_x = G(U)_x = (0 + G)_x.$$

Para ver la sobreyectividad tomemos $f_x + G_x \in F_x/G_x$. Escogiendo un representante de f_x , $f \in F(U)$ para algún entorno U de x se tiene (por definición de ϕ) que $\phi((f + G(U))_x) = f_x + G_x$. $\square$

Definición 2.6.4. Si $f : F \rightarrow G$ es un morfismo de haces, definimos su *imagen* como la hacificación del prehaz $(\text{Im}f)(U) := \text{Im}f_U$. Diremos que un morfismo de haces es *sobreyectivo* o *epimorfismo* si $\text{Im}f = G$.

Aunque se puede probar fácilmente que $f : F \rightarrow G$ inyectivo si y solo si $\ker f_U = 0$ para todo U , no es cierto que f sea sobreyectivo si y solo si $\text{Im}f(U) = G(U)$ para todo U . Sin embargo, sí tenemos las equivalencias en las espigas.

Proposición 2.6.5. Sea $f : F \rightarrow G$ un morfismo de haces entonces

1. f es inyectivo si y solo si $f_x : F_x \rightarrow G_x$ es inyectivo,
2. f es sobreyectivo si y solo si $f_x : F_x \rightarrow G_x$ es sobreyectivo.

Demostración. Se deducirá de la proposición 2.7.2. □

Por último, vamos a estudiar cómo “trasladar” haces de un espacio a otro usando funciones continuas:

Definición 2.6.6. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Si F es un haz sobre X , podemos definir su haz imagen directa f_*F (sobre Y) como

$$f_*F(U) := F(f^{-1}(U))$$

para cada $U \in \mathbf{Op}(Y)$.

Si quisiéramos partir de un haz F en Y y definir un haz imagen inversa en X , sería bastante natural definirlo en cada abierto U como $F(f(U))$. Sin embargo, esto no está bien definido, ya que f no tiene por qué ser abierta. Es por esto que se toma el límite directo de $F(V)$ en los abiertos V que cubren $f(U)$.

Definición 2.6.7. Sea $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos. Sea F un haz sobre Y . Definimos su haz imagen inversa $f^{-1}F$ sobre X como

$$f^{-1}(F)(U) := \varinjlim_{V \in \mathbf{Op}_{f(U)}(X)} F(V).$$

Puede verificarse que $(f^{-1}F)_x \cong F_{f(x)}$ vía cierto isomorfismo θ_x . Y con esto se tiene el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \beta(f^{-1}F) & \xrightarrow{\theta} & \beta(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

donde $\theta : f_x \mapsto \theta_x(f_x)$. El haz imagen inversa se denota usualmente por $f^{-1}F$ y no por f^*F porque la última notación se reserva para otro concepto en geometría algebraica. Para más propiedades de este haz ver la sección 1.7 de [9].

2.7 Sucesiones de morfismos de haces

En esta sección introduciremos las sucesiones exactas en la categoría de haces y daremos algunos ejemplos importantes. Luego estudiaremos la relación entre la exactitud de una sucesión de haces y la exactitud en los grupos de secciones.

Definición 2.7.1. Una sucesión de haces es *exacta* si la imagen de cada morfismo coincide con el núcleo del siguiente. La sucesión se dice *exacta corta* si es de la forma $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$.

Será útil la siguiente caracterización

Proposición 2.7.2. Sea

$$\dots \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow \dots \quad (2.2)$$

una sucesión de morfismos de haces. La sucesión es exacta si y solo si lo es en cada espiga. Es decir, si para cada $x \in X$, la sucesión

$$\dots \rightarrow F_x \rightarrow G_x \rightarrow H_x \rightarrow \dots \quad (2.3)$$

es exacta (como sucesión de grupos).

Demostración. Sean $F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$ morfismos de haces. Observemos que

$$(\ker g)_x = \{p_x \in F_x : p \in \ker g_U \subset F(U)\} = \{p_x \in F_x : g_U(p) = 0_U\} = \ker g_x,$$

donde $U \in \mathbf{Op}_x(X)$ es un entorno de x y p es un representante de p_x definido en dicho entorno.

Análogamente,

$$\begin{aligned} (\operatorname{Im} f)_x &= \{p_x \in G_x : p \in \operatorname{Im} f_U \subset G(U)\} = \{p_x \in G_x : \exists q \in F(U) \text{ con } p = f_U(q)\} \\ &= \{p_x \in G_x : \exists q_x \in F_x \text{ con } p_x = f_x(q_x)\} = \operatorname{Im} f_x, \end{aligned}$$

donde U y p están definidos como antes. Así,

$$2.2 \text{ es exacta} \Leftrightarrow \ker g = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \ker g_x = \operatorname{Im} f_x \text{ para todo } x \in X \Leftrightarrow 2.3 \text{ es exacta para todo } x \in X.$$

□

Ejemplo 2.7.3. Si G es un haz de grupos abelianos y F es subhaz de G entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \rightarrow F \hookrightarrow G \rightarrow F/G \rightarrow 0.$$

Para verlo basta con tener en cuenta que $(F/G)_x = F_x/G_x$ (ver proposición 2.6.3), porque así

$$0 \rightarrow F_x \rightarrow G_x \rightarrow G_x/F_x \rightarrow 0$$

es exacta para cada $x \in X$.

Construimos ahora una familia muy importante de ejemplos de sucesiones exactas de haces. Estas se construirán a partir de sucesiones exactas de grupos topológicos (no necesariamente abelianos).

Definición 2.7.4. Una *sucesión exacta corta de grupos topológicos* es una sucesión exacta de grupos $0 \rightarrow F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \rightarrow 0$ que, además, son grupos topológicos, f es un embedding (homeomorfismo sobre su imagen) y g es continua.

Observación 2.7.5. Observemos que una aplicación continua $f : F \rightarrow G$ entre grupos topológicos abelianos induce un morfismo $f_* : C(-, F) \rightarrow C(-, G)$ entre los haces de funciones continuas sobre dichos grupos de la siguiente manera. Para cada $U \in \mathbf{Op}(X)$ definimos $f_{*U} : C(U, F) \rightarrow C(U, G)$ por $f_{*U}(s) = f \circ s$.

Esto nos lleva a estudiar qué ocurre con las sucesiones exactas de grupos topológicos y las sucesiones de haces de funciones con valores en estos:

Proposición 2.7.6. Sea $0 \rightarrow F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$ una sucesión exacta de grupos topológicos, entonces la siguiente sucesión de haces es exacta

$$0 \rightarrow C(-, F) \xrightarrow{f_*} C(-, G) \xrightarrow{g_*} C(-, H).$$

Demostración. Sea $x \in X$. Veamos que $f_{*,x} : C(-, F)_x \rightarrow C(-, G)_x$ es inyectiva: Si $a_x \in C(-, F)_x$ y $f_x(a_x) = 0_x$, entonces existe un entorno U de x y $a \in C(U, F)$ tales que $f_*(a) = f \circ a = 0 : U \rightarrow G$. Luego para todo $p \in U$, $f(a(p)) = 0$. Por ser f inyectiva, $a(p) = 0$ para todo $p \in U$. Luego $a = 0_{C(U, F)}$.

Veamos que $\text{Im} f_{*,x} \subset \ker g_{*,x}$. Sea $b_x \in \text{Im} f_{*,x}$. Entonces existe $a_x \in C(-, F)_x$ con $f_{*,x}(a_x) = b_x$. Luego existen U entorno de x , $a \in C(U, F)$ y $b \in C(U, G)$ con $f_*(a) = f \circ a = b$. Para cada $p \in U$, $b(p) = f(a(p))$ por lo que $b(p) \in \text{Im} f = \ker g$, luego $g(b(p)) = 0$. De modo que $g_{*,x}(b_x) = 0$.

Veamos que $\ker g_{*,x} \subset \text{Im} f_{*,x}$. Sea $b_x \in \ker g_{*,x}$. Existen U entorno de x y $b \in C(U, G)$ tales que $g(b) = g \circ b = 0$. Para cada $p \in U$, $g(b(p)) = 0$, por lo que $b(p) \in \ker g = \text{Im} f$. Es decir, $\text{Im} b \subset \text{Im} f$. Por ser f un homeomorfismo sobre su imagen, podemos definir $a := f^{-1} \circ b \in C(U, F)$, que es continua. Y verifica $f_*(a) = b$, por lo que $f_{*,x}(a_x) = b_x$, y así $b_x \in \text{Im} f_{*,x}$. $\square$

Proposición 2.7.7. Sea $0 \rightarrow F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \rightarrow 0$ una sucesión exacta de grupos topológicos. Si existe $W \subset H$ abierto y $\sigma : W \rightarrow G$ tal que $g \circ \sigma = \text{Id}_W$, entonces

$$0 \rightarrow C(-, F) \xrightarrow{f_*} C(-, G) \xrightarrow{g_*} C(-, H) \rightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. En esta demostración usamos la notación multiplicativa. Sea $x \in X$. En vista de la proposición 2.7.6, solo hay que probar que g_* es sobreyectiva. Sea $b_x \in C(-, H)_x$, existen U entorno de x y $b \in C(U, H)$ un representante suyo. Aprovechando la estructura de grupo de G y H , podemos trasladar el abierto W para que incluya a x . Basta multiplicar los elementos de W por $b(x) \cdot \xi^{-1}$, donde ξ es un elemento de W . Es decir, $W' := \xi^{-1}b(x) \cdot W$. Como multiplicar es un homeomorfismo en un grupo topológico, W' es un entorno abierto de x . Ahora trasladamos la sección σ para que sea una sección $\sigma' : W' \rightarrow G$ de g . Observemos que por ser g homomorfismo, σ respeta la operación de grupo. Sean $p \in g^{-1}(\xi^{-1})$ y $q \in g^{-1}(b(x))$. Definimos

$$\begin{aligned} \sigma' : W' &\rightarrow G \\ \alpha &\mapsto pq \cdot \sigma(b(x)^{-1}\xi \cdot \alpha). \end{aligned}$$

Obsérvese que $b(x)^{-1}\xi \cdot \alpha$ está en W . Verifiquemos que σ' es una sección de g :

$$g \circ \sigma'(\alpha) = g(pq) \cdot g \circ \sigma(b(x)^{-1}\xi \cdot \alpha) = \xi^{-1}b(x) \cdot (b(x)^{-1}\xi \cdot \alpha) = \alpha,$$

Tomemos ahora $V = b^{-1}(W')$, que es entorno abierto de x por ser b continua. La aplicación $a = \sigma \circ b \in F(V)$ verifica que $g_*(a) = g \circ a = b$, luego $g_{*,x}(a_x) = b_x$ y hemos terminado. $\square$

Para grupos de Lie la demostración es igual, sustituyendo embedding topológico por embedding diferenciable (difeomorfismo sobre su imagen).

Observación 2.7.8. Algunas situaciones en las que se da la condición de 2.7.7 son:

1. Si g es homeomorfismo local.
2. Si $G \xrightarrow{g} H$ es un recubridor.
3. Si G y H son grupos de Lie no triviales, con G conexo y g diferenciable, entonces se verifica la condición. En efecto, como g sobreyectiva, toma todos los valores en H por lo que no es constante. De esta forma, su derivada $d_x g$ es no nula en algún punto $x \in G$. Por el teorema de la función inversa, g es localmente invertible en algún entorno de x .

Ejemplo 2.7.9. Una aplicación de la proposición 2.7.7 es obtener de la exactitud de $0 \rightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$ que la sucesión de haces

$$0 \rightarrow C(-, \mathbb{Z}) \rightarrow C(-, \mathbb{R}) \rightarrow C(-, S^1) \rightarrow 0$$

es exacta. (Nótese que $\mathbb{R}$ es el recubridor universal de $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$).

2.8 Exactitud al tomar secciones

En esta sección estudiamos la exactitud del funtor *tomar secciones*, que definimos a continuación.

Definición 2.8.1. Definimos el funtor *tomar secciones* $\Gamma(X, -)$, que va de la categoría de haces a la categoría de grupos. A cada haz F le asigna el grupo $\Gamma(X, \beta(F))$, que coincide con $F(X)$. Por la equivalencia de haces y espacios étale, escribiremos simplemente $\Gamma(X, F)$. Si $\varphi : F \rightarrow F'$ es un morfismo de haces, el funtor $\Gamma(X, -)$ manda φ al morfismo φ_* , definido por $\varphi_*(u) := \beta(\varphi) \circ u \in \Gamma(X, \beta(F'))$ para cada $u \in \Gamma(X, \beta(F))$. Vemos que $\Gamma(X, -)$ es un funtor covariante.

Proposición 2.8.2. Sea

$$0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$$

una sucesión exacta de haces. Entonces, para cada $U \in \mathbf{Op}(X)$, la siguiente sucesión es exacta

$$0 \rightarrow E(U) \rightarrow F(U) \rightarrow G(U).$$

Demostración. Démosle nombre a los morfismos. Para cada $x \in X$, la sucesión

$$0 \rightarrow E_x \xrightarrow{i_x} F_x \xrightarrow{\pi_x} G_x \rightarrow 0$$

es exacta. Y queremos ver que también lo es

$$0 \rightarrow E(U) \xrightarrow{i_U} F(U) \xrightarrow{\pi_U} G(U) :$$

- Sea $e \in E(U)$ tal que $i_U(e) = 0$. Luego si $x \in U$ tenemos que $i_x(e_x) = 0$, ya que $[i_x(e_x)] = [i_U(e)] = [0]$. Como i_x es inyectiva, sabemos que $e_x = 0_x$. Luego existe un $U^x \subset U$ tal que $e|_{U^x} = 0|_{U^x} = 0$. Como $x \in U$ era arbitrario, podemos recubrir U con abiertos $\{U^x : x \in U\}$ tales que $e|_{U^x} = 0|_{U^x}$. Por el axioma de localidad concluimos que $e_U = 0_U = 0$. Y así, i_U es inyectiva.
- Sea $e \in E(U)$. Para cada $x \in U$ tenemos $\pi_x(i_x(e_x)) = 0_x$. Existe entonces $U^x \subset U$ en el que $\pi_U(i_U(e))|_{U^x} = 0|_{U^x}$. De nuevo, por el axioma de localidad, tenemos que $\pi_U(i_U(e)) = 0$, por lo que $\text{Im } i_U \subset \ker \pi_U$.
- Sea ahora $f \in F(U)$ tal que $\pi_U(f) = 0$. Entonces para cada $x \in U$ se tiene que $\pi_x(f_x) = 0_x$. Luego existe $e_x \in E_x$ tal que $i_x(e_x) = f_x$. Por lo que existe un $U^x \subset U$ y un $e_{U^x} \in E(U^x)$ tal que $i_{U^x}(e_{U^x}) = f|_{U^x}$. Ahora el objetivo es ver que podemos pegar bien estos e_{U^x} . Es decir, si tomamos otro $y \in U$, hay que probar que $e_{U^x}|_{U^x \cap U^y} = e_{U^y}|_{U^x \cap U^y}$ para poder aplicar el axioma de pegamiento y concluir que existe la sección $e \in E(U)$ que buscamos. Pero esto es sencillo, ya que

$$i_{U^x \cap U^y}(e_{U^x}|_{U^x \cap U^y}) = f|_{U^x \cap U^y} = i_{U^x \cap U^y}(e_{U^y}|_{U^x \cap U^y}).$$

Como ya probamos la inyectividad de i_U , $i_{U^x \cap U^y}$ también es inyectiva, de lo que podemos concluir que $e_{U^x}|_{U^x \cap U^y} = e_{U^y}|_{U^x \cap U^y}$. De esta forma, existe $e \in E(U)$ tal que para cada $V \subset U$ se tiene que $i_V(e|_V) = f|_V$. Aplicando ahora el axioma de localidad, tenemos que $i_U(e) = f$. Concluimos que $\text{Im } i_U \supset \ker \pi_U$.

□

Observación 2.8.3. Esto significa que el functor *tomar secciones*, (definición 2.8.1), $\Gamma(X, -)$, que va de la categoría de haces a la categoría de grupos, es exacto por la izquierda.

Observación 2.8.4. El hecho de que una sucesión de haces sea exacta no quiere decir que al tomar los grupos de secciones lo siga siendo. Es decir, la exactitud de

$$0 \rightarrow E_x \rightarrow F_x \rightarrow G_x \rightarrow 0$$

para cada $x \in X$ no implica la exactitud de

$$0 \rightarrow E(U) \rightarrow F(U) \rightarrow G(U) \rightarrow 0$$

para un abierto $U \subset X$. En otras palabras, $F(U) \rightarrow G(U)$ no tiene por qué ser sobreyectiva.

Ejemplo 2.8.5. Si consideramos en $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ los haces $E = C^\infty(-, 2\pi i\mathbb{Z})$, $F = C^\infty(-, \mathbb{C})$ y $G = C^\infty(-, \mathbb{C}^*)$, tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \rightarrow 1,$$

que induce una sucesión exacta en los stalks (por 2.7.7), pero no exacta en las secciones

$$0 \rightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \hookrightarrow C^\infty(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} C^\infty(X, \mathbb{C}^*) \rightarrow 0.$$

Esto es porque $C^\infty(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} C^\infty(X, \mathbb{C}^*)$ no es sobreyectiva. Si lo fuera, existiría una función logaritmo global (diferenciable), definida en todo X . Así que, en este ejemplo, la obstrucción a la exactitud es la obstrucción a definir una función logaritmo global.

Hemos introducido los espacios étale en parte para justificar la siguiente filosofía: las propiedades al nivel de las secciones de un prehaz se pueden considerar *locales* en el sentido de que son relativas a los abiertos de un espacio. Las propiedades al nivel de un haz se pueden considerar de carácter *globales*, por ser relativas a secciones en abiertos que verifican las propiedades de localidad y pegamiento. Y las propiedades al nivel de las espigas son de carácter *infinitesimal*, ya que son relativas a lo que sucede en un punto y las funciones definidas en algún entorno de este. Los espacios étale equivalen a los haces, pero proporcionan un mayor contexto geométrico y dan sentido a trabajar con espigas. Han servido para definir el proceso de hacificación, que nos permite *completar* prehaces para convertirlos en haces, con lo que hemos podido definir el haz cociente y el haz imagen. Han permitido también ver que todos los haces son (isomorfos a) haces de funciones con valores en un espacio topológico (el espacio étale) y reducir el problema de tratar con sucesiones exactas de haces a tratar con sucesiones exactas de grupos.

Capítulo 3

Cohomología de Čech

En este capítulo vamos a definir la cohomología de Čech de un espacio topológico con coeficientes en un haz de grupos abelianos. Primero definiremos los grupos de cohomología en función de un recubrimiento y estableceremos propiedades de esta cohomología, que es interesante por sí sola. Posteriormente, definiremos la cohomología de Čech independiente del recubrimiento, que consistirá en tomar el límite directo de la cohomología dependiente del recubrimiento, según refinamos los recubrimientos. Como es usual en cohomología, estudiaremos la funtorialidad, la existencia de sucesión exacta larga, y daremos un importante teorema (Teorema de Leray, 3.4.2) que relacionará las dos cohomologías (dependiente e independiente del recubrimiento) y será un poderoso método de cálculo. Para terminar compararemos la cohomología de Čech con otras teorías de cohomología y hablaremos de la cohomología de Čech cuando el haz no es de grupos abelianos. A partir de ahora, F será un haz de grupos abelianos sobre X (salvo en 3.6, donde estudiaremos el caso general).

Sea $\mathbf{Rec}(X)$ el conjunto de recubrimientos abiertos de X . Por el axioma de elección, todos los recubrimientos pueden suponerse indexados por un conjunto totalmente ordenado. Cuando X sea compacto no hará falta el axioma de elección porque podremos trabajar con subrecubrimientos finitos. Si no se indica nada, $\mathfrak{U}$ denotará un elemento de $\mathbf{Rec}(X)$, y llamaremos I a su conjunto de índices. Si $U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_q} \in \mathfrak{U}$ tienen intersección no vacía, denotamos $U_{i_0 i_1 \dots i_k} := \bigcap_{j=0}^k U_{i_j}$ y $U_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_k} := \bigcap_{j=0, j \neq p}^k U_{i_j}$.

3.1 Cohomología de Čech dependiente del recubrimiento

En esta sección vamos a definir los grupos de Cohomología con coeficientes en grupos abelianos en función de un recubrimiento.

Definición 3.1.1. Diremos que el *grupo de q -cocadenas de Čech* (asociado a $\mathfrak{U}$ y F) es el producto

$$C^q(\mathfrak{U}, F) := \prod_{i_0 < \dots < i_q} F(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}) = \prod_{i_0 < \dots < i_q} F(U_{i_0 i_1 \dots i_q})$$

si $q \geq 0$. Los elementos de $C^q(\mathfrak{U}, F)$ se llaman q -cocadenas.

Por ejemplo, los dos primeros grupos no triviales son

$$C^0(\mathfrak{U}, F) = \prod_{i \in I} F(U_i) \quad \text{y} \quad C^1(\mathfrak{U}, F) = \prod_{i < j} F(U_i \cap U_j).$$

Denotaremos una q -cocadena f como $(f_{i_0 i_1 \dots i_q})_{i_0, i_1, \dots, i_q \in I}$. Podemos ver $(f_{i_0 i_1 \dots i_q})_{i_0, i_1, \dots, i_q \in I}$ como un operador que a cada subconjunto de índices $\{i_0, i_1, \dots, i_q\}$ asigna una sección $f_{i_0 i_1 \dots i_q} \in F(U_{i_0 i_1 \dots i_q})$. En múltiples ocasiones, para aligerar la notación, el homomorfismo restricción $|_{U_{i_0 \dots i_q}}$ será denotado simplemente por $|_{i_0 \dots i_q}$. Si queremos eliminar el índice i_j del multiíndice $i_0 \dots i_k$ escribiremos $i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_k$.

A veces será intuitivo ver la q -cocadena actuando sobre familias de abiertos $\{U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_q}\}$.

Si permutamos los subíndices mediante una permutación σ distinta de la identidad, $f_{\sigma i_0 \sigma i_1 \dots \sigma i_q}$ no está definida, así que definiremos $f_{\sigma i_0 \sigma i_1 \dots \sigma i_q} := (-1)^{\text{sign} \sigma} f_{i_0 i_1 \dots i_q}$. Y si hay algún índice repetido, definiremos el elemento como nulo. Es por eso, que si el recubrimiento tiene k elementos, el grupo de cohomología q -ésimo será 0 si $q > k$.

Definición 3.1.2. Definimos el q -ésimo operador coborde $d^q : C^q \rightarrow C^{q+1}$ mediante $d^q : f \mapsto d^q f$, donde

$$(d^q f)_{i_0 i_1 \dots i_{q+1}} = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k f_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_{q+1}} |_{i_0 i_1 \dots i_{q+1}}$$

si $q \geq 0$.

Observación 3.1.3. Observemos que $U_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_{q+1}} \supset U_{i_0 i_1 \dots i_{q+1}}$, porque al eliminar un subíndice de la familia de abiertos la intersección se hace *más grande*. Remarcamos que la suma ahí tiene sentido porque usamos la notación aditiva. Y es inmediato ver que d^q es un homomorfismo de grupos.

Lema 3.1.4. $d^{q+1} \circ d^q = 0$.

Demostración. La dificultad de la prueba reside en el correcto manejo de los subíndices, más que en su profundidad. Sea $f \in C^q$. Por definición, $d^{q+1}(df) = \sum_{j=0}^{q+2} (-1)^j (df)_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_j \dots i_{q+2}} |_{i_0 i_1 \dots i_{q+2}}$. Nótese que, para cada $k \in \{0, 1, \dots, q+2\}$, df toma una familia $\{i_0 i_1 \dots i_{q+2}\}$, y elimina el i_k . De esa familia restante, f tomará una subfamilia eliminando otro término, el i_j (obsérvese entonces que necesariamente $j \neq k$). De esta forma, la expresión queda

$$(d^{q+1} f)_{i_0 i_1 \dots i_{q+2}} = \sum_{k=0}^{q+2} (-1)^k \left(\sum_{j=0, j \neq k}^{q+2} (-1)^j f_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_k \dots i_{q+2}} |_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_{q+1}} \right) |_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_{q+2}}.$$

Por la propiedad de composición del homomorfismo restricción, la expresión de arriba se simplifica a

$$(d^{q+1} f)_{i_0 i_1 \dots i_{q+2}} = \sum_{k=0}^{q+2} (-1)^k \sum_{j=0, j \neq k}^{q+2} (-1)^j f_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_k \dots i_{q+2}} |_{i_0 i_1 \dots i_{q+2}},$$

que se descompone como

$$(d^{q+1}f)_{i_0 i_1 \dots i_{q+2}} = \sum_{j < k} (-1)^{k+j} f_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_k \dots i_{q+2}} |_{i_0 i_1 \dots i_{q+2}} + \sum_{j > k} (-1)^{k+j} f_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_k \dots \hat{i}_j \dots i_{q+2}} |_{i_0 i_1 \dots i_{q+2}}$$

y, aplicando la propiedad de los signos de las permutaciones,

$$(d^{q+1}f)_{i_0 i_1 \dots i_{q+2}} = \sum_{j < k} (-1)^{k+j} f_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_k \dots i_{q+2}} |_{i_0 i_1 \dots i_{q+2}} - \sum_{j > k} (-1)^{k+j} f_{i_0 i_1 \dots \hat{i}_k \dots \hat{i}_j \dots i_{q+2}} |_{i_0 i_1 \dots i_{q+2}} = 0.$$

□

Con todo esto ya podemos definir el siguiente *complejo de cocadenas*, que denotaremos por $C^\bullet(\mathfrak{U}, F)$, como sigue

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{d^{-1}} C^0(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{d^2} \dots \xrightarrow{d^{q-1}} C^q(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{d^q} C^{q+1}(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{d^{q+1}} \dots$$

Definición 3.1.5. 1. Un *q-cociclo* es una *q-cocadena* $f \in C^q(\mathfrak{U}, F)$ tal que $d^q f = 0$. El conjunto de *q-cociclos* es $Z^q(\mathfrak{U}, F) := \ker d^q$.

2. Un *q-coborde* es una *q-cocadena* $f \in C^q$ tal que $d^{q-1}g = f$ para cierto $g \in C^{q-1}$. El conjunto de *q-cobordes* es $B^q(\mathfrak{U}, F) := \text{Im} d^{q-1}$.

El lema 3.1.4 nos indica que $B^q(\mathfrak{U}, F) \subset Z^q(\mathfrak{U}, F)$, pero no asegura la igualdad. Precisamente para medir *cómo de exacta* es esta sucesión en el término *q-ésimo* definimos los grupos de cohomología.

Definición 3.1.6. Definimos el *q-ésimo grupo de cohomología de Čech sujeto al recubrimiento $\mathfrak{U}$* como

$$\check{H}^q(\mathfrak{U}, F) := H^q(C^\bullet(\mathfrak{U}, F)) = \frac{Z^q(\mathfrak{U}, F)}{B^q(\mathfrak{U}, F)}.$$

Ejemplo 3.1.7. Veamos qué forma tienen los cociclos y cobordes de orden bajo.

1. Si $f \in Z^0(\mathfrak{U}, F)$ entonces $0 = df = (-1)^0 f_i |_{ij} + (-1)^1 f_j |_{ij} = f_i |_{ij} - f_j |_{ij}$.

Es decir, para cada subfamilia $\{U = U_i, V = U_j\} \subset \mathfrak{U}$ se tiene

$$f_U |_{U \cap V} = f_V |_{U \cap V}.$$

2. De la misma forma podemos establecer una igualdad que caracteriza a los 1-cociclos: Si $f \in Z^1(\mathfrak{U}, F)$, para cada $\alpha = \{U, V, W\}$, se ve análogamente que

$$df(\alpha) = f_{VW} |_{U \cap V \cap W} - f_{UW} |_{U \cap V \cap W} + f_{UV} |_{U \cap V \cap W} = 0.$$

Esta última igualdad es muy importante y se llamará *relación de 1-cociclo*.

3. Sea g un 0-coborde. Entonces $g \in \text{Im} d^{-1} = \{d^{-1}f : f \in C^{-1}\} = \{d^{-1}0\} = \{0\}$. Luego $B^0 = \{0\}$.

4. Sea $f = (f_{ij})_{ij}$ un 1-coborde. Eso significa que existe un $g = (g_i)_i \in C^0(\mathfrak{U}, F)$ tal que $f_{ij} = (dg)_{ij} = g_i |_{i,j} - g_j |_{i,j}$.

Observación 3.1.8. Podemos escribir entonces

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, F) = \frac{\{(f_{UV})_{U,V} : f_{VW} - f_{UW} + f_{UV} = 0\}}{\{(f_{UV})_{U,V} : \exists (g_W)_W \text{ con } f_{UV} = g_V - g_U\}}.$$

Proposición 3.1.9. Sea F un haz sobre X y $U \subset X$ abierto. Si $\mathfrak{U} = \{U_i : i \in I\}$ es un recubrimiento abierto de U entonces $\check{H}^0(\mathfrak{U}, F) \cong F(U)$.

Demostración. $B^0 = \{0\}$. Por lo que $\check{H}^0(\mathfrak{U}, F) = Z^0(\mathfrak{U}, F)$ Sea $f = \{f_i\}_{i \in I}$ un 0-cociclo. Asociémosle un elemento $\phi(f) \in F(U)$. Para cada $i \in I$, $f_i \in F(U_i)$. Por la condición de cociclo, $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ para cualesquiera $i, j \in I$. Así, por la propiedad de pegamiento, existe $\phi(f) \in F(U)$ tal que $\phi(f)|_{U_i} = f_i$. Claramente esta asignación ϕ es homomorfismo. Veamos que es inyectiva: Si $\phi(f) = 0$, entonces para cada $i \in I$, $\phi(f)|_{U_i} = 0|_{U_i}$. Por la propiedad de localidad, $f_i = 0_i \in F(U_i)$ para todo $i \in I$. Por lo que $f = \{0_i\}_{i \in I}$. La sobreyectividad es incluso más sencilla: Si $g \in F(U)$, basta tomar $f = \{g|_{U_i}\}_{i \in I}$ y de la localidad se desprende que $\phi(f) = g$. $\square$

Ejemplo 3.1.10. Sea $X = S^1$ y $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2\}$ con $U_1 = S^1 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -\frac{1}{2}\}$ y $U_2 = S^1 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < \frac{1}{2}\}$ (ver figura 3.1). Veamos que $\check{H}^1(\mathfrak{U}, G) \cong G$.

En efecto, el haz G es el haz que a cada abierto U le asigna el grupo de funciones localmente constantes $U \rightarrow G$. Así, un elemento de $G(U)$ está completamente determinado su valor en algún punto de cada componente conexa de U . Por tanto, $F(U) = G^c$, donde c es el número de componentes conexas. Por definición, $C^0 = F(U_1) \times F(U_2) = G \times G$. Y $C^1 = F(U_1 \cap U_2) = G$, por tener $U_1 \cap U_2$ dos componentes conexas. Como el recubrimiento tiene únicamente dos elementos, $C^2 = \{0\}$. Luego $\ker d^1 = C^1 = G \times G$. Calculemos ahora B^1 . Sabemos que $f_{ij} \in B^1$ si y sólo si existe g_i con $f_{ij} = g_i - g_j$ restringido a $U_i \cap U_j$. Es decir, si representamos $f \in C^1$ por una tupla (p, q) donde $p \in G$ es el valor de la función en una componente conexa de $U_1 \cap U_2$ y $q \in G$ es el valor de la función en la otra, tendremos que f es un 1-coborde si y solo si es diferencia de dos funciones a, b . Donde $a : U_1 \rightarrow G$ y $b : U_2 \rightarrow G$. Pongamos que a_0 es el valor en G que toma a y b_0 es el valor en G que toma b . Al restringir a y b a $U_1 \cap U_2$ quedan las funciones (a_0, a_0) y (b_0, b_0) respectivamente. Luego si $(p, q) = (a_0, a_0) - (b_0, b_0)$ entonces $p = q$. De modo que $B_1 \cong \{(g, g) : g \in G\} \subset G \times G$. Luego

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, G) \cong G \times G / G \cong G.$$

Ejemplo 3.1.11. Sean $X = \{p\}$ un punto, $\mathfrak{U}$ un recubrimiento de X , y F un haz en X . Naturalmente, $\mathfrak{U} = \{\{p\}\}$ tiene cardinal 1, por lo que $\check{H}^q(\mathfrak{U}, F) = 0$ para $q > 0$ y $\check{H}^0(\mathfrak{U}, F) = F(X)$ por la proposición 3.1.9.

Definición 3.1.12. Sea $\mathfrak{U} = \{U_i : i \in I\} \in \mathbf{Rec}(X)$. Un *refinamiento* de $\mathfrak{U}$ es un recubrimiento abierto $\mathfrak{V} = \{V_j : j \in J\}$ para el que existe una aplicación $\beta : J \rightarrow I$ tal que $V_j \subset U_{\beta j}$. Escribiremos $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$.

Observación 3.1.13. Es inmediato ver que esto da una relación de orden parcial en $\mathbf{Rec}(X)$. Al igual que cualquier conjunto parcialmente ordenado, podemos ver $(\mathbf{Rec}(X), <)$ como una categoría en la que los objetos

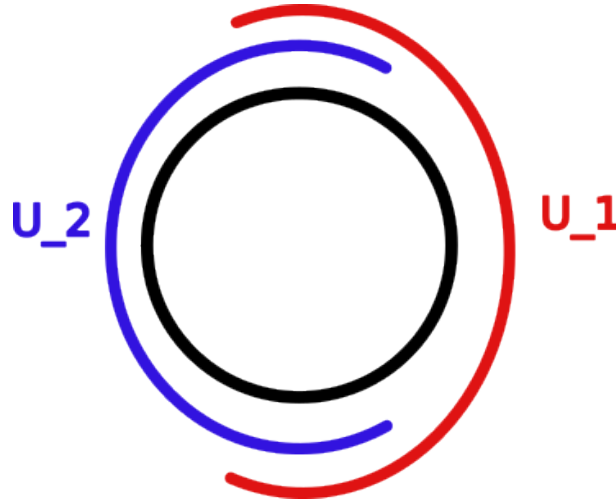


Figura 3.1: Recubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2\}$.

son los recubrimientos y dados dos objetos $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ el conjunto de morfismos de $\mathfrak{V}$ a $\mathfrak{U}$ es $\{(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})\}$ si $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ y $\emptyset$ en cualquier otro caso.

Observación 3.1.14. Sea $\mathfrak{U} = \{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento y $\mathfrak{V} = \{V_j : j \in J\}$ un refinamiento suyo. Por definición, existe $\beta : J \rightarrow I$ verificando $V_j \subset U_{\beta j}$. Observemos que la aplicación β induce un morfismo de complejos de cocadenas (ver A.1.5)

$$\beta^\bullet : C^\bullet(\mathfrak{U}, F) \rightarrow C^\bullet(\mathfrak{V}, F)$$

dado por $\beta^q(f)_{j_0 j_1 \dots j_q} = f_{\beta j_0 \beta j_1 \dots \beta j_q} |_{j_0 j_1 \dots j_q}$. A su vez, por (A.1.10), $\beta^\bullet$ induce un morfismo en las cohomologías $\beta_{*,q} : \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{V}, F)$.

Lema 3.1.15. Si μ es otra aplicación $\mu : J \rightarrow I$ con $V_j \subset U_{\mu j}$ entonces $\mu_{*,q} = \beta_{*,q} : \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{V}, F)$.

Demostración. Para esto veremos que existe un operador de homotopía (A.1.16) entre $\mu^\bullet$ y $\beta^\bullet$. Y así, por la proposición A.1.17 tendremos la igualdad buscada. Si $\alpha = (i_0, i_1, \dots, i_{q-1})$ es un multi-índice, definimos

$$\alpha_j = (\beta i_0, \beta i_1, \dots, \beta i_j, \mu i_j, \dots, \mu i_{q-1}).$$

Y así, podemos definir $h^q : \check{C}^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{C}^{q-1}(\mathfrak{V}, F)$ así: dado $f \in \check{C}^q(\mathfrak{U}, F)$, entonces

$$h^q(f)_\alpha := \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j f_\alpha |_{\alpha_j}.$$

Y se prueba que $h^{q+1} \circ d + d \circ h^q = \mu^q - \beta^q$. □

De esta forma, para cada par de recubrimientos con $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ se tiene un morfismo bien definido

$$R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}} : \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{V}, F) \quad (3.1)$$

y es fácil comprobar que si $\mathfrak{V} < \mathfrak{U} < \mathfrak{W}$ entonces $R_{\mathfrak{W}\mathfrak{V}} = R_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}} \circ R_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}}$.

Corolario 3.1.16. $\check{H}^q(-, F)$ es un funtor contravariante de la categoría $\mathbf{Rec}(X)$ a la categoría de grupos abelianos.

$$\begin{aligned}\check{H}^q(-, F) : \mathbf{Rec}(X) &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ \mathfrak{U} &\mapsto \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) \\ \mathfrak{V} < \mathfrak{U} &\mapsto R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}.\end{aligned}$$

Estudiemos ahora la funtorialidad de los grupos de cohomología en la categoría de haces. Fijemos un recubrimiento $\mathfrak{U}$. Podemos definir el funtor

$$\begin{aligned}\check{H}^q(\mathfrak{U}, -) : \mathbf{Sh}(X) &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ F &\mapsto \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) \\ \psi : F \rightarrow F' &\mapsto \check{H}^q(\mathfrak{U}, \psi),\end{aligned}$$

donde $\check{H}^q(\mathfrak{U}, \psi)$ está definido de la siguiente forma: para cada $U \in \mathbf{Op}(X)$ tenemos un morfismo de grupos $\psi_U : F(U) \rightarrow F'(U)$. Definimos $\hat{\psi} : C^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow C^q(\mathfrak{U}, F')$ por $\hat{\psi}(f)_{i_0 i_1 \dots i_q} := \psi_{U_{i_0 i_1 \dots i_q}}(f_{i_0 i_1 \dots i_q})$

Como ψ_U respeta las operaciones de grupo es claro que $\hat{\psi}$ es morfismo de grupos. Y así, induce un morfismo entre los grupos de cohomología (A.1.10), que llamaremos $\check{H}^q(\mathfrak{U}, F \xrightarrow{\psi} F') : \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{U}, F')$.

El resto de condiciones de funtorialidad se verifican rutinariamente.

Corolario 3.1.17. La asignación $\check{H}^q(\mathfrak{U}, -)$ es un funtor covariante de la categoría de haces a la categoría de grupos.

3.2 Cohomología de Čech independiente del recubrimiento

Hasta ahora hemos definido los grupos $\check{H}^q(\mathfrak{U}, F)$ en función del recubrimiento. El objetivo de esta sección es dar una definición general que no dependa del recubrimiento. Para ello tomaremos el límite directo de los grupos $\check{H}^q(\mathfrak{U}, F)$ según refinamos $\mathfrak{U}$.

En 3.1 construimos un morfismo

$$R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}} : \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{V}, F)$$

para cada par de recubrimientos de X verificando $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$. Esto induce un orden parcial en los grupos $\check{H}^q(\mathfrak{U}, F)$ y, junto con los morfismos $R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}$, forman un sistema dirigido, por lo que podemos considerar la siguiente

Definición 3.2.1. Definimos el *grupo q -ésimo grupo de cohomología de Čech* (independientemente del recubrimiento) como

$$\check{H}^q(X, F) := \varinjlim_{\mathfrak{U} \in \mathbf{Rec}(X)} \check{H}^q(\mathfrak{U}, F)$$

Ejemplo 3.2.2. Sea $U \subset X$ abierto. Sabemos que para cualquier recubrimiento $\mathfrak{U}$ de U , $\check{H}^0(\mathfrak{U}, F) = F(U)$ (proposición 3.1.9). Por lo que el conjunto dirigido (por el refinamiento de recubrimientos) deja invariante el grupo $\check{H}^0(\mathfrak{U}, F) = F(U)$. Así que el límite directo, será $\check{H}^0(U, F) = F(U)$.

Ejemplo 3.2.3. Por el ejemplo 3.1.11, tenemos que todos los grupos de cohomología de un punto (de orden $q > 0$) son nulos sea cual sea el recubrimiento. Así,

$$\check{H}^q(\{p\}, F) = \begin{cases} F(\{p\}) & \text{si } q = 0, \\ 0 & \text{si } q > 0. \end{cases}$$

Proposición 3.2.4. Si $X = X_1 \cup X_2$ tiene dos componentes conexas (X_1 y X_2), y F es un haz sobre X , entonces $\check{H}^q(X, F) = \check{H}^q(X_1, F) \oplus \check{H}^q(X_2, F)$.

Demostración. Observemos que por 3.2.2 y 2.1.6 el resultado es inmediato para $q = 0$. Sea $\mathfrak{U}$ un recubrimiento de X . Podemos definir $\mathfrak{U}^i := \{U \cap X_i : U \in \mathfrak{U}\}$ para $i = 1, 2$. Denotemos por α un multiíndice en $\mathfrak{U}$.

$$\begin{aligned} C^q(\mathfrak{U}, F) &= \prod_{\alpha} F(U_{\alpha}) = \prod_{\alpha} F((U_{\alpha} \cap X_1) \cup (U_{\alpha} \cap X_2)) = \prod_{\alpha} (F(U_{\alpha} \cap X_1) \oplus F(U_{\alpha} \cap X_2)) \\ &= \left(\prod_{\alpha} F(U_{\alpha} \cap X_1) \right) \oplus \left(\prod_{\alpha} F(U_{\alpha} \cap X_2) \right) = C^q(\mathfrak{U}^1, F) \oplus C^q(\mathfrak{U}^2, F) \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que $\ker d$ y $\text{Im} d$ se escinden con la suma directa, por lo que

$$\check{H}^q(\mathfrak{U}, F) = \check{H}^q(\mathfrak{U}^1, F) \oplus \check{H}^q(\mathfrak{U}^2, F).$$

Por último, el límite directo conmuta con la suma directa (ver A.3.10), de donde concluimos el resultado. $\square$

En la práctica, calcular grupos de cohomología de Čech por la definición es prácticamente inviable, así que será de gran ayuda saber si existe algún recubrimiento $\mathfrak{U}$, tal que

$$\check{H}^q(\mathfrak{U}, F) = \check{H}^q(X, F).$$

Para esto nos ayuda el teorema de Leray (ver 3.4.2), que asegurará que ciertos recubrimientos verifican esta propiedad.

Estudiemos la funtorialidad de la cohomología independiente del recubrimiento en la categoría de haces. Veamos que cada morfismo de haces induce un morfismo en las cohomologías. Sea $\psi : F \rightarrow F'$ un morfismo de haces. Sabemos que en cada recubrimiento $\mathfrak{U}$ tenemos un morfismo $\psi_* = \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{U}, F')$. Veamos que al tomar el límite directo hay un morfismo bien definido, dado por

$$\check{H}^q(X, F \xrightarrow{\psi} F') := \varinjlim_{\mathfrak{U} \in \mathbf{Rec}(X)} \check{H}^q(\mathfrak{U}, F \xrightarrow{\psi} F') : \check{H}^q(X, F) \rightarrow \check{H}^q(X, F').$$

Para ello basta con comprobar que, para cada $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) & \xrightarrow{\psi_*} & \check{H}^q(\mathfrak{U}, F') \\ R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}} \downarrow & & \downarrow R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}} \\ \check{H}^q(\mathfrak{V}, F) & \xrightarrow{\psi_*} & \check{H}^q(\mathfrak{V}, F'). \end{array}$$

Sea $[f] \in \check{H}^q(\mathfrak{U}, F)$. Por un lado, $\psi_*([f]) = [(\psi_{U_\alpha}(f_\alpha))_{\alpha \in \mathfrak{U}}]$. Y así $(R_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}} \circ \psi_*)([f]) = [(\psi_{U_{\beta\alpha'}}(f_{\beta\alpha'})|_{\alpha'})_{\alpha' \in \mathfrak{W}}]$. Por otro lado, $R_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}}([f]) = [(f_{\beta\alpha'}|_{\alpha'})_{\alpha' \in \mathfrak{W}}]$, luego $(\psi_* \circ R_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}})([f]) = [(\psi_{U_{\alpha'}}(f_{\beta\alpha'}|_{\alpha'}))_{\alpha' \in \mathfrak{W}}]$. Pero precisamente, por ser ψ un morfismo de haces, para cada $\alpha' \in \mathfrak{W}$ se tiene que

$$\psi_{U_{\beta\alpha'}}(f_{\beta\alpha'})|_{\alpha'} = \psi_{U_{\alpha'}}(f_{\beta\alpha'}|_{\alpha'}),$$

por lo que tenemos la igualdad buscada.

Corolario 3.2.5. $\check{H}^q(X, -)$ es un funtor covariante de la categoría de haces sobre X a la categoría de grupos.

Estudiemos la funtorialidad de la cohomología independiente del recubrimiento como un funtor $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Esta vez no vamos a demostrar los detalles, porque es más delicado que en los anteriores casos. Sólo diremos que si $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua y F es un haz sobre Y , se puede probar que existe un morfismo de grupos

$$\check{H}^q(Y, F) \rightarrow \check{H}^q(X, f^{-1}F).$$

En el capítulo 9 de [3] se prueba para haces constantes y en [8] se esboza la construcción del morfismo en general. Un corolario de esto es que un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ induce un isomorfismo de grupos $\check{H}^q(Y, F) \rightarrow \check{H}^q(X, f^{-1}F)$, por lo que la cohomología independiente del recubrimiento es un *invariante topológico*. Sin embargo, para ver esto último no es necesario conocer la existencia de tal morfismo en general. Basta observar que si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, en particular es abierta, por lo que $f^{-1}F(U) = F(f(U))$. Y como los abiertos de un recubrimiento $\mathfrak{U} \in \mathbf{Rec}(Y)$ están en correspondencia biyectiva con los de $f^{-1}\mathfrak{U} := \{f^{-1}(U) : U \in \mathfrak{U}\}$ tenemos que

$$C^q(\mathfrak{U}, F) = \prod_{\alpha} F(U_\alpha) = \prod_{\alpha} F(f(f^{-1}(U_\alpha))) = \prod_{\alpha} f^{-1}F(f^{-1}(U_\alpha)) = C^q(f^{-1}\mathfrak{U}, f^{-1}F).$$

Luego $\check{H}^q(\mathfrak{U}, F) = \check{H}^q(f^{-1}\mathfrak{U}, f^{-1}F)$ y al tomar el límite directo coinciden porque, por ser f homeomorfismo, refinar $\mathfrak{U}$ refina $f^{-1}\mathfrak{U}$.

Si $F = G_Y$ es el haz (en Y) de funciones localmente constantes sobre Y , entonces $f^{-1}G_Y = G_X$. Denotamos ambos por G , y tenemos un funtor $\check{H}^q(-, G) : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$ que a cada X le asigna el grupo $\check{H}^q(X, G_X)$ y a cada $f : X \rightarrow Y$ continua le asigna el morfismo

$$f^* : \check{H}^q(Y, G_Y) \rightarrow \check{H}^q(X, G_X).$$

3.3 Sucesión exacta larga

En la sección 2.1 definimos sucesiones de haces y comentamos que la sucesión exacta corta entre haces no se tiene por qué extender a los grupos de secciones. El siguiente teorema nos da información sobre la obstrucción a que esto ocurra.

Teorema 3.3.1. Sea $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta de haces y un espacio topológico X (no necesariamente Hausdorff o paracompacto). Entonces existe un homomorfismo

$$F''(X) \xrightarrow{\partial} \check{H}^1(X, F')$$

que hace que la siguiente sucesión

$$0 \rightarrow F'(X) \rightarrow F(X) \rightarrow F''(X) \xrightarrow{\partial} \check{H}^1(X, F') \rightarrow \check{H}^1(X, F) \rightarrow \check{H}^1(X, F'')$$

sea exacta.

Demostración. Probaremos un resultado ligeramente más general en 3.6.4. □

Y usando que $\check{H}^0(U, S) = S(U)$ tenemos

$$0 \rightarrow \check{H}^0(U, F') \rightarrow \check{H}^0(U, F) \rightarrow \check{H}^0(U, F'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^1(U, F') \rightarrow \check{H}^1(U, F) \rightarrow \check{H}^1(U, F''). \quad (3.2)$$

Este teorema ilustra algo muy importante: Si el primer grupo de cohomología fuera nulo entonces la aplicación $F(U) \rightarrow F''(U)$ sería sobreyectiva. De esta forma, el primer grupo de cohomología mide la obstrucción a que dicha aplicación sea sobreyectiva. Dicho en lenguaje de categorías (corolario 3.2.5), el funtor $\check{H}^1(X, -)$ mide la obstrucción a que el funtor *tomar secciones* (2.8.1) sea exacto. El mismo desarrollo algebraico que prueba el teorema se puede ver ejemplificado en contextos geométricos y topológicos, como el problema de Mittag-Leffler (ver sección 0.3 en [5]).

Para la demostración de la sucesión exacta larga hasta el $\check{H}^1$ no se necesita ninguna hipótesis sobre el espacio. Es suficiente con que sea un espacio topológico. Sin embargo, exigiendo que el espacio sea Hausdorff paracompacto, podemos obtener una sucesión exacta larga infinita, que será nuestro próximo objetivo.

Definición 3.3.2. Un espacio se dice *paracompacto* si todo recubrimiento admite un refinamiento localmente finito.

Ejemplo 3.3.3. Los ejemplos por excelencia de espacios Hausdorff paracompactos son

1. Los CW-complejos (en particular los complejos simpliciales).
2. Las variedades topológicas.
3. Los espacios metrizables.

La principal propiedad de los espacios Hausdorff paracompactos es que tienen particiones (continuas) de la unidad. Salvo que se indique lo contrario, de ahora en adelante supondremos que X es un espacio Hausdorff paracompacto.

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Veremos que si $C_X(-, \mathbb{K})$ es el haz de funciones continuas reales/complejas, los grupos de cohomología son nulos. Esto se debe a que la existencia de particiones de la unidad proporciona una gran

flexibilidad a estos grupos, lo que hará que para cada q -cociclo f podamos construir otra $(q-1)$ -cocadena g tal que $d^{q-1}g = f$.

Teorema 3.3.4. $\check{H}^q(\mathfrak{U}, C_X(-, \mathbb{K})) = 0$ si $q \geq 1$.

Demostración. Pongamos $\mathfrak{U} = \{U_k\}_{k \in I}$. Sea $f = (f_{i_0 i_1 \dots i_q})_{i_0 i_1 \dots i_q} \in \ker d^q \subset C^q(\mathfrak{U}, C_X(-, \mathbb{K}))$. Tomemos una partición de la unidad $\{\theta_k\}_{k \in I}$ subordinada a $\mathfrak{U}$. Y definamos

$$g_{i_0 i_1 \dots i_{q-1}} := \sum_{k \in I} \theta_k f_{k i_0 \dots i_{q-1}}.$$

Veamos que $d^q g = f$. Para una mayor comprensión ejemplifiquemos primero el caso $q = 1$. Si $f = (f_{UV})_{U,V}$ es un cociclo, tenemos $(df)_{UV} = f_{VW} - f_{UW} + f_{UV} = 0$ en $U \cap V \cap W$. Hemos definido $g_U = \sum_{W \in I} \theta_W f_{WU}$. Luego

$$(dg)_{UV} = g_V - g_U = \sum_{W \in I} \theta_W f_{WV} - \sum_{W \in I} \theta_W f_{WU} = \sum_{W \in I} \theta_W (f_{WV} - f_{WU}) = \left(\sum_{W \in I} \theta_W \right) f_{UV} = f_{UV}.$$

Ahora escribimos el caso general:

$$\begin{aligned} (d^q g)_{i_0 i_1 \dots i_1} &= \sum_{j=0}^q (-1)^j g_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_q} |_{i_0 \dots i_q} = \sum_{j=0}^q (-1)^j \sum_{k \in I} \theta_k f_{k i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_q} |_{i_0 \dots i_q} = \sum_{k \in I} \theta_k \sum_{j=0}^q (-1)^j f_{k i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_q} |_{i_0 \dots i_q} \\ &= \sum_{k \in I} \theta_k (f_{k i_0 \dots i_q} - (df)_{k i_0 \dots i_q}) = \sum_{k \in I} \theta_k f_{i_0 \dots i_q} = f_{i_0 \dots i_q}. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.3.5. $\check{H}^q(X, C_X(-, \mathbb{K})) = 0$ si $q \geq 1$.

Este ejemplo no solo ilustra las propiedades del haz de funciones continuas reales/complejas, sino que nos avisa de que si queremos encontrar situaciones interesantes hay que considerar haces de funciones más restrictivas, que no admitan particiones de la unidad, como las funciones con valores en otros espacios, las analíticas o las localmente constantes. En este trabajo nos centraremos en estas últimas.

Observación 3.3.6. Un haz de este tipo, que admite particiones de la unidad subordinadas a cualquier recubrimiento, se llama *fino*, y por la misma prueba se tiene que todos sus grupos de cohomología positivos son nulos. Otro ejemplo de haz fino es el haz de funciones diferenciables sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Corolario 3.3.7. $\check{H}^q(X, C_X^\infty(-, \mathbb{K})) = 0$ si $q \geq 1$.

Lema 3.3.8. Sea $\{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto de X . Entonces existe un refinamiento $\{V_i : i \in I\}$ tal que $\bar{V}_i \subset U_i$ para cada $i \in I$.

Demostración. Tomamos una partición de la unidad $\{\theta_i : i \in I\}$ subordinada a $\{U_i : i \in I\}$. Tomamos $V_i := \theta^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Es un recubrimiento abierto porque para cada $x \in X$, $\sum_i \theta_i(x) = 1$, por lo que existe algún $j \in I$ para el que $\theta_j(x) \neq 0$, por lo que $x \in V_j$. Además, $\bar{V}_i = \text{supp } \theta_i \subset U_i$. □

Teorema 3.3.9. Sea X es un espacio Hausdorff paracompacto. Si $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de haces, existen morfismos ∂ (para cada $q \in \mathbb{Z}$) tales que

$$\dots \rightarrow \check{H}^{q-1}(X, F'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^q(X, F') \rightarrow \check{H}^q(X, F) \rightarrow \check{H}^q(X, F'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^{q+1}(X, F') \rightarrow \dots$$

Demostración. La prueba constará de dos partes: en la primera parte construiremos una sucesión exacta larga (3.5) y en la segunda, usando la paracompacidad de X , probaremos que la sucesión construida coincide con la que buscamos.

Sea $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta de haces. Por 2.8.2 sabemos que, para cada $U \in \mathbf{Op}(X)$,

$$0 \rightarrow F'(U) \rightarrow F(U) \rightarrow F''(U)$$

es exacta. Si tomamos un recubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i : i \in I\}$ de X , tenemos que

$$0 \rightarrow F'(U_{i_0 i_1 \dots i_q}) \rightarrow F(U_{i_0 i_1 \dots i_q}) \rightarrow F''(U_{i_0 i_1 \dots i_q})$$

es exacta, donde $U_{i_0 i_1 \dots i_q}$ es la intersección de una cantidad finita de elementos de $\mathfrak{U}$. Sabiendo que para un haz E , el grupo de q -cocadenas se define por $C^q(\mathfrak{U}, E) = \prod_{i_0 < i_1 < \dots < i_q} E(U_{i_0 i_1 \dots i_q})$, y tenemos exactitud en cada coordenada, obtenemos que

$$0 \rightarrow C^q(\mathfrak{U}, F') \rightarrow C^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow C^q(\mathfrak{U}, F'')$$

es exacta. Sea $\bar{C}^q(\mathfrak{U}, F'') = \text{Im}(C^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow C^q(\mathfrak{U}, F''))$. De esta forma, tenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow C^q(\mathfrak{U}, F') \rightarrow C^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \bar{C}^q(\mathfrak{U}, F'') \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Denotamos por $\bar{H}^q(\mathfrak{U}, F'')$ la cohomología del complejo $\bar{C}^\bullet(\mathfrak{U}, F'')$. Aplicando A.1.14 a 3.3 tenemos la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow \bar{H}^{q-1}(\mathfrak{U}, F'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^q(\mathfrak{U}, F') \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \bar{H}^q(\mathfrak{U}, F'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^{q+1}(\mathfrak{U}, F') \rightarrow \dots \quad (3.4)$$

El próximo objetivo es *tomar el límite directo* de esta sucesión exacta larga.

Consideremos un refinamiento $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ y sea $\mu^\bullet : C^\bullet(\mathfrak{U}, F) \rightarrow C^\bullet(\mathfrak{V}, F)$ uno de los homomorfismos considerados en 3.1.14. (Llamamos μ también al correspondiente a F''). Veamos que

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathfrak{U}, F) & \longrightarrow & C^q(\mathfrak{U}, F'') \\ \mu^q \downarrow & & \downarrow \mu^q \\ C^q(\mathfrak{V}, F) & \longrightarrow & C^q(\mathfrak{V}, F'') \end{array}$$

conmuta. Como $F \rightarrow F''$ es morfismo de haces, cada $F(U) \rightarrow F''(U)$ conmuta con las restricciones. Tomando productos cartesianos, $C^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow C^q(\mathfrak{U}, F'')$ conmuta con las restricciones coordenada a coordenada, por lo que conmuta con μ^q .

Así tenemos que $\mu^q(\bar{C}^q(\mathfrak{U}, F'')) \subset \bar{C}^q(\mathfrak{V}, F'')$, por lo que $\mu^q : \bar{C}^q(\mathfrak{U}, F'') \rightarrow \bar{C}^q(\mathfrak{V}, F'')$ está bien definido. Análogamente, el siguiente diagrama conmuta para todo q

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^q(\mathfrak{U}, F') & \longrightarrow & C^q(\mathfrak{U}, F) & \longrightarrow & \bar{C}^q(\mathfrak{U}, F') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mu^q & & \downarrow \mu^q & & \downarrow \mu^q \\ 0 & \longrightarrow & C^q(\mathfrak{V}, F') & \longrightarrow & C^q(\mathfrak{V}, F) & \longrightarrow & \bar{C}^q(\mathfrak{V}, F') \longrightarrow 0. \end{array}$$

Por A.1.15, los morfismos inducidos en las cohomologías conmutan en las sucesiones exactas largas. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & \bar{H}^{q-1}(\mathfrak{U}, F'') & \xrightarrow{\partial} & \check{H}^q(\mathfrak{U}, F') & \longrightarrow & \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) & \longrightarrow & \bar{H}^q(\mathfrak{U}, F'') & \xrightarrow{\partial} & \check{H}^{q+1}(\mathfrak{V}, F') & \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \mu_{*, q-1} & & \downarrow \mu_{*, q} & & \downarrow \mu_{*, q} & & \downarrow \mu_{*, q} & & \downarrow \mu_{*, q+1} & \\ \dots & \longrightarrow & \bar{H}^{q-1}(\mathfrak{V}, F'') & \xrightarrow{\partial} & \check{H}^q(\mathfrak{V}, F') & \longrightarrow & \check{H}^q(\mathfrak{V}, F) & \longrightarrow & \bar{H}^q(\mathfrak{V}, F'') & \xrightarrow{\partial} & \check{H}^{q+1}(\mathfrak{V}, F') & \longrightarrow \dots \end{array}$$

La exactitud de este diagrama conmutativo, junto con la propiedad de exactitud del límite directo (A.3.8) nos da que la siguiente sucesión es exacta

$$\dots \rightarrow \bar{H}^{q-1}(X, F'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^q(X, F') \rightarrow \check{H}^q(X, F) \rightarrow \bar{H}^q(X, F'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^{q+1}(X, F') \rightarrow \dots \quad (3.5)$$

Es suficiente entonces que veamos que el morfismo inclusión $\bar{C}^\bullet(\mathfrak{U}, F'') \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, F'')$ induce un isomorfismo en el límite directo $\bar{H}^q(X, F'') \rightarrow \check{H}^q(X, F'')$. Para ello consideremos el grupo cociente

$$\tilde{C}^q(\mathfrak{U}) := C^q(\mathfrak{U}, F'') / \bar{C}^q(\mathfrak{U}, F'').$$

Y gracias a (A.1.4) tenemos que

$$0 \rightarrow \bar{C}^\bullet(\mathfrak{U}, F'') \hookrightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, F'') \rightarrow \tilde{C}^\bullet(\mathfrak{U}) \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de complejos de cadenas, que induce una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow \tilde{H}^{q-1}(\mathfrak{U}) \xrightarrow{\partial} \bar{H}^q(\mathfrak{U}, F'') \rightarrow \check{H}^q(\mathfrak{U}, F'') \rightarrow \tilde{H}^q(\mathfrak{U}) \xrightarrow{\partial} \bar{H}^{q+1}(\mathfrak{U}, F'') \rightarrow \dots$$

Donde $\tilde{H}^q(\mathfrak{U})$ denota la cohomología del complejo $\tilde{C}^\bullet(\mathfrak{U})$. Razonando como antes (el morfismo $\tilde{\mu}^q : \tilde{C}^q(\mathfrak{V}) \rightarrow \tilde{C}^q(\mathfrak{U})$ que manda $f + \bar{C}^q(\mathfrak{V}, F'')$ a $\mu(f) + \bar{C}^q(\mathfrak{U}, F'')$ está bien definido porque $\mu^q(\bar{C}^q(\mathfrak{U}, F'')) \subset \bar{C}^q(\mathfrak{V}, F'')$) podemos obtener la sucesión exacta larga análoga independiente del recubrimiento

$$\dots \rightarrow \tilde{H}^{q-1}(X) \xrightarrow{\partial} \bar{H}^q(X, F'') \rightarrow \check{H}^q(X, F'') \rightarrow \tilde{H}^q(X) \xrightarrow{\partial} \bar{H}^{q+1}(X, F'') \rightarrow \dots \quad (3.6)$$

Ahora es suficiente probar que $\tilde{H}^q(X) = 0$ para cualquier q y así obtener que $\bar{H}^q(X, F'') \rightarrow \check{H}^q(X, F'')$ es un isomorfismo. Lo probamos en el siguiente lema (3.3.10). $\square$

Lema 3.3.10. Con la notación anterior, $\tilde{H}^q(X) = 0$.

Demostración. Sea $\mathfrak{U}$ localmente finito. Si probamos que para cada $f \in C^q(\mathfrak{U}, F'')$ existe un refinamiento $\mu : \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\mu^q(f) \in \bar{C}^q(\mathfrak{V}, F'')$, tendremos que todo elemento de $C^q(\mathfrak{U}, F'')$ acabará siendo eventualmente 0 en el grupo $\tilde{C}^q(\mathfrak{V})$ y por tanto $\tilde{H}^q(X) = 0$ será nulo. Sea $f \in C^q(\mathfrak{U}, F'')$ fijo. Usamos el lema 3.3.8 para construir un refinamiento $\mathfrak{D} = \{O_i : i \in I\}$ tal que $\overline{O_i} \subset U_i$. Fijemos ahora un $x \in X$, y escojamos un entorno V_x de la siguiente manera: Como $\mathfrak{U}$ es localmente finito x tiene un entorno que corta a una cantidad finita de $U_i \in \mathfrak{U}$. Pongamos $U_1, \dots, U_n$ y quedémonos solo con los que incluyen a x . Como $\mathfrak{D}$ es recubrimiento, existe un O_{i_0} con $x \in O_{i_0}$. Tomamos un entorno de x , $V_x \subset (\cap_{i=1}^n U_i) \cap O_{i_0}$. Este entorno verifica:

1. $V_x \subset O_i$ para algún i . (Por construcción, para $i = i_0$)
2. Si $V_x \cap O_i \neq \emptyset$ entonces $V_x \subset U_i$. (Si $V_x \cap O_i \neq \emptyset$ entonces, usando que O_i está contenido en U_i , tenemos que $i \in \{1, \dots, n\}$, luego $V_x \subset U_i$).
3. V_x está en la intersección de todos los U_i que contienen a x . (por construcción)
4. Sean $\alpha = (i_0, i_1, \dots, i_q)$ un multiíndice en $\mathfrak{U}$ y $x \in U_\alpha$ (en particular $V_x \subset U_\alpha$). Si $f_\alpha \in F''(U_\alpha)$ entonces existe $g \in F(V_x)$ tal que $f_\alpha|_{V_x} = T_{V_x}(g)$ (donde $T : F \rightarrow F''$ es el morfismo de haces de la hipótesis). En efecto, por hipótesis, $T_x : F_x \rightarrow F''_x$ es sobreyectiva. Luego existe $g_x \in F_x$ con $T_x(g_x) = (f_\alpha)_x$. Es decir, existe un entorno U^x de x y un $g \in F(U^x)$ representante de g_x con $T_{U^x}(g) = (f_\alpha)|_{U^x}$. Si es necesario, reducimos V_x para que caiga dentro de U^x , de esta forma, llamando $g := g|_{V_x} \in F(V_x)$ se verifica $T_{V_x}(g) = f_\alpha|_{V_x}$. Este nuevo V_x sigue verificando las 3 propiedades anteriores, pero está escogido especialmente para U_α . Sin embargo, esto no es problema, porque solo hay una cantidad finita de multiíndices α tales que $x \in U_\alpha$. Podemos refinar V_x para cada intersección U_α a la que pertenezca x , y como solo hay una cantidad finita de estos, el V_x resultante va a ser un entorno de x que verifique las 4 propiedades.

Sea $\mathfrak{V} = \{V_x : x \in X\}$, y para cada x sean $O_x \in \mathfrak{D}$ y $U_x \in \mathfrak{U}$ tales que $V_x \subset O_x \subset U_x$ (existe por (1)). Este refinamiento $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ nos da una aplicación $\mu : J \rightarrow I$ (donde J indexa $\mathfrak{V}$) que asingna U_x a cada V_x .

Supongamos que $V_{i_0 i_1 \dots i_q} \neq \emptyset$ y tomamos $x \in V_{i_0 i_1 \dots i_q}$. Para cada $0 \leq j \leq q$, como $x \in V_{i_0} \cap O_{x_j}$ tenemos por (2) que $V_{x_0} \subset U_{i_j}$. De modo que $V_{i_0} \subset U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q} = U_{i_0 i_1 \dots i_q}$, y este último coincide con $U_{\mu i_0 \mu i_1 \dots \mu i_q}$. Entonces,

$$\mu^q(f)_{i_0 i_1 \dots i_q} = f_{\mu i_0 \mu i_1 \dots \mu i_q}|_{V_{i_0 i_1 \dots i_q}} = (f_{i_0 i_1 \dots i_q}|_{V_{p_0}})|_{V_{i_0 i_1 \dots i_q}}.$$

Y, por (4), existe $g \in F(V_{p_0})$ tal que $T_{V_{p_0}}(g) = f_{i_0 i_1 \dots i_q}|_{V_{p_0}}$. Luego

$$\mu^q(f)_{i_0 i_1 \dots i_q} = T_{V_{p_0}}(g)|_{V_{i_0 i_1 \dots i_q}}.$$

Por lo que $\mu^q(f) \in \bar{C}^q(\mathfrak{V}, F'')$. Como X es paracompacto, todo recubrimiento admite un refinamiento localmente finito. Es por esto que, al tomar el límite directo obtendremos que $\tilde{H}^q(X) = 0$, lo que concluye la prueba del lema y, por tanto, del teorema 3.3.9. $\square$

Una importante consecuencia de la sucesión exacta larga es el teorema de Leray, que permitirá calcular la cohomología a partir de ciertos recubrimientos, evitando la necesidad de tomar el límite directo para obtener la cohomología.

3.4 Teorema de Leray

Usando el formalismo de A.3.3 tenemos un morfismo canónico

$$r : \check{H}^k(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^k(X, F),$$

que denominamos *aplicación de refinamiento*. En esta sección hallamos una condición necesaria para que esta aplicación sea un isomorfismo.

Definición 3.4.1. Sea F un haz. Un recubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i : i \in I\}$ de X se llamará *q-acíclico* ($q \geq 1$) para F si para todas las tuplas finitas $(i_0, i_1, \dots, i_k)$ se tiene que $\check{H}^p(U_{i_0 i_1 \dots i_k}, F) = 0$ para $1 \leq p \leq q$. Diremos que es *acíclico* si es *q-acíclico* para todo q . Diremos que cualquier recubrimiento es 0-acíclico por definición.

El objetivo de esta sección es probar el siguiente teorema

Teorema 3.4.2. (Leray) Sea F un haz sobre X , sea $\mathfrak{U}$ un recubrimiento de q -acíclico para F . Entonces existe un isomorfismo

$$r : \check{H}^k(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^k(X, F),$$

para $0 \leq k \leq q$. En particular, si $\mathfrak{U}$ es acíclico, r es un isomorfismo para todo k .

Observación 3.4.3. Nótese que si queremos calcular cierto $\check{H}^q(X, F)$ con un recubrimiento $\mathfrak{U}$ no es necesario comprobar la aciclicidad para todo $k \geq 0$.

Antes tenemos introducir algunos ingredientes. Si F es un haz vamos a *sumergirlo* en otro haz *más grande* que tenga grupos de cohomología nulos.

Definición 3.4.4. Si F es un haz sobre X , definimos su *su haz de secciones discontinuas* como el prehaz que a cada $U \in \mathbf{Op}(X)$ le asigna

$$\mathfrak{G}_F(U) = \{f : U \rightarrow E \text{ no necesariamente continua} : \pi \circ f = \text{Id}_U\}.$$

Que es, de hecho, un haz: por ser prehaz de funciones verifica la propiedad de localidad, y pegar secciones resulta una sección.

Observación 3.4.5. Recordemos que los elementos de $F(U)$ se correspondían con aplicaciones continuas $f : U \rightarrow \beta(F)$ tales que $\pi \circ f = \text{Id}_U$. De esta forma, el haz de secciones discontinuas es una relajación de la definición, por lo que todo elemento $f \in F(U)$ puede verse como un elemento de $\mathfrak{G}_F$ y así F es un subhaz de $\mathfrak{G}_F$. Por 2.7.3, la sucesión

$$0 \rightarrow F \rightarrow \mathfrak{G}_F \rightarrow \mathfrak{G}_F/F \rightarrow 0$$

es exacta.

Lema 3.4.6. Sea F un haz sobre X , y $\mathfrak{G}_F$ su haz de secciones discontinuas. Entonces, para cada recubrimiento $\mathfrak{U}$ un recubrimiento de X se tiene $\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}_F) = 0$ para cualquier $q > 0$.

Demostración. Veamos que el haz es *flabby*, que quiere decir que, para cada $V \subset U \subset X$ abiertos, la aplicación de restricción $r_{V,U} : \mathfrak{G}_F(U) \rightarrow \mathfrak{G}_F(V)$ es sobreyectiva. Esto es inmediato, porque si tenemos una sección $f : V \rightarrow E$, definimos $\hat{f} : U \rightarrow E$ extendiendo por 0 en $U \setminus V$. Explícitamente, para cada $x \in U \setminus V$ definimos $\hat{f}(x) = 0_x$, y es claro que $r_{V,U}(\hat{f}) = f$. Ahora probamos que si un haz es *flabby* entonces sus grupos de cohomología (para $q > 0$) son nulos. Ilustramos la demostración con el caso $q = 1$. Sea $f = (f_{UV})_{U,V} \in Z^1$, entonces para cada $U, V, W \subset X$ abiertos, tenemos $f_{UV}|_{U \cap V \cap W} = f_{UW}|_{U \cap V \cap W} - f_{VW}|_{U \cap V \cap W}$. Por la sobreyectividad de $r_{U \cap V \cap W, V}$ existe $g_V \in F(V)$ tal que $g_V|_{U \cap V \cap W} = f_{VW}|_{U \cap V \cap W} \in \mathfrak{G}_F(U \cap V \cap W)$. Análogamente, existe $g_U \in F(U)$ tal que $g_U|_{U \cap V \cap W} = f_{UW}|_{U \cap V \cap W} \in \mathfrak{G}_F(U \cap V \cap W)$. Así,

$$f_{UV}|_{U \cap V \cap W} = g_U|_{U \cap V \cap W} - g_V|_{U \cap V \cap W}.$$

Como W es arbitrario, podemos tomar una familia de abiertos W que recubran $U \cap V$ y los dos cociclos van a coincidir. Así que, por la propiedad de pegamiento podemos concluir que

$$f_{UV}|_{U \cap V} = g_U|_{U \cap V} - g_V|_{U \cap V}.$$

Definiendo $g = (g_U)_U$ tenemos que $f_{UV} = (dg)_{UV}$. El caso $q > 1$ es completamente análogo pero la notación lo hace muy enrevesado y no aporta nada nuevo a la prueba. $\square$

Observación 3.4.7. Supongamos que $\mathfrak{U}$ es 1-acíclico para F y que la sucesión

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$$

es exacta. Si $(i_0, i_1, \dots, i_k) \in I^{k+1}$ se verifica, por la sucesión exacta larga (3.3.1), que

$$0 \rightarrow F(U_{i_0 i_1 \dots i_k}) \rightarrow G(U_{i_0 i_1 \dots i_k}) \rightarrow H(U_{i_0 i_1 \dots i_k}) \rightarrow 0$$

es exacta. Los grupos de k -cocadenas son productos cartesianos de los grupos de secciones ($C^k(\mathfrak{U}, E) = \prod_{i_0 < i_1 < \dots < i_k} E(U_{i_0 i_1 \dots i_k})$, etc). Las sucesiones exactas en cada coordenada del producto cartesiano inducen una sucesión exacta en dicho producto

$$0 \rightarrow C^k(\mathfrak{U}, F) \rightarrow C^k(\mathfrak{U}, G) \rightarrow C^k(\mathfrak{U}, H) \rightarrow 0$$

para cada k entero. Tenemos entonces una sucesión exacta de complejos de cadenas

$$0 \rightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, F) \rightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, G) \rightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, H) \rightarrow 0.$$

Por lo que podemos aplicar A.1.14 y tenemos que existe la siguiente sucesión exacta larga infinita.

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, G) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, H) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, G) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, H) \rightarrow \dots \quad (3.7)$$

Además, si r es la aplicación refinamiento, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathfrak{U}, F) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathfrak{U}, G) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathfrak{U}, H) \longrightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, F) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow r & & \downarrow r & & \downarrow r \\ 0 & \longrightarrow & \check{H}^0(X, F) & \longrightarrow & \check{H}^0(X, G) & \longrightarrow & \check{H}^0(X, H) \longrightarrow \check{H}^1(X, F) \longrightarrow \dots, \end{array} \quad (3.8)$$

ya que en la demostración del teorema 3.3.9, definimos las aplicaciones horizontales inferiores como los límites directos de las horizontales superiores. Por la observación, A.3.9 cada cuadrado conmuta, por lo que conmuta todo el diagrama.

Demostración del teorema de 3.4.2: Procedemos por inducción sobre q . Comenzamos con el caso $q = 0$:

Por (3.1.9) sabemos que $\check{H}^0(\mathfrak{U}, F) \cong F(X)$ y que $\check{H}^0(\mathfrak{V}, F) \cong F(X)$ para cualquier $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ refinamiento, vía un isomorfismo ϕ . Así que para ver que $R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}$ es isomorfismo solo hay que ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^0(\mathfrak{U}, F) & \xrightarrow{R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}} & \check{H}^0(\mathfrak{V}, F) \\ \phi \cong \downarrow & & \downarrow \phi \cong \\ F(X) & \xrightarrow{\text{id}} & F(X). \end{array}$$

Sea $f = (f_U)_U \in \check{H}^0(\mathfrak{U}, F) = C^0(\mathfrak{U}, F)$. Si revisamos la prueba de 3.1.9, vemos que ϕ está definido de forma que para cada U se tiene $\phi(f)|_U = f_U$. Sea $V \in \mathfrak{V}$, existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $V \subset U$ y $R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}(f)_V = f_U|_V$. Entonces $(\phi \circ R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}(f))|_V = R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}(f)_V = f_U|_V = \phi(f)|_V$. Como $V \in \mathfrak{V}$ es arbitrario, la propiedad de pegamiento nos da que $\phi \circ R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}(f) = \phi(f)$.

Como $R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}$ es isomorfismo, la siguiente sucesión es exacta

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}} \check{H}^0(\mathfrak{V}, F) \rightarrow 0.$$

Consideremos, por un lado, el sistema de grupos constante $\{\check{H}^0(\mathfrak{U}, F)\}$ con la aplicación identidad y, por otro lado, el sistema de grupos $\{\check{H}^0(\mathfrak{V}', F) : \mathfrak{V}' \text{ refinamiento de } \mathfrak{V}\}$ con las aplicaciones de refinamiento canónicas. Como $R_{\mathfrak{V}'\mathfrak{V}} \circ R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}} = R_{\mathfrak{V}'\mathfrak{U}}$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathfrak{U}, F) & \xrightarrow{R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}} & \check{H}^0(\mathfrak{V}, F) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow R_{\mathfrak{V}'\mathfrak{V}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathfrak{U}, F) & \xrightarrow{R_{\mathfrak{V}'\mathfrak{U}}} & \check{H}^0(\mathfrak{V}', F) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Y tenemos una sucesión exacta de morfismos de sistemas dirigidos, por lo que al tomar el límite directo (por A.3.7), queda que

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{\lim_{\mathfrak{V}} R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}} \check{H}^0(X, F) \rightarrow 0,$$

donde $\lim_{\mathfrak{V}} R_{\mathfrak{V}\mathfrak{U}}$ es la aplicación inducida en los límites directos que, por construcción, coincide con r . Hemos probado así que r es isomorfismo en $q = 0$. Obsérvese que para este caso no hemos necesitado que $\mathfrak{U}$ sea 1-acíclico para F , así que tenemos el resultado para cualquier haz.

Consideremos ahora el haz $\mathfrak{G}_F$ de secciones discontinuas (construido en 3.4.6). Llamando $F = F$, $G = \mathfrak{G}_F$ y $H = \mathfrak{G}_F/F$ tenemos que la sucesión $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ es exacta. Aplicando 3.7 tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, G) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, H) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, G) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, H) \rightarrow \dots$$

Vamos a usar que $\mathfrak{U}$ es 1-acíclico para F para probar el caso $q = 1$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathfrak{U}, F) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathfrak{U}, G) & \xrightarrow{i_1} & \check{H}^0(\mathfrak{U}, H) & \xrightarrow{i'_1} & \check{H}^1(\mathfrak{U}, F) & \longrightarrow & \check{H}^1(\mathfrak{U}, G) \xrightarrow{0} & \longrightarrow & \check{H}^1(\mathfrak{U}, H) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow r \cong & & \downarrow r \cong & & \downarrow r \cong & & \downarrow r & & \downarrow r & & \downarrow r & & \\ 0 & \longrightarrow & \check{H}^0(X, F) & \longrightarrow & \check{H}^0(X, G) & \xrightarrow{j_1} & \check{H}^0(X, H) & \xrightarrow{j'_1} & \check{H}^1(X, F) & \longrightarrow & \check{H}^1(X, G) \xrightarrow{0} & \longrightarrow & \check{H}^1(X, H) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Igual que como lo probábamos para F , tenemos que $r : \check{H}^0(\mathfrak{U}, G) \rightarrow \check{H}^0(X, G)$ y $r : \check{H}^0(\mathfrak{U}, H) \rightarrow \check{H}^0(X, H)$ son isomorfismos. Por ser G el haz de secciones discontinuas (Lema 3.4.6) tenemos que $\check{H}^1(\mathfrak{U}, G) = 0 = \check{H}^1(X, G)$. Luego las aplicaciones i'_1 y j'_1 son sobreyectivas. Por el primer teorema de isomorfía,

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, F) \cong \text{Im } i'_1 \cong \check{H}^0(\mathfrak{U}, H) / \ker i'_1 \quad \text{y} \quad \check{H}^1(X, F) \cong \text{Im } j'_1 \cong \check{H}^0(X, H) / \ker j'_1.$$

Pero $\ker i'_1 \cong \text{Im } i_1$ y $\ker j'_1 \cong \text{Im } j_1$. De la conmutatividad del cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^0(\mathfrak{U}, G) & \xrightarrow{i_1} & \check{H}^0(\mathfrak{U}, H) \\ \downarrow r \cong & & \downarrow r \cong \\ \check{H}^0(X, G) & \xrightarrow{j_1} & \check{H}^0(X, H) \end{array}$$

se tiene que $\text{Im } i_1 \cong \text{Im } j_1$ y por tanto que $\check{H}^1(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{r} \check{H}^1(X, F)$ es isomorfismo. Observemos que hasta ahora sólo hemos necesitado que el recubrimiento sea 1-acíclico. Si probamos que $\mathfrak{U}$ es 1-acíclico para H , podremos aplicarle a H todo lo visto hasta ahora, y tendremos que $r : \check{H}^1(\mathfrak{U}, H) \rightarrow \check{H}^1(X, H)$ es un isomorfismo, de donde obtendremos

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & \check{H}^1(\mathfrak{U}, G) \xrightarrow{0} & \longrightarrow & \check{H}^1(\mathfrak{U}, H) & \xrightarrow{i'_2} & \check{H}^2(\mathfrak{U}, F) & \longrightarrow & \check{H}^2(\mathfrak{U}, G) \xrightarrow{0} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow r & & \downarrow r \cong & & \downarrow r & & \downarrow r & & \\ \dots & \longrightarrow & \check{H}^1(X, G) \xrightarrow{0} & \longrightarrow & \check{H}^1(X, H) & \xrightarrow{j'_2} & \check{H}^2(X, F) & \longrightarrow & \check{H}^2(X, G) \xrightarrow{0} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Y como i'_2 y j'_2 son isomorfismos y el diagrama conmuta, $r : \check{H}^2(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^2(X, F)$ será isomorfismo. Probemos entonces que $\mathfrak{U}$ es 1-acíclico para H . Para esto usaremos que F es 2-acíclico. Sea $U_\alpha = U_{i_0 i_1 \dots i_q}$ la intersección de una cantidad finita de elementos de $\mathfrak{U}$. Tomando la sucesión exacta larga (teorema 3.3.9 aplicado a $X = U_\alpha$)

$$\dots \rightarrow \check{H}^1(U_\alpha, F) \xrightarrow{0} \check{H}^1(U_\alpha, G) \rightarrow \check{H}^1(U_\alpha, H) \rightarrow \check{H}^2(U_\alpha, F) \xrightarrow{0} \dots$$

tenemos que $\check{H}^1(U_\alpha, G) \rightarrow \check{H}^1(U_\alpha, H)$ es isomorfismo. Y como $\check{H}^1(U_\alpha, G) = 0$ (es el haz de secciones discontinuas), concluimos que $\check{H}^1(U_\alpha, H) = 0$. Así, $\mathfrak{U}$ es 1-acíclico para H , lo que concluye la prueba hasta el caso $q = 2$.

Supongamos probado el teorema para cierto $q-1 \geq 2$. Esto es: para $0 \leq k \leq q-1$, $r : \check{H}^k(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^k(X, F)$ es isomorfismo. $\mathfrak{U}$ es q -acíclico para F por hipótesis. Probemos que $\mathfrak{U}$ es $(q-1)$ -acíclico para H . De nuevo, tomemos un $U_\alpha = U_{i_0 i_1 \dots i_k}$ arbitrario. Usando la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow \check{H}^{q-1}(U_\alpha, F) \xrightarrow{0} \check{H}^{q-1}(U_\alpha, G) \rightarrow \check{H}^{q-1}(U_\alpha, H) \rightarrow \check{H}^q(U_\alpha, F) \xrightarrow{0} \dots$$

y el hecho de que $\check{H}^{q-1}(U_\alpha, G) = 0$ deducimos que $\check{H}^{q-1}(U_\alpha, H) = 0$, por lo que $\mathfrak{U}$ es $(q-1)$ -acíclico para H . Aplicando la hipótesis de inducción a H , tenemos que $r : \check{H}^{q-1}(\mathfrak{U}, H) \rightarrow \check{H}^{q-1}(X, H)$ es isomorfismo. Por el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \check{H}^{q-1}(\mathfrak{U}, G) & \xrightarrow{0} & \check{H}^{q-1}(\mathfrak{U}, H) & \xrightarrow{i'_q} & \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) \longrightarrow \check{H}^q(\mathfrak{U}, G) \xrightarrow{0} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow r & & \downarrow r \cong & & \downarrow r \\ \dots & \longrightarrow & \check{H}^{q-1}(X, G) & \xrightarrow{0} & \check{H}^{q-1}(X, H) & \xrightarrow{j'_q} & \check{H}^2(X, F) \longrightarrow \check{H}^q(X, G) \xrightarrow{0} \longrightarrow \dots \end{array}$$

tenemos que i'_q, j'_q son isomorfismos. Luego $r : \check{H}^q(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \check{H}^q(X, F)$ es isomorfismo. $\square$

3.5 Relación con otras teorías de cohomología

Una *teoría de cohomología de haces* en X es una forma de asignar a cada haz F unos grupos $H^q(X, F)$, verificando una serie de propiedades de funtorialidad y la existencia de *sucesión exacta larga*. En [13] (definición 5.18) se da una definición precisa de *teoría axiomática de cohomología de haces*. El hecho de que (en espacios Hausdorff paracompactos) la cohomología de Čech tenga sucesión exacta larga, junto con otras propiedades de verificación bastante más inmediata, nos proporcionan que la cohomología de Čech es una teoría de cohomología de haces (se comprueba exhaustivamente en la sección 5.33 de [13]). En [13] también se define *isomorfismo de teorías de cohomología de haces* y se prueba que, dadas dos teorías, existe un isomorfismo entre estas y es único (teorema 5.23). Por lo que la cohomología de Čech coincidirá con el resto de teorías cuando X sea Hausdorff paracompacto.

En [6] y [9] se construye (usando el concepto de funtor derivado) un modelo de teoría de cohomología de haces que verifica la axiomática de [13] en cualquier espacio topológico.

Definición 3.5.1. Definimos el q -ésimo funtor de cohomología de haces como el q -ésimo funtor derivado derecho del funtor *tomar secciones*, $\Gamma(X, -)$. Y lo denotamos por $H^q(X, -)$. De este modo, denotamos el q -ésimo grupo de cohomología de haces como $H^q(X, F)$.

Esta teoría recibe el nombre de *teoría de cohomología de haces*, y es el modelo de teoría de cohomología de haces por antonomasia, porque siempre existe y, cuando otros existen, son isomorfos a este.

En [9] (proposición 2.7.5) se prueba que, para haces constantes, los grupos de cohomología de haces son invariantes por homotopía. Es decir, que si X e Y son homotópicamente equivalentes y G es un haz cons-

tante entonces $H^q(X, G_X) = H^q(Y, G_Y)$. Combinando esto con que en espacios Hausdorff paracompactos $\check{H}^q(X, G_X) \cong H^q(X, G_X)$ tenemos

Corolario 3.5.2. Si X, Y son espacios Hausdorff, paracompactos y tienen el mismo tipo de homotopía, entonces $\check{H}^q(X, G_X) = \check{H}^q(Y, G_Y)$.

Corolario 3.5.3. Si X es un espacio Hausdorff paracompacto y contractible, $\check{H}^q(X, G) \cong 0$ (para $q > 0$).

En 4.2.15 probaremos que en complejos simpliciales la cohomología de Čech para el haz constante G coincide con la cohomología simplicial. En [12] (corolario 6.8.8) se prueba que la cohomología de Čech para haces constantes coincide con la *cohomología de Alexander* (ver también [12]) bajo la hipótesis de Hausdorff paracompacidad. Por otro lado, en [12] se prueba que, para haces constantes, la cohomología de Alexander es isomorfa a la *cohomología singular* (corolario 6.9.5) si el espacio es Hausdorff paracompacto y semilocalmente contractible (todo punto tiene un entorno contractible). Luego la cohomología de Čech coincide con la singular (para haces constantes) en espacios Hausdorff paracompactos y semilocalmente contractibles (como, por ejemplo, las variedades topológicas).

Cuando eliminamos las hipótesis de separación y paracompacidad, la cohomología de Čech no tiene sucesión exacta larga (infinita) en general, por lo que no conforma una teoría de cohomología de haces. Esta situación no es en absoluto patológica: en geometría algebraica se trabaja con espacios con la topología de Zariski, que no suele ser Hausdorff. Sin embargo, la cohomología de Čech dependiente del recubrimiento será de gran ayuda para describir la topología del espacio.

Teorema 3.5.4. (Leray, versión 2) Si $\mathfrak{U}$ es un recubrimiento de X (espacio arbitrario) acíclico en el sentido de que $H^q(U_\alpha, F) = 0$ para toda U_α intersección finita en $\mathfrak{U}$ y todo $q > 0$, entonces

$$H^q(X, F) = \check{H}^q(\mathfrak{U}, F).$$

Demostración. La demostración es completamente análoga a la de 3.4.2. En este caso se enfrenta la sucesión exacta larga de la cohomología de haces $H^q(X, -)$ contra la de la cohomología de Čech dependiente del recubrimiento $\check{H}^q(\mathfrak{U}, -)$. Naturalmente hay que comprobar los detalles pertinentes, pero la idea es la misma. $\square$

Es decir, aunque la cohomología de Čech no sea una teoría de cohomología de haces y no coincida con la cohomología de haces, los recubrimientos acíclicos siguen computando la cohomología de haces. Cuando el espacio sea Hausdorff paracompacto $\check{H}^q(X, F) = H^q(X, F)$ y el teorema 3.4.2 se deduce de 3.5.4. Este resultado (3.5.4) enfatiza el poder computacional de la cohomología de Čech dependiente del recubrimiento.

3.6 Cohomología no abeliana

Sea X un espacio topológico arbitrario (no necesariamente Hausdorff paracompacto). En esta sección consideraremos haces de grupos que no serán necesariamente abelianos. Es por esto que no usaremos la notación aditiva como hasta ahora, sino la multiplicativa. Para un desarrollo más detallado de esta cohomología y sus aplicaciones, ver [14].

Definición 3.6.1. Sea F un haz de grupos sobre X y $\mathfrak{U}$ un recubrimiento.

- Una 0-cocadena es un elemento de $C^0(\mathfrak{U}, F) = \prod_{U \in \mathfrak{U}} F(U)$.
- Una 1-cocadena es un elemento de $C^1(\mathfrak{U}, F) = \prod_{U, V \in \mathfrak{U}} F(U \cap V)$.

Podríamos proceder como en el caso abeliano (sección 3.1) y definir C^q para cualquier $q \geq 0$, posteriormente introducir un operador coborde d y con ese complejo de cadenas definir los $\check{H}^q$ como $\ker d^q / \text{Im} d^{q-1}$. Pero nos daríamos cuenta de que al ser $F(U)$ no abeliano en general, $\text{Im} d^{q-1}$ no tiene por qué ser un subgrupo normal de $\ker d^q$, por lo que el cociente no estaría bien definido. Hay que buscar una alternativa. Un 1-cociclo $(f_{UV})_{U, V}$ es una 1-cocadena que verifica $f_{VW} \cdot f_{UW}^{-1} \cdot f_{UV} = 1$ en las intersecciones $U \cap V \cap W$. Denotamos por $Z^1(\mathfrak{U}, F)$ el conjunto de 1-cociclos. Observemos que las 0-cocadenas actúan sobre las 1-cocadenas mediante la aplicación

$$\begin{aligned} C^0(\mathfrak{U}, F) \times C^1(\mathfrak{U}, F) &\rightarrow C^1(\mathfrak{U}, F) \\ ((f_U)_U, (g_{UV})_{U, V}) &\mapsto (f_U \cdot g_{UV} \cdot f_V^{-1})_{U, V}. \end{aligned}$$

Es un cálculo rutinario comprobar que la acción respeta la condición de cociclo. Por lo que tenemos una acción

$$C^0(\mathfrak{U}, F) \times Z^1(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{\xi} Z^1(\mathfrak{U}, F).$$

Definición 3.6.2. Definimos $\check{H}^0(\mathfrak{U}, F) := C^0(\mathfrak{U}, F)$ y $\check{H}^1(\mathfrak{U}, F)$ como el conjunto de órbitas de ξ .

Observación 3.6.3. Observemos que $\check{H}^1(\mathfrak{U}, F)$ no es un grupo. Si el haz fuera de grupos abelianos sí lo sería, porque la acción mandaría $(f, g) = ((f_U)_U, (g_{UV})_{U, V})$ a $(f_U + g_{UV} - f_V)_{U, V} = (f_U - f_V + g_{UV})_{U, V} = d(f) + g$, y así la órbita de g sería $B^1(\mathfrak{U}, F) + g$.

A pesar de no ser un grupo, $\check{H}^1(\mathfrak{U}, F)$ tiene un elemento distinguido: la clase del 1. Un conjunto de esta forma se llama *conjunto con unidad*. Diremos que una aplicación entre conjuntos con unidad es un *morfismo de conjuntos con unidad* si la imagen del 1 es el 1 y diremos que el núcleo de dicho morfismo es el conjunto de elementos que van al 1. Así, los conjuntos con unidad forman una categoría en la que tiene sentido hablar de secuencias exactas (una sucesión es exacta cuando la imagen de cada morfismo coincide con el núcleo del siguiente).

Igual que en la sección 3.1 podemos ver que $\check{H}^1(-, F)$ es un funtor covariante de la categoría $\text{Rec}(X)$ a la categoría de conjuntos con unidad. Por lo que tenemos aplicaciones definidas $R_{\mathfrak{U}} : \check{H}^1(\mathfrak{V}, F) \rightarrow \check{H}^1(\mathfrak{U}, F)$

para cada refinamiento $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ y tiene sentido considerar el límite directo

$$\check{H}^1(X, F) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^1(\mathfrak{U}, F),$$

que se llama *primer conjunto de cohomología*. La proposición 3.1.9 no usa que el haz F sea abeliano, así que para cualquier recubrimiento $\mathfrak{U}$ de X tenemos que $\check{H}^0(\mathfrak{U}, F) = F(X)$, y por tanto, podemos definir $\check{H}^0(X, F) = F(X)$. Al igual que en 3.2.5, puede probarse que un morfismo de haces $\varphi : F \rightarrow F'$ induce un morfismo de conjuntos con unidad

$$\varphi_* : \check{H}^1(X, F) \rightarrow \check{H}^1(X, F').$$

La proposición 2.8.2 tampoco usa que el haz sea de grupos abelianos, por lo que una sucesión exacta de haces $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H$ induce una sucesión exacta

$$0 \rightarrow F'(X) \rightarrow F(X) \rightarrow F''(X).$$

Sin embargo, seguimos sin poder extender la exactitud a la derecha. Tenemos el siguiente

Teorema 3.6.4. Sea $1 \rightarrow F' \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} F'' \rightarrow 1$ una sucesión exacta de haces. Entonces existe un morfismo ∂ tal que la sucesión

$$1 \rightarrow F'(X) \xrightarrow{i_X} F(X) \xrightarrow{\pi_X} F''(X) \xrightarrow{\partial} \check{H}^1(X, F') \rightarrow \check{H}^1(X, F) \rightarrow \check{H}^1(X, F'') \quad (3.9)$$

es exacta. Además, si los haces son de grupos abelianos, la sucesión 3.9 es una sucesión exacta de grupos abelianos en el sentido usual.

Demostración. Construyamos el morfismo ∂ . Sea $g'' \in F''(X)$. Para cada $x \in X$, $F_x \rightarrow F''_x$ es sobreyectiva. Luego existe un $U^x \in \mathbf{Op}_x(X)$ y $g_{U^x} \in F(U^x)$ con $\pi_{U^x}(g_{U^x}) = g''|_{U^x}$. Indexamos el recubrimiento por $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$. Dados $i, j \in I$, se tiene $\pi(g_i \cdot g_j^{-1}) = g''|_{U_i} \cdot (g''|_{U_j})^{-1} = 1_{U_{ij}}$. Luego $g_i g_j^{-1} \in \ker \pi_{U_{ij}} = \text{Im } i_{U_{ij}}$. Luego existe un único $g'_{ij} \in A'(U_{ij})$ tal que $i(g'_{ij}) = g_i \cdot g_j^{-1}$. Este $(g'_{ij})_{ij}$ es un 1-cociclo porque $i_{U_{ijk}}(g'_{kj} \cdot g'_{ji}) = g_k \cdot g_j^{-1} \cdot g_j \cdot g_i^{-1} = g_k \cdot g_i^{-1} = i_{U_{ijk}}(g'_{ki})$. Por la inyectividad de $i_{U_{ijk}}$ se tiene que $g'_{kj} \cdot g'_{ji} = g'_{ki}$. Definimos $\partial_{\mathfrak{U}} g'' := [(g'_{ij})_{ij}] \in \check{H}^1(\mathfrak{U}, F')$ y $\partial g'' := [\partial_{\mathfrak{U}} g''] \in \check{H}^1(X, F')$. Se puede probar que si escogemos otros g_i , queda un 1-cociclo que comparte clase cohomología. Luego ∂ está bien definida.

Veamos que $\text{Im } \pi_X \subset \ker \partial$. Sea $g'' = \pi_X(g) \in \text{Im } \pi_X$. Escogemos $g_i := g|_{U_i}$ porque así $g'_{ij} = g_i \cdot g_j^{-1} = g|_{U_j} \cdot (g|_{U_j})^{-1} = 1_{U_{ij}}$. Luego $\partial g'' = 1$ y tenemos que $g'' \in \ker \partial$.

Veamos ahora $\text{Im } \pi_X \supset \ker \partial$. Sea $g'' \in \ker \partial$. Entonces podemos encontrar un recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de X y $u_i \in F(U_i)$ y $h'_i \in F'(U_i)$ tales que $\pi(u_i) = g''|_{U_i}$ y $i(h'_i{}^{-1} h'_j) = u_i u_j^{-1}$ para cada $i, j \in I$. Luego $1 = i(h'_i) u_i u_j^{-1} i(h'_j)^{-1}$. Llamando $g_i := i(h'_i) u_i$ tenemos que $g_i = g_j$ en $F(U_{ij})$ y que $\pi(g_i) = \pi(i(h'_i) u_i) = \pi(i(h'_i)) \cdot \pi(u_i) = \pi(u_i) = g''|_{U_i}$. Por la propiedad de pegamiento, existe $g \in F(X)$ tal que $g|_{U_i} = g_i$. Luego $\pi(g)|_{U_i} = g''|_{U_i}$, de donde concluimos que $\pi(g) = g''$. El resto de la demostración es rutinario y no aporta ninguna construcción relevante al trabajo. $\square$

Capítulo 4

Ejemplos y aplicaciones

En este capítulo pondremos en práctica las herramientas previamente desarrolladas para obtener algunos resultados interesantes en topología. Comenzaremos con algunos ejemplos. Después desarrollaremos un algoritmo para calcular la cohomología de un espacio (para el haz $\mathbb{Z}$) dado un recubrimiento bueno y veremos que puede calcular la cohomología de cualquier complejo simplicial finito (sin necesidad de buscar un recubrimiento). El mismo formalismo para hacer esto último nos permitirá establecer un isomorfismo con la cohomología simplicial. Seguiremos con algunas aplicaciones a la topología, entre las cuales destaca la clasificación de fibrados vectoriales.

4.1 Cálculo de grupos de cohomología

Ejemplo 4.1.1. Calculemos los grupos de cohomología de S^1 para el haz constante G . Por 3.1.10 sabemos que para el recubrimiento $\mathfrak{U}$ elegido se verifica $\check{H}^1(\mathfrak{U}, G) = G$. El recubrimiento es 1-áciclico para G porque la intersección de sus dos únicos abiertos es una unión disjunta de intervalos. Por la proposición 3.2.4 su primer grupo de cohomología es la suma directa de los $\check{H}^1$ de los dos intervalos, y como estos son contráctiles tienen cohomología nula (corolario 3.5.3). Concluimos (por el Teorema 3.4.2) que $\check{H}^1(S^1, G) = G$.

Además, $\check{H}^q(U_1 \cap U_2, G) = 0$ para $q > 1$. Luego el recubrimiento es acíclico. Como $\check{H}^q(\mathfrak{U}, G) = 0$ si $q > 1$ por tener $\mathfrak{U}$ solo dos elementos, concluimos que

$$\check{H}^q(S^1, G) = \begin{cases} G & \text{si } q = 0, 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 4.1.2. Sea C^* el haz $U \mapsto C(U, GL_1(\mathbb{R})) = C^*(U)$ de funciones continuas reales nunca nulas sobre un espacio Hausdorff y paracompacto X . Sea C_+^* el de las funciones continuas reales positivas. Tomando la

sucesión exacta corta de grupos topológicos

$$0 \rightarrow \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

obtenemos la siguiente sucesión exacta corta de haces

$$0 \rightarrow C_+^* \rightarrow C^* \xrightarrow{\text{signo}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Y por el teorema de la sucesión exacta larga 3.3.9 tenemos

$$\dots \rightarrow \check{H}^1(X, C_+^*) \rightarrow \check{H}^1(X, C^*) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^2(X, C_+^*) \rightarrow \dots$$

La exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ induce un isomorfismo entre los haces C y C_+^* , luego para $q > 0$ se tiene $\check{H}^q(X, C_+^*) \cong \check{H}^q(X, C) = 0$. Y obtenemos que $\check{H}^1(X, C^*) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ es un isomorfismo.

Particularizando en el caso $X = S^1$, tenemos por 4.1.1 que $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Luego

$$\check{H}^1(X, C^*) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Análogamente, si $C^{\infty*}$ es el haz de funciones diferenciables nunca nulas con valores reales,

$$\check{H}^1(X, C^{\infty*}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Ejemplo 4.1.3. Calculamos la cohomología de las superficies compactas orientables:

Sea S una superficie compacta orientable. Sabemos que es triangulable. Tomemos una triangulación $\Delta = \{V, A, C\}$, donde los conjuntos de *vértices*, *aristas* y *caras* y son V, A, C , respectivamente. Dado un vértice definimos U_v como la unión de los interiores de las aristas y de las caras que tienen a v en su frontera (obsérvese que el interior de una arista es un intervalo y no es abierto, pero al unirlo con el interior de las caras adyacentes sí queda un abierto). Observemos que $U_u \cap U_v$ es no vacío si y sólo si la arista uv pertenece a la triangulación, y en tal caso es conexo. Por otro lado, $U_u \cap U_v \cap U_w$ es no vacío si y sólo si la cara uvw pertenece a la triangulación, y en tal caso es conexo también.

Además, si x es otro vértice distinto de u, v, w , $U_u \cap U_v \cap U_w \cap U_x = \emptyset$. Tomemos el recubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_v : v \in V\}$. De esta forma

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \prod_{v \in V} \mathbb{Z}(U_v) = \mathbb{Z}^{|V|}, \quad C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \prod_{v, w \in V} \mathbb{Z}(U_v \cap U_w) = \mathbb{Z}^{|A|}, \quad C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \prod_{v, w, u \in V} \mathbb{Z}(U_v \cap U_w \cap U_u) = \mathbb{Z}^{|C|},$$

y $C^q(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0$ para $q \geq 3$. Por comodidad veremos las cocadenas como sumas formales de caras, vértices o aristas según corresponda: Es decir:

$$\mathbb{Z}^{|V|} = \left\{ \sum_{v \in V} k_v v : k_v \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \mathbb{Z}^{|A|} = \left\{ \sum_{a \in A} k_a a : k_a \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}^{|C|} = \left\{ \sum_{c \in C} k_c c : k_c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Con esta notación,

$$\begin{aligned} d^0 : \quad \mathbb{Z}^{|V|} &\rightarrow \mathbb{Z}^{|A|} \\ \sum_{v \in V} k_v v &\mapsto \sum_{vw \in A} (k_v - k_w) vw. \end{aligned}$$

Observemos que $\ker d^0 = \{\sum_{v \in V} k_v v : k_v = k_w \text{ para todos } v, w\} \cong \mathbb{Z}$. Luego, por el primer teorema de isomorfía, $\text{Im} d^0 \cong \mathbb{Z}^{|V|} / \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{|V|-1}$. De aquí concluimos también que $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (aunque lo sabíamos por 3.2.2).

$$\begin{aligned} d^1 : \quad \mathbb{Z}^{|A|} &\rightarrow \mathbb{Z}^{|C|} \\ \sum_{uv \in V} k_{uv} uv &\mapsto \sum_{vw \in C} (k_{uv} + k_{vw} - k_{uw}) uvw. \end{aligned}$$

Cada arista $uv \in V$ tiene solo dos caras adyacentes. Pongamos que son uvw y uvw' . Entonces

$$d^1(uv) = (k_{uv} + k_{vw} - k_{uw}) uvw + (k_{uv} + k_{vw'} - k_{uw'}) uvw' = uvw + uvw' = uvw - uw'v.$$

Es decir, d^1 devuelve las dos caras adyacentes con orientaciones opuestas (ver figura 4.1). Vamos a definir cuál es su *cara izquierda* y cuál es la *derecha*. Para ello usaremos que la superficie S es orientable con cierta orientación global ξ . La arista uv tiene una orientación natural recorriéndola en orden creciente de sus vértices. Si x es un punto en la arista uv , la orientación en la arista nos da un vector tangente $\bar{w}_1 \in T_x S$. De esta forma, existe un vector $\bar{w}_2$ tal que la base $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$ tiene la orientación ξ_x . Definimos la *cara izquierda* como la cara hacia la que apunta el vector $\bar{w}_2$. Así, la cara izquierda está *orientada positivamente*. Así que la imagen de una arista a es $a^1 - a^2$, donde a^1 es su cara izquierda y a^2 es su cara derecha (ambas orientadas positivamente respecto de la arista). En el caso de la figura 4.1, si $u < v$ y suponemos que la orientación es la inducida por el plano, queda que uvw es la cara izquierda.

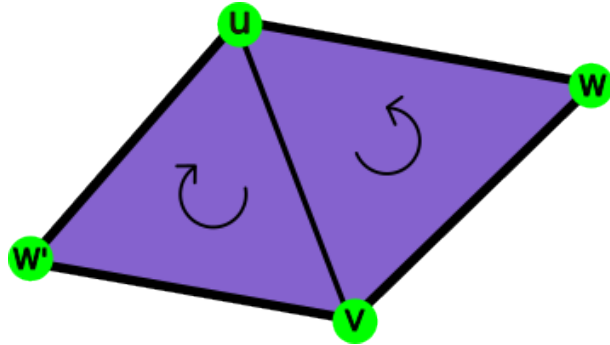


Figura 4.1: Orientación de dos caras opuestas.

Veamos que $\text{Im} d^1 = \mathbb{Z}^{|A|-|C|+1}$. Para ello definamos el homomorfismo

$$\begin{aligned} \Sigma : \quad \mathbb{Z}^{|C|} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{c \in C} k_c c &\mapsto \sum_{c \in C} k_c, \end{aligned}$$

y probemos que $\text{Im} d^1 = \ker \Sigma$. Si $a \in A$, $\Sigma d^1(a) = \Sigma(uvw - uw'v) = 1 - 1 = 0$. Como las aristas forman una base de $\mathbb{Z}^{|A|}$, $\text{Im} d^1 \subset \ker \Sigma$.

Por otro lado, si $\sum_{c \in C} k_c = 0$, podemos escoger $c_0 \in C$, y tenemos $k_{c_0} = -\sum_{c \in C \setminus \{c_0\}} k_c$. Sumando todas las caras queda

$$\sum_{c \in C} k_c c = \sum_{c \in C \setminus \{c_0\}} k_c (c - c_0).$$

Sea $c \neq c_0$ una cara. Por ser S conexa, existe un camino de c_0 a c pasando por las caras $c_0, c_1, \dots, c_n = c$ y recorriendo las aristas $c_{01}, c_{12}, c_{23}, \dots, c_{(n-1)n}$. Donde la arista $c_{(k-1),k}$ es adyacente a las caras c_k y c_{k-1} , y la cara c_k es la izquierda. De esta forma

$$d^1(c_{01} + c_{12} + c_{23} + \dots + c_{(n-1)n}) = c_1 - c_0 + c_2 - c_1 + \dots + c - c_{n-1} = c - c_0.$$

Luego $c - c_0 \in \text{Im} d^1$ sea cual sea $c \in C \setminus \{c_0\}$. Concluimos que

$$\sum_{c \in C} k_c c = \sum_{c \in C \setminus \{c_0\}} k_c (c - c_0) \in \text{Im} d^1.$$

Como $\sum$ es sobreyectiva, $\ker \Sigma = \mathbb{Z}^{|C|-1}$. Así $\text{Im} d^1 = \ker \Sigma = \mathbb{Z}^{|C|-1}$. Por otro lado, $\mathbb{Z}^{|C|-1} = \text{Im} d^1 \cong \mathbb{Z}^{|A|} / \ker d^1$, por lo que $\ker d^1 \cong \mathbb{Z}^{|A|-|C|+1}$. Y así,

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \ker d^1 / \text{Im} d_0 = \mathbb{Z}^{|A|-|C|+1} / \mathbb{Z}^{|V|-1} = \mathbb{Z}^{|A|-|C|-|V|+2}.$$

Además, como $d^2 : \mathbb{Z}^{|C|} \rightarrow 0$, tenemos que

$$\check{H}^2(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \ker d^2 / \text{Im} d^1 \cong \mathbb{Z}^{|C|} / \mathbb{Z}^{|C|-1} \cong \mathbb{Z}.$$

Por el teorema 4.2.8, $\mathfrak{U}$ es acíclico, luego computa la cohomología, y obtenemos que

$$\check{H}^1(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{|A|-|C|-|V|+2} = \mathbb{Z}^{2g} \quad \text{y} \quad \check{H}^2(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Observación 4.1.4. Algo que también se deduce del ejemplo anterior es que $2 - \chi(S) = -|V| + |A| - |C| + 2 = 2g$ no depende de la triangulación, por lo que el *género* g y la *característica de Euler* $\chi(S)$ son invariantes topológicos.

Corolario 4.1.5. Las cohomologías de la esfera S^2 (superficie compacta orientable de género 0) y del toro T (superficie compacta orientable de género 1) vienen dadas por

$$\check{H}^q(S^2, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0, 2, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \quad \text{y} \quad \check{H}^q(T, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0, 2, \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } q = 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

4.2 Cohomología de complejos simpliciales

Hay muchos espacios en los que existen recubrimientos acíclicos. Un recubrimiento cuyas intersecciones finitas sean contractibles se llamará *recubrimiento bueno*. Obsérvese que todo recubrimiento bueno es acíclico para el haz $\mathbb{Z}$ (en espacios Hausdorff paracompactos). Diremos que el espacio es *de tipo finito* si admite un recubrimiento bueno finito. Un ejemplo importante de estos espacios son las variedades diferenciables compactas. Gracias al Teorema 5.1 de [1], toda variedad diferenciable compacta es de tipo finito. Los complejos simpliciales también son de tipo finito, como probaremos en 4.2.8.

Definición 4.2.1. Un *complejo simplicial abstracto* sobre un conjunto B es un conjunto finito Δ de subconjuntos de B tal que

- los subconjuntos de B con cardinal 1 son elementos de Δ y
- si $\tau \subset \sigma$ y $\sigma \in \Delta$ entonces $\tau \in \Delta$.

Los elementos de Δ con cardinal $k + 1$ se llaman *k-símplices*.

Definición 4.2.2. Un *k-símplice afín* es la envoltura convexa de $k + 1$ puntos afínmente independientes. Un *complejo simplicial afín* K es una familia finita de símplexes afines, de manera que

1. Si un símplex pertenece a K entonces todas sus caras pertenecen a K y
2. Si dos símplexes de K se cortan, lo hacen en una cara de ambos.

Es claro que los complejos simpliciales afines se sumergen en algún $\mathbb{R}^n$. Llamamos *dimensión del complejo simplicial afín* al máximo de las dimensiones de sus símplexes.

Intuitivamente, una *realización geométrica* de un complejo simplicial abstracto Δ es un espacio topológico N homeomorfo a un complejo simplicial afín tal que los k -símplexes de Δ están en correspondencia biyectiva (respetando las inclusiones) con los k -símplexes de N .

Es un hecho conocido que todo complejo simplicial abstracto finito tiene una realización geométrica. Un q -símplex σ queda unívocamente determinado por sus vértices $x_0, x_1, \dots, x_q$, así que diremos que *está generado por dichos vértices* y escribiremos $\sigma = \langle x_0, x_1, \dots, x_q \rangle$.

Ejemplo 4.2.3. Consideremos el complejo simplicial abstracto

$$N = \{(1), (2), (3), (4), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (2, 4), (2, 3, 4)\},$$

cuya realización geométrica se puede ver en la figura 4.2 (b).

Dos importantes ejemplos de complejo simplicial son las triangulaciones y los grafos.

Definición 4.2.4. Sea $\mathfrak{U}$ un recubrimiento de un espacio X . Definimos *su nervio de Čech* como el complejo simplicial $N(\mathfrak{U})$ en el que los k -símplexes son las familias de abiertos $U_1, \dots, U_k$ tales que $U_1 \cap \dots \cap U_k \neq \emptyset$.

Ejemplo 4.2.5. El complejo del ejemplo 4.2.3 se corresponde con el recubrimiento de S^1 visto en 4.2(a).

En lo que queda de sección X será un espacio de tipo finito. En estos espacios, por admitir un recubrimiento acíclico, la cohomología puede ser computada con dicho recubrimiento. Y por ser finito, puede ser calculada algorítmicamente en tiempo finito. Vamos a desarrollar un algoritmo para calcular la cohomología de Čech con coeficientes en $\mathbb{Z}$ dado el nervio $N(\mathfrak{U})$. Suponemos que $\mathfrak{U} = \{U_i : i = 0, 1, \dots, N\}$. Pongamos m el máximo número de elementos de $\mathfrak{U}$ que tienen intersección no vacía.

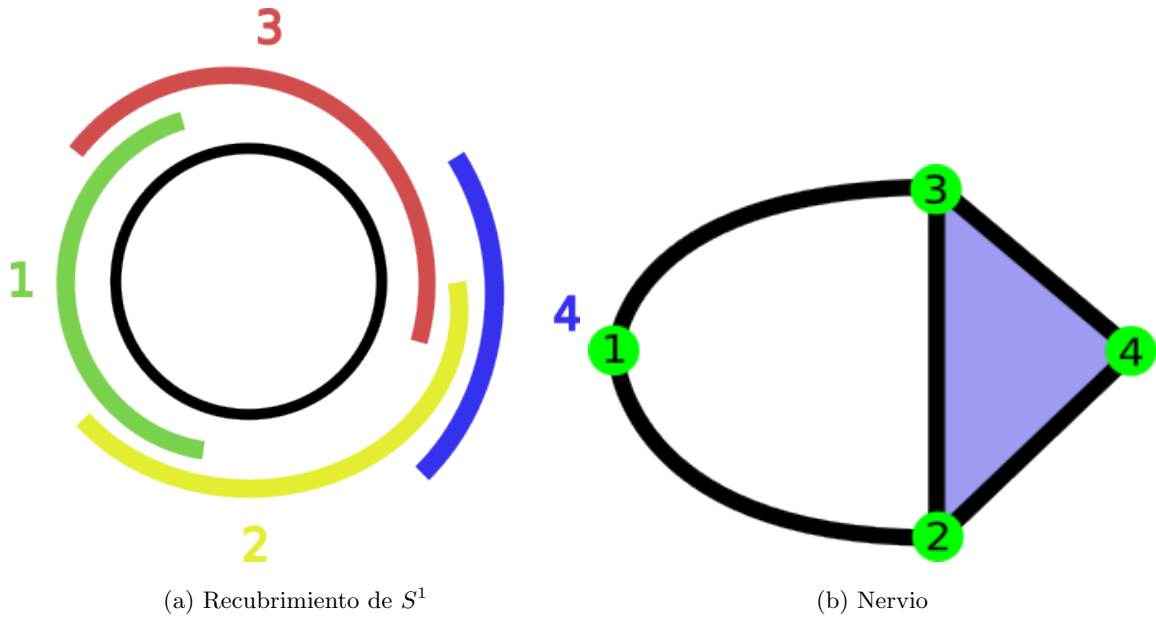


Figura 4.2: Recubrimiento de S^1 y su nervio de Čech.

1. Para cada $q = 0, 1, \dots, m$, agrupamos los q -símplices en el conjunto S^q y lo ordenamos en orden creciente de subíndices. Representamos un q -símplice como una $(q + 1)$ -tupla (correspondiente a los índices de los abiertos implicados, ordenados crecientemente). Si ω es un q -símplice, escribimos por $\partial_i \omega$ el $(q - 1)$ -símplice que resulta al quitarle a la tupla ω la coordenada i -ésima. Escribimos el j -ésimo q -símplice como $\bar{e}_j$. Así, podemos ver el grupo $C^q(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ como combinaciones $\mathbb{Z}$ -lineales formales de elementos de S_q . En otras palabras, como $\mathbb{Z}^{|S_q|}$. Escribimos e_j para el vector de la base de $\mathbb{Z}^{|S_q|}$ con todo 0 y un 1 en la coordenada j -ésima. No confundir con la tupla $\bar{e}_j$. El vector $(\lambda_1, \dots, \lambda_{S_q}) = \sum_{i=1}^{S_q} \lambda_j e_j$ representa la suma formal $\sum_{i=1}^{S_q} \lambda_j \bar{e}_j$. Con esta notación, $d^q : \mathbb{Z}^{|S_q|} \rightarrow \mathbb{Z}^{|S_{q+1}|}$. Denotamos por e'_j los elementos de la base de $\mathbb{Z}^{|S_{q+1}|}$ y por $\bar{e}'_j$ la tupla que representan.
2. Para calcular la matriz de d^q calculamos la imagen de un elemento e_j de la base $\mathbb{Z}^{|S_q|}$. Para ello, recorremos los distintos $(q + 1)$ -símplices $\bar{e}'_i$ con $i = 1, \dots, |S_{q+1}|$ y calculamos la componente i -ésima del vector $d^q(e_j)$, que es

$$d^q(e_j)_{\bar{e}'_i} = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k (e_j)_{\partial_k \bar{e}'_i},$$

donde $(e_j)_{\partial_k \bar{e}'_i}$ denota la coordenada l -ésima del vector e_j si $\bar{e}_l$ representa a la tupla $\partial_k \bar{e}'_i$. Obsérvese que no aplicamos el homomorfismo restricción por tratarse del haz constante. Esta suma aparentemente complicada se simplifica notablemente si observamos que $(e_j)_{\partial_k \bar{e}'_i}$ valdrá 1 cuando $\partial_k \bar{e}'_i$ represente la tupla $\bar{e}_j$ y 0 en el resto de los casos. Y por ser $\bar{e}'_i$ una $q + 1$ tupla, a la que le quitamos una coordenada distinta en cada iteración de la suma, habrá a lo sumo un $k \in \{0, 1, \dots, q + 1\}$ para el que $(e_j)_{\partial_k \bar{e}'_i}$ sea no nulo. Visto de otro modo, como la tupla $\bar{e}'_i$ consiste en añadirle una coordenada en cierta posición p

a un q -símplice ω , la suma será 0 si $\omega \neq \bar{e}_j$ y $(-1)^p$ si $\omega = \bar{e}_j$. Visto esto,

$$d^q(e_j)_{\bar{e}'_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{e}_j \not\subset \bar{e}'_i \\ (-1)^p & \text{si } \bar{e}'_i = ((\bar{e}_j)_0, \dots, (\bar{e}_j)_{p-1}, \chi, (\bar{e}_j)_p, \dots, (\bar{e}_j)_q). \end{cases}$$

Con estos valores tenemos calculado $d^q(e_j)$ y por tanto la matriz de d^q . Con estas matrices, tenemos perfectamente determinado el complejo de cocadenas, y solo queda calcular $\check{H}^q(X, \mathbb{Z}) = \check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \ker d^q / \text{Im} d^{q-1}$. Esto es automático usando *SageMath*. En resumen, hemos construido un algoritmo para calcular la cohomología de un espacio que toma como entrada el nervio de un recubrimiento con intersecciones finitas contráctiles. En el apéndice B escribimos el código e introducimos dos ejemplos de ejecución de este.

Observación 4.2.6. En B.1 calculamos la cohomología de S^1 usando el nervio dado en 4.2.3. De hecho, si observamos la realización geométrica de dicho nervio, vemos que es homotópicamente equivalente al propio S^1 . Esto se verifica en general.

Teorema 4.2.7. Si $\mathfrak{U}$ es un recubrimiento bueno de un espacio Hausdorff paracompacto X , entonces X es homotópicamente equivalente al nervio $N(\mathfrak{U})$. En particular, X y $N(\mathfrak{U})$ tienen los mismos grupos de cohomología.

Demostración. Corolario 4G.3. de [7]. □

Sea un complejo simplicial finito Δ y supongamos que existe un espacio X y un recubrimiento bueno $\mathfrak{U}$ de X cuyo nervio es Δ . Entonces, aplicarle el algoritmo a Δ nos dará la cohomología de X , que coincide con la de Δ (por tener el mismo tipo de homotopía Δ y X). Luego si podemos probar que cualquier complejo simplicial finito es el nervio de algún recubrimiento de algún espacio Hausdorff paracompacto, tendremos que el algoritmo aplicado a Δ calcula la cohomología de Δ sin necesidad de buscar ningún recubrimiento. Esto es lo que dice el siguiente

Teorema 4.2.8. Sea Δ un complejo simplicial finito. Existe un recubrimiento bueno $\mathfrak{U}$ de Δ tal que $N(\mathfrak{U}) = \Delta$.

Demostración. Sea un vértice $x \in \Delta$. Definimos U_x como la unión de los interiores de los símlices σ tales que $x \in \partial\sigma$ (donde ∂ denota el borde del símplex). Obsérvese que el interior de un k -símplex no tiene por qué ser abierto si no tiene la dimensión del complejo, pero la unión de todos los interiores sí que es abierto, porque coincide con el interior de la unión de los símlices σ tales que $x \in \partial\sigma$. Sea $\mathfrak{U} = \{U_x : x \text{ vértice de } \Delta\}$. Así, $U_{x_0} \cap U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k}$ es la unión de los interiores de los símlices σ tales que $x_0, x_1, \dots, x_k \in \partial\sigma$. Si un símplex σ contiene a todos los vértices $x_0, x_1, \dots, x_k$ entonces contiene a la envoltura convexa de estos, y por tanto $\langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle$ es un símplex de Δ . Recíprocamente, si $\langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle$ es un símplex de Δ , entonces la intersección $U_{x_0} \cap U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k}$ contiene a dicho símplex, luego es no vacía. Así, hemos visto que $U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k} \neq \emptyset$ si y sólo si $\langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle$ es un símplex de Δ . Por otro lado, si $U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k} \neq \emptyset$, entonces es contractible por ser homotópicamente equivalente al símplex $\langle x_0, x_1, \dots, x_k \rangle$. Para ver que tienen

el mismo tipo de homotopía tomamos un punto $x = (s_0, s_1, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, s_n)$ en coordenadas baricéntricas y deformamos continuamente a 0 las coordenadas que corresponden a los vértices $x_{k+1}, \dots, x_n$ vía

$$\begin{aligned} H_t : \quad U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k} &\rightarrow \langle x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n \rangle \\ (s_0, s_1, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, s_n) &\mapsto (s_0, s_1, \dots, s_k, (1-t)s_{k+1}, \dots, (1-t)s_n) \end{aligned}$$

con $t \in [0, 1]$. □

Corolario 4.2.9. El algoritmo desarrollado en esta sección computa la cohomología de Čech de cualquier complejo simplicial finito, sin necesidad de buscar un recubrimiento.

Corolario 4.2.10. Los complejos simpliciales son espacios de tipo finito.

Corolario 4.2.11. En un complejo simplicial finito de dimensión n , los grupos de cohomología de orden mayor que n se anulan.

Ejemplo 4.2.12. Ahora que hemos desarrollado un algoritmo para calcular la cohomología de cualquier complejo simplicial finito, calculamos la cohomología del plano proyectivo real a partir de la triangulación dada en la figura 4.3. Obsérvese que es una triangulación del plano proyectivo visto como el disco identificando su borde antipodalmente. Tras aplicar el algoritmo (B.2) obtenemos que

$$H^q(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

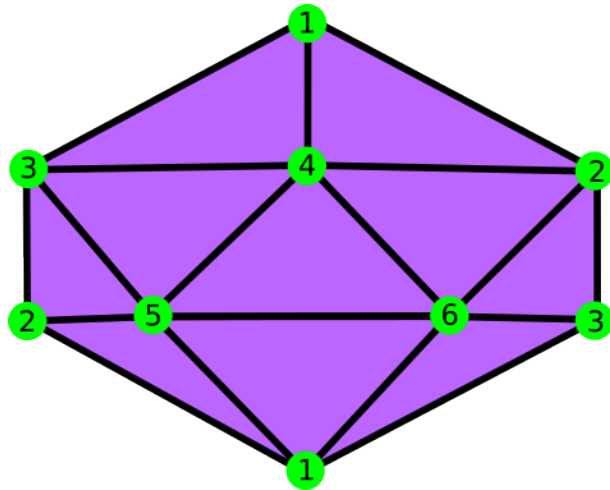


Figura 4.3: Triangulación del plano proyectivo.

El formalismo desarrollado en esta sección aparenta tener bastante relación con la cohomología simplicial. Para formalizar esta relación introducimos las nociones básicas de *cohomología singular*. Sea Δ un complejo

simplicial. Denotamos por $C_\Delta^q(\Delta, G)$ el grupo de q -cocadenas simpliciales de Δ , que es el grupo de homomorfismos que van del grupo de sumas formales finitas generado por el conjunto de q -símplices (con coeficientes en G) a G . Definimos un operador coborde $\delta : C_\Delta^q(\Delta, G) \rightarrow C_\Delta^{q+1}(\Delta, G)$ de la siguiente forma. Dado una q -cocadena simplicial σ , definimos $\delta\sigma$ como la $(q+1)$ -cocadena que a cada q -símplice $\langle x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_q} \rangle$ le asocia

$$\delta\sigma(\langle x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_q} \rangle) := \sum_{k=0}^q (-1)^k \sigma(\partial_k \langle x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_q} \rangle),$$

donde $\partial_k(\langle x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_q} \rangle)$ es la cara k -ésima de $\langle x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_q} \rangle$. Se comprueba rápidamente que δ es un operador coborde y que $C_\Delta^\bullet(\Delta, G)$ es un complejo de cocadenas. Denotamos por $H_\Delta^q(\Delta, G)$ sus grupos de cohomología, llamados *grupos de cohomología simplicial*.

Proposición 4.2.13. Si $\mathfrak{U}$ es un recubrimiento bueno y finito de X , entonces $C^\bullet(\mathfrak{U}, G)$ y $C_\Delta^\bullet(N(\mathfrak{U}), G)$ son complejos de cadenas isomorfos. En particular, $\check{H}^q(\mathfrak{U}, G) \cong H_\Delta^q(N(\mathfrak{U}), G)$ para todo $q \geq 0$.

Demostración. Sea $f \in C^q(\mathfrak{U}, G)$. En cada intersección $U_{i_0 i_1 \dots i_q}$, f tiene un valor constante $f_{i_0 i_1 \dots i_q}$. Definimos $\psi(f)$ como la q -cocadena simplicial que a cada símplice $\langle x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_q} \rangle$ le asocia

$$\psi(f)(\langle x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_q} \rangle) := f_{i_0 i_1 \dots i_q}.$$

Tenemos un homomorfismo $\psi : C^q(\mathfrak{U}, G) \rightarrow C_\Delta^q(N(\mathfrak{U}), G)$. Claramente ψ es un isomorfismo, y es rutinario ver que $\delta\psi(f) = \psi(df)$, luego tenemos un isomorfismo de complejos de cadenas $C^\bullet(\mathfrak{U}, G) \rightarrow C_\Delta^\bullet(N(\mathfrak{U}), G)$. $\square$

Observación 4.2.14. Esto quiere decir que la cohomología de Čech (al menos para el haz constante G) se puede pensar de la siguiente manera:

1. Tomamos un recubrimiento (bueno) $\mathfrak{U}$,
2. calculamos la cohomología simplicial del nervio: $\check{H}^q(\mathfrak{U}, G) \cong H_\Delta^q(N(\mathfrak{U}), G)$,
3. y tomamos el límite directo de estos grupos por refinamiento de $\mathfrak{U}$.

Naturalmente, este no es el caso general. Pero esta es la intuición que dio origen a las definiciones que tratamos en este trabajo.

Corolario 4.2.15. Si Δ es un complejo simplicial, la cohomología de Čech para G coincide con la cohomología simplicial.

Demostración. Basta tomar $\mathfrak{U} = \{U_x : x \text{ vértice de } \Delta\}$ como en la demostración de 4.2.8 para obtener que $N(\mathfrak{U}) = \Delta$. Por 4.2.13 tenemos $\check{H}^q(\mathfrak{U}, G) = H_\Delta^q(N(\mathfrak{U}), G) = H_\Delta^q(\Delta, G)$. Como $\mathfrak{U}$ es un recubrimiento bueno y los símplices son Hausdorff paracompactos, concluimos que $\check{H}^q(\Delta, G) = H_\Delta^q(\Delta, G)$. $\square$

Observación 4.2.16. La prueba anterior es autocontenida salvo por 3.5.2, que usa la relación entre la cohomología de Čech y la cohomología de haces. Pero no usa ninguna relación con la cohomología singular o simplicial.

4.3 Otras aplicaciones

Números de Betti. Por construcción, los grupos de cohomología son siempre abelianos. Cuando sean finitamente generados, podremos afirmar que $\check{H}^q(X, \mathbb{Z})$ es de la forma

$$\mathbb{Z}^{b_q} \times (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})^{k_1} \times \dots \times (\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z})^{k_r}.$$

El entero b_q se llama q -ésimo *número de Betti*, y es un importante invariante topológico. En los espacios topológicos de tipo finito, los grupos de cohomología son finitamente generados, por ser cada $C^q(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ un producto finito de copias de $\mathbb{Z}$.

Cardinal de un recubrimiento. En los espacios de tipo finito podemos asegurar que los grupos de cohomología son nulos a partir de cierto entero q . Donde $q - 1$ es, como mucho, el cardinal del recubrimiento acíclico finito. De hecho, podemos decir más. Si usamos el conocido resultado de que en una variedad diferenciable compacta de dimensión n el $H^n(X, \mathbb{R})$ es no nulo (podemos comparar con la cohomología de de Rham), obtenemos que cualquier recubrimiento de abiertos con intersecciones contráctiles tiene que tener al menos $n + 1$ elementos.

Grado topológico. Sea $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vimos en 2.8.5 que esta sucesión no podía extenderse con exactitud por la derecha,

$$0 \rightarrow C(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C(X, \mathbb{C}) \rightarrow C(X, \mathbb{C}^*) \rightarrow$$

Gracias al teorema 3.3.1 tenemos que

$$0 \rightarrow C(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C(X, \mathbb{C}) \rightarrow C(X, \mathbb{C}^*) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Donde la última igualdad sale del ejemplo 4.1.1 y del hecho de que X tiene el mismo tipo de homotopía que S^1 . Esto quiere decir que a cada continua $f : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ le estamos asignando un número entero. Este número se llama *grado* de f . Una forma geométrica de interpretar esto es considerar la circunferencia S^1 parametrizada por $t \mapsto e^{it}$ y ver el número de vueltas que da la curva $t \mapsto f(e^{it})$.

Fibrados vectoriales. Una de las principales aplicaciones de la cohomología de Čech con haces no abelianos es la clasificación de fibrados vectoriales sobre una variedad diferenciable X . Se puede probar que los fibrados vectoriales de rango r (con fibra $\mathbb{K}^r$, siendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) sobre una variedad están en correspondencia biunívoca con las clases de $\check{H}^1(X, F)$. Donde F es el haz que a cada U le asigna $C^\infty(U, GL_r(\mathbb{K}))$. El proceso es el siguiente: a cada *trivialización* del fibrado le asignamos unas *funciones de transición*, y estas funciones de transición verifican la condición de 1-cociclo para el haz F . Si tomamos otra trivialización obtenemos otro cociclo cohomólogo (que tiene la misma clase en $\check{H}^1(X, F)$). Así tenemos una aplicación bien definida de los fibrados a $\check{H}^1(X, F)$. Se puede probar que esto es de hecho una biyección. En el conjunto con unidad $\check{H}^1(X, F)$,

la unidad se corresponde con el *fibrado trivial* $(X \times \mathbb{K}^r)$. Cuando $r = 1$ (es decir, cuando el fibrado es *de línea*) el haz es abeliano (en el caso real tenemos el haz de funciones diferenciables reales nunca nulas C^∞ y en el complejo el haz de funciones diferenciables complejas nunca nulas $C^\infty(-, \mathbb{C}^*)$), por lo que $\check{H}^1(X, F)$ es un grupo, llamado *grupo de Picard diferenciable*. Este grupo es isomorfo al grupo de fibrados de línea con el producto tensorial como ley de composición interna. Para mayor detalle ver [14].

Ejemplo 4.3.1. En S^1 sólo hay dos fibrados de línea reales (salvo isomorfismo) porque $\check{H}^1(S^1, C^\infty) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (ver el ejemplo 4.1.2). Estos se corresponden con el fibrado trivial (el cilindro) y la banda de Möbius.

Lema 4.3.2. Si X es Hausdorff paracompacto, tomando la sucesión exacta de grupos topológicos $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \rightarrow 0$, el teorema 3.3.9 dice que

$$\check{H}^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^1(X, C^\infty(-, \mathbb{C})) \rightarrow \check{H}^1(X, C^\infty(-, \mathbb{C}^*)) \rightarrow \check{H}^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^2(X, C^\infty(-, \mathbb{C}))$$

es exacta. Y usando que $\check{H}^q(X, C^\infty(-, \mathbb{C})) = 0$ para $q > 0$. (corolario 3.3.7) tenemos que

$$\check{H}^1(X, C^\infty(-, \mathbb{C}^*)) \rightarrow \check{H}^2(X, \mathbb{Z})$$

es un isomorfismo.

Ejemplo 4.3.3. Por 4.3.2 sabemos que $\check{H}^1(X, C^\infty(-, \mathbb{C}^*)) \cong \check{H}^2(X, \mathbb{Z})$, luego los fibrados de línea complejos sobre X están en correspondencia con los elementos de $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$. El elemento de $\check{H}^2(X, \mathbb{Z})$ que le corresponde a un fibrado se llama *primera clase de Chern* del fibrado. Por ejemplo: Si X es una superficie compacta, conexa y orientable tenemos, por 4.1.3, que

$$\check{H}^1(S, C^\infty(-, \mathbb{C}^*)) \cong \check{H}^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Y con este ejemplo damos por terminado el trabajo.

Apéndice A

Álgebra

En este apéndice incluimos los requisitos algebraicos necesarios para leer el trabajo. Hemos decidido separarlos del cuerpo del trabajo para distinguir la parte topológica de la parte algebraica en los razonamientos. No incluiremos todas las pruebas.

A.1 Álgebra homológica

A.1.1 Complejos de cocadenas

Definición A.1.1. Un complejo de cocadenas es una sucesión $(C^k, d^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de pares donde C^k son grupos abelianos y $d^k : C^k \rightarrow C^{k+1}$ es un homomorfismo de grupos verificando que $d^{k+1} \circ d^k = 0$ para cualquier k . Se denota con $C^\bullet$ y se representa como la sucesión

$$\dots \xrightarrow{d^{k-2}} A^{k-1} \xrightarrow{d^{k-1}} A^k \xrightarrow{d^k} A^{k+1} \xrightarrow{d^{k+1}} \dots$$

Escribiremos $d = d^k$ si el entero k no es relevante. La condición $d^{k+1} \circ d^k = 0$ se suele resumir como $d \circ d = d^2 = 0$, y equivale a que $\text{Im} d^{k-1} \subset \ker d^k$ para todo k .

Definición A.1.2. Una sucesión de grupos abelianos se dice *exacta* si $\ker d^k / \text{Im} d^{k-1} = 0$ para todo k .

Observación A.1.3. Una sucesión exacta de grupos de la forma $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ recibe el nombre de *sucesión exacta corta*. Se puede ver como una forma condensada de escribir que $E \rightarrow F$ es inyectiva, $F \rightarrow G$ es sobreyectiva, y $\ker(F \rightarrow G) = \text{Im}(E \rightarrow F)$.

Ejemplo A.1.4. El ejemplo paradigmático es considerar la inclusión y la proyección sobre el cociente

$$0 \rightarrow E \hookrightarrow F \rightarrow F/E \rightarrow 0.$$

De hecho, todos los ejemplos son de esta forma. Dada una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C \rightarrow 0,$$

podemos tomar $N = \text{Im } g = \ker h$, que es isomorfo a A . Y también C es isomorfo a B/N , (por el primer teorema de isomorfía). Y podemos escribirla como $0 \rightarrow N \hookrightarrow B \rightarrow B/N \rightarrow 0$.

Definición A.1.5. Sean $A^\bullet, B^\bullet$ dos complejos de co-cadenas. Un *morfismo de complejos de cocadenas* $f^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ es una sucesión de aplicaciones $f^k : A^k \rightarrow B^k$ que hacen conmutativos los diagramas

$$\begin{array}{ccc} A^k & \xrightarrow{d^k} & A^{k+1} \\ f^k \downarrow & & \downarrow f^{k+1} \\ B^k & \xrightarrow{d^k} & B^{k+1} \end{array}$$

para todo k . A veces se simplificará la notación escribiendo $f := f^\bullet$.

Observación A.1.6. Los morfismos de complejos de cocadenas se pueden componer: Si $f^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ y $g^\bullet : B^\bullet \rightarrow C^\bullet$ se puede escribir $g^\bullet \circ f^\bullet := (g^k \circ f^k)_k$ y es inmediato comprobar que es un morfismo de complejos de cadenas. También tenemos la identidad $\text{Id}_A^\bullet : A^\bullet \rightarrow A^\bullet$ definida por $(\text{Id}_A^k)_k$. Es por esto que los complejos de cadenas con sus morfismos forman una categoría.

Definición A.1.7. Sea $f^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ un morfismo de complejos de cocadenas.

- Se define su núcleo como la sucesión $(\ker f)^\bullet := (\ker f^k, d^k|_{\ker f^k})_k$
- Se define su imagen como $(\text{Im } f)^\bullet := (\text{Im } f^k, d^k|_{\text{Im } f^k})_k$. Ambos heredan de $A^\bullet$ y $B^\bullet$ (respectivamente) la estructura de complejos de cocadenas.
- Se define su conúcleo como la sucesión $(\text{coker } f)^\bullet := (\text{coker } f^k, d^k|_{\text{coker } f^k})_k$, donde $\text{coker } f^k := B^k / \text{Im } f^k$

Definición A.1.8. Una sucesión de complejos de cocadenas es una sucesión $(C_i^\bullet, f_i^\bullet)$ donde los $C_i^\bullet$ son complejos de cocadenas y los $f_i^\bullet : C_i^\bullet \rightarrow C_{i+1}^\bullet$ son morfismos de complejos de cocadenas. Dicha sucesión se dice *exacta* si para cada $i \in \mathbb{Z}$ se tiene $(\text{Im } f_i)^\bullet = (\ker f_{i+1})^\bullet$.

A.1.2 La cohomología de un complejo

Para medir la exactitud de un complejo de cocadenas definimos sus grupos de cohomología.

Definición A.1.9. Si $C^\bullet$ es un complejo de cocadenas, definimos su grupo de cohomología k -ésimo como

$$H^k(C^\bullet) := \ker d^k / \text{Im } d^{k-1}.$$

Definición A.1.10. Un morfismo de complejos de cadenas $f^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ induce homomorfismos $(f^\bullet)_{*,k} : H^k(A^\bullet) \rightarrow H^k(B^\bullet)$, que abreviaremos como $f_{*,k}$ cuando no haya ambigüedad. Como el diagrama de A.1.5 conmuta, la aplicación $f_{*,k}$ manda k -cociclos a k -cociclos y k -cobordes a k -cobordes. En efecto: si x es un k -cociclo ($d^k(x) = 0$) entonces $d^k(f_{*,k}(x)) = f_{*,k+1}(d^k(x)) = 0$, por lo que $f_{*,k}(x)$ es un k -cociclo. Y si x es un k -coborde (existe un $u \in A^{k-1}$ tal que $d^{k-1}(u) = x$) entonces $d^{k-1}(f_{*,k-1}(x)) = f_{*,k}(d^{k-1}(u)) = f_{*,k}(x)$, por lo que $f_{*,k}(x)$ es un k -coborde. De esta forma, la aplicación

$$\begin{aligned} f_{*,k} : \quad H^k(A^\bullet) &\rightarrow H^k(B^\bullet) \\ x + d^{k-1}(A^{k-1}) &\mapsto f^k(x) + d^{k-1}(B^{k-1}) \end{aligned}$$

está bien definida.

Proposición A.1.11. Además, si tenemos un cuadrado conmutativo de complejos de cadenas

$$\begin{array}{ccc} A^\bullet & \longrightarrow & B^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{A}^\bullet & \longrightarrow & \bar{B}^\bullet \end{array}$$

entonces el siguiente cuadrado

$$\begin{array}{ccc} H^k(A^\bullet) & \longrightarrow & H^k(B^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^k(\bar{A}^\bullet) & \longrightarrow & H^k(\bar{B}^\bullet) \end{array}$$

conmuta.

Lema A.1.12. (Lema de la serpiente) Supongamos que el siguiente diagrama de morfismos de grupos conmuta y tiene líneas horizontales exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{u} & M' & \xrightarrow{v} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u'} & N' & \xrightarrow{v'} & N'' \end{array}$$

Entonces existe un morfismo ∂ tal que la siguiente sucesión es exacta

$$\ker f \xrightarrow{\bar{u}} \ker f' \xrightarrow{\bar{v}} \ker f'' \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker} f \xrightarrow{\bar{u}'} \operatorname{coker} f' \xrightarrow{\bar{v}'} \operatorname{coker} f'',$$

donde $\bar{u}, \bar{v}$ son las restricciones de u y v a $\ker f \subset M$ y $\ker f' \subset M'$ respectivamente. Y $\bar{u}', \bar{v}'$ son las aplicaciones inducidas por u' y v' en $\operatorname{coker} f = N/\operatorname{Im} f$ y $\operatorname{coker} f' = N'/\operatorname{Im} f'$, respectivamente.

Demostración. No incluiremos esta demostración completa por tratarse de un largo ejemplo de persecución de diagramas (para ver los detalles [10]). Sin embargo, sí construiremos el morfismo ∂ , que será de clave importancia en el trabajo. Definimos $\partial : \ker f'' \rightarrow \operatorname{coker} f$ de la siguiente manera: Sea $c \in \ker f'' \subset N''$. Como v es sobreyectiva, existe un $b \in M'$ tal que $v(b) = c$. Como el diagrama es conmutativo, $f''(v(b)) = v'(f'(b)) = 0$, luego $f'(b) \in \ker v \supset \operatorname{Im} u'$, de modo que existe un único (por la inyectividad de u') $a \in N$ con $u'(a) = f'(b)$. Explícitamente, $a = (u')^{-1}f'(b)$. Definimos entonces $\partial(c) = a + \operatorname{Im} f \in \operatorname{coker} f = N/\operatorname{Im} f$ $\square$

Observación A.1.13. En particular, si u es inyectiva, entonces $\bar{u}$ es inyectiva. Y si $v' : N' \rightarrow N''$ es sobreyectiva, entonces $\bar{v}' : N'/\text{Im} f' \rightarrow N''/\text{Im} f''$ es sobreyectiva.

Luego, si el siguiente diagrama tiene filas exactas y conmuta,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & M' & \xrightarrow{v} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u'} & N' & \xrightarrow{v'} & N'' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

la sucesión siguiente es exacta

$$0 \rightarrow \ker f \xrightarrow{\bar{u}} \ker f' \xrightarrow{\bar{v}} \ker f'' \xrightarrow{\partial} \text{coker} f \xrightarrow{\bar{u}'} \text{coker} f' \xrightarrow{\bar{v}'} \text{coker} f'' \rightarrow 0.$$

Teorema A.1.14. (Sucesión exacta larga) Si la sucesión de complejos $0 \rightarrow C^\bullet \xrightarrow{\phi} D^\bullet \xrightarrow{\phi'} E^\bullet \rightarrow 0$ es exacta, entonces existen morfismos ∂^k que hacen que la siguiente sucesión sea exacta

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H^{n-1}(C^\bullet) \rightarrow H^{n-1}(D^\bullet) \rightarrow H^{n-1}(E^\bullet) \xrightarrow{\partial^{n-1}} \\ &\xrightarrow{\partial^{n-1}} H^n(A^\bullet) \rightarrow H^n(B^\bullet) \rightarrow H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\partial^n} \\ &\xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(A^\bullet) \rightarrow H^{n+1}(B^\bullet) \rightarrow H^{n+1}(C^\bullet) \xrightarrow{\partial^{n+1}} \dots \end{aligned}$$

Esta sucesión recibe el nombre de *sucesión exacta larga* (infinita).

Demostración. Para la demostración conviene desglosar la sucesión $0 \rightarrow C^\bullet \xrightarrow{\phi} D^\bullet \xrightarrow{\phi'} E^\bullet \rightarrow 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C^{n-1} & \xrightarrow{\phi^{n-1}} & D^{n-1} & \xrightarrow{\phi'^{n-1}} & E^{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d^{n-1} & & \downarrow d'^{n-1} & & \downarrow d''^{n-1} \\ 0 & \longrightarrow & C^n & \xrightarrow{\phi^n} & D^n & \xrightarrow{\phi'^n} & E^n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d^n & & \downarrow d'^n & & \downarrow d''^n \\ 0 & \longrightarrow & C^{n+1} & \xrightarrow{\phi^{n+1}} & D^{n+1} & \xrightarrow{\phi'^{n+1}} & E^{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d^{n+1} & & \downarrow d'^{n+1} & & \downarrow d''^{n+1} \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

En este diagrama conmutativo las líneas horizontales son exactas y las verticales verifican $d^2 = 0$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, nos fijaremos en el siguiente subdiagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^n & \xrightarrow{\phi^n} & D^n & \xrightarrow{\phi'^n} & E^n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d^n & & \downarrow d'^n & & \downarrow d''^n \\ 0 & \longrightarrow & C^{n+1} & \xrightarrow{\phi^{n+1}} & D^{n+1} & \xrightarrow{\phi'^{n+1}} & E^{n+1} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Este verifica las hipótesis de A.1.13, luego tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \ker d^n \rightarrow \ker d'^n \rightarrow \ker d''^n \rightarrow \operatorname{coker} d^n \rightarrow \operatorname{coker} d'^n \rightarrow \operatorname{coker} d''^n \rightarrow 0.$$

En particular, tenemos dos sucesiones exactas:

$$0 \rightarrow \ker d^n \rightarrow \ker d'^n \rightarrow \ker d''^n \quad \text{y} \quad \operatorname{coker} d^n \rightarrow \operatorname{coker} d'^n \rightarrow \operatorname{coker} d''^n \rightarrow 0.$$

Definamos $\iota_n : \operatorname{coker} d^{n-1} = C^n / \operatorname{Im} d^{n-1} \rightarrow C^n / \ker d^n$ mediante $x + \operatorname{Im} d_{n-1} \mapsto x + \ker d^n$. Es decir: manda la clase de x módulo $\operatorname{Im} d^{n-1}$ a su clase módulo $\ker d^n$. Está bien definido porque si $x - y \in \operatorname{Im} d^{n-1}$ entonces $x - y \in \ker d^n$. Es inmediato comprobar que respeta la operación de grupo.

Probemos que $\ker \iota_n = H^n(C)$. Por un lado, si $x + \operatorname{Im} d^{n-1} \xrightarrow{\iota_n} 0 + \ker d^n$ entonces $x + \ker d^n = 0 + \ker d^n$, por lo que $x \in \ker d^n$. Luego $\ker \iota_n \subset \ker d^n / \operatorname{Im} d^{n-1} = H^n(C)$. Por otro lado, si $x + \operatorname{Im} d^{n-1} \in \ker d^n / \operatorname{Im} d^{n-1} = H^n(C)$, entonces $\iota_n(x) = x + \ker d^n = 0 + \ker d^n$.

Como $C^n / \ker d^n \cong \operatorname{Im} d^n$ (por el primer teorema de isomorfía), y $\operatorname{Im} d^n \subset \ker d^{n+1}$, podemos ver el morfismo ι_n como $\iota_n : \operatorname{coker} d^{n-1} \rightarrow \ker d^{n+1}$. Además, $\operatorname{coker} \iota_n = \ker d^{n+1} / \operatorname{Im} d^n = H^{n+1}(C)$. En resumen, hemos encontrado una homomorfismo

$$\iota_n : \operatorname{coker} d^{n-1} \rightarrow \ker d^{n+1}$$

verificando $\ker \iota_n = H^n(C)$ y $\operatorname{coker} \iota_n = H^{n+1}(C)$.

Análogamente, podemos encontrar dos homomorfismos

$$\iota'_n : \operatorname{coker} d'^{n-1} \rightarrow \ker d'^{n+1},$$

$$\iota''_n : \operatorname{coker} d''^{n-1} \rightarrow \ker d''^{n+1},$$

que verifiquen $\ker \iota'_n = H^n(D^\bullet)$ y $\operatorname{coker} \iota'_n = H^{n+1}(D^\bullet)$. Y que $\ker \iota''_n = H^n(E^\bullet)$ y $\operatorname{coker} \iota''_n = H^{n+1}(E^\bullet)$.

Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{coker} d^{n-1} & \longrightarrow & \operatorname{coker} d'^{n-1} & \longrightarrow & \operatorname{coker} d''^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \iota_n & & \downarrow \iota'_n & & \downarrow \iota''_n & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker d^{n-1} & \longrightarrow & \ker d'^{n-1} & \longrightarrow & \ker d''^{n-1}. \end{array}$$

Las filas son exactas por la observación hecha al inicio. Aplicando a este último diagrama el lema de la serpiente (A.1.12), tenemos que existe un morfismo ∂^n tal que la siguiente sucesión es exacta

$$\ker \iota_n \rightarrow \ker \iota'_n \rightarrow \ker \iota''_n \xrightarrow{\partial^n} \operatorname{coker} \iota_n \rightarrow \operatorname{coker} \iota'_n \rightarrow \operatorname{coker} \iota''_n.$$

Es decir,

$$H^n(C^\bullet) \rightarrow H^n(D^\bullet) \rightarrow H^n(E) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(C^\bullet) \rightarrow H^{n+1}(D^\bullet) \rightarrow H^{n+1}(E^\bullet)$$

es exacta. □

Proposición A.1.15. Supongamos que

$$0 \rightarrow C^\bullet \rightarrow D^\bullet \rightarrow E^\bullet \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \rightarrow \bar{C}^\bullet \rightarrow \bar{D}^\bullet \rightarrow \bar{E}^\bullet \rightarrow 0$$

son sucesiones exactas de morfismos de complejos de cadenas y que tenemos un *morfismo de sucesiones exactas cortas*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^\bullet & \longrightarrow & D^\bullet & \longrightarrow & E^\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e \\ 0 & \longrightarrow & \bar{C}^\bullet & \longrightarrow & \bar{D}^\bullet & \longrightarrow & \bar{E}^\bullet \longrightarrow 0. \end{array}$$

Entonces existe un *morfismo* entre las respectivas sucesiones exactas largas.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H^n(C^\bullet) & \longrightarrow & H^n(D^\bullet) & \longrightarrow & H^n(E^\bullet) & \xrightarrow{\partial^n} & H^{n+1}(C^\bullet) & \longrightarrow & H^{n+1}(D^\bullet) & \longrightarrow & H^{n+1}(E^\bullet) & \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow c_{*,n} & & \downarrow d_{*,n} & & \downarrow e_{*,n} & & \downarrow c_{*,n+1} & & \downarrow d_{*,n+1} & & \downarrow e_{*,n+1} & \\ \dots & \longrightarrow & H^n(\bar{C}^\bullet) & \longrightarrow & H^n(\bar{D}^\bullet) & \longrightarrow & H^n(\bar{E}^\bullet) & \xrightarrow{\partial^n} & H^{n+1}(\bar{C}^\bullet) & \longrightarrow & H^{n+1}(\bar{D}^\bullet) & \longrightarrow & H^{n+1}(\bar{E}^\bullet) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

(Es decir, los morfismos inducidos en la cohomología conmutan).

Demostración. Sabemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H^n(C^\bullet) & \longrightarrow & H^n(D^\bullet) & \longrightarrow & H^n(E^\bullet) \\ \downarrow c_{*,n} & & \downarrow d_{*,n} & & \downarrow e_{*,n} \\ H^n(\bar{C}^\bullet) & \longrightarrow & H^n(\bar{D}^\bullet) & \longrightarrow & H^n(\bar{E}^\bullet) \end{array}$$

conmuta (por A.1.11). Así que la demostración se reduce a probar que

$$\begin{array}{ccc} H^n(E^\bullet) & \xrightarrow{\partial^n} & H^{n+1}(C^\bullet) \\ \downarrow c_{*,n} & & \downarrow d_{*,n+1} \\ H^n(\bar{E}^\bullet) & \xrightarrow{\partial^n} & H^{n+1}(\bar{C}^\bullet) \end{array}$$

conmuta. Esta prueba es rutinaria por persecución de diagramas. $\square$

A.1.3 Homotopía en complejos de cocadenas

Definición A.1.16. Sean $f^\bullet, g^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ dos morfismos de complejos de cadenas. Decimos que son aplicaciones homótopas si existen morfismos $P^n : A^n \rightarrow B^{n-1}$ tales que

$$d^{n-1} \circ P^n + P^{n+1} \circ d^n = g^n - f^n$$

para todo n entero, que se traduce en la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & A^n & \xrightarrow{d^n} & A^{n+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow g^{n-1} & \swarrow f^{n-1} P^n & \downarrow g^n & \swarrow f^n P^{n+1} & \downarrow g^{n+1} \\ \dots & \longrightarrow & B^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & B^n & \xrightarrow{d^n} & B^{n+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Abreviadamente escribimos

$$dP + Pd = g^\bullet - f^\bullet,$$

La sucesión $P^\bullet$ de morfismos se llama *operador de homotopía*.

Es inmediato comprobar que la relación de homotopía es una relación de equivalencia entre morfismos de complejos de cadenas.

Proposición A.1.17. Si dos morfismos $f^\bullet, g^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ son homótopos entonces inducen el mismo morfismo en las cohomologías.

Demostración. Sean $\alpha \in A^n$. Si $d\alpha = 0$ entonces $g^n(\alpha) - f^n(\alpha) = dP(\alpha) - Pd\alpha = dP(\alpha)$. Luego $P(\alpha) \in \text{Im} d^{k-1}$, de modo que $g^n(\alpha)$ y $f^n(\alpha)$ determinan la misma clase de cohomología en $H^k(B^\bullet)$. Es decir, $f_{*,k}([\alpha]) = g_{*,k}([\alpha])$. $\square$

Definición A.1.18. Un morfismo de complejos de cocadenas $f^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ se dice que es una *equivalencia homotópica* si existe $g^\bullet : B^\bullet \rightarrow A^\bullet$ tal que $f^\bullet \circ g^\bullet \cong \text{Id}_B^\bullet$ y $g^\bullet \circ f^\bullet \cong \text{Id}_A^\bullet$. Diremos que *dos complejos de cocadenas son homotópicamente equivalentes* si existe una equivalencia de homotopía entre ellos.

Corolario A.1.19. Si $A^\bullet, B^\bullet$ son complejos de cocadenas y $f^\bullet : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ es una equivalencia homotópica, entonces $f^k : H^k(A^\bullet) \rightarrow H^k(B^\bullet)$ es un isomorfismo para todo k .

A.2 Algunas definiciones de teoría de categorías

En esta sección introduciremos algunas definiciones relativas a la teoría de categorías a modo recopilatorio. Su utilidad será, principalmente, aportar cierta terminología que agrupará múltiples conceptos dados a lo largo del trabajo, que de otra forma quedarían bastante diluidos e injustificados.

Definición A.2.1. Sean $F, G : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}'$ dos funtores covariantes. Una *transformación natural* $\eta : F \rightarrow G$ es un morfismo $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$ para cada objeto X de $\mathfrak{C}$ que verifica: Para cada par de objetos X, Y de $\mathfrak{C}$ y cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

La transformación natural se dice *equivalencia natural* si los η_X son isomorfismos para cada X . Decimos que dos funtores *son equivalentes* si existe una equivalencia natural entre ellos.

Intuitivamente, lo que dice la definición de equivalencia natural es que los funtores transforman un objeto en *el mismo objeto* (módulo isomorfismo) y esta transformación conmuta con los morfismos de la categoría.

Definición A.2.2. Dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}'$ se dicen *equivalentes* si existen funtores $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}'$ y $G : \mathfrak{C}' \rightarrow \mathfrak{C}$ tales que $G \circ F$ y $F \circ G$ sean equivalentes al funtor identidad en $\mathfrak{C}$ y el funtor identidad en $\mathfrak{C}'$ (respectivamente).

Que dos categorías sean equivalentes significa que, esencialmente, son *la misma*. Los objetos y los morfismos tienen las mismas propiedades en ambas categorías: Las sucesiones exactas en $\mathfrak{C}$ lo son en $\mathfrak{C}'$, los monomorfismos (epimorfismos) siguen siendo monomorfismos (epimorfismos), etc. Siempre y cuando dichos conceptos tengan sentido.

Definición A.2.3. Un funtor entre dos categorías se dice *exacto* si transforma sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas cortas.

Para ser precisos, no se puede definir la exactitud para cualquier categoría. Las categorías en las que tiene sentido hacer álgebra homológica se llaman *categorías abelianas*. Sin embargo, esto escapa de los objetivos del trabajo (y del apéndice). En las categorías que consideraremos sí tendrá sentido hablar de funtores exactos. Los funtores exactos son importantes dada la siguiente

Proposición A.2.4. Si un funtor es exacto entonces transforma sucesiones exactas de cualquier longitud en sucesiones exactas (de la misma longitud).

A.3 Límites directos

Definimos ahora la noción de límite directo de grupos, y establecemos algunas de sus propiedades, que son ampliamente usadas durante el texto.

Definición A.3.1. Un *conjunto dirigido* es un par $(I, \leq)$, donde $\leq$ es un preorden (relación binaria reflexiva y transitiva) en el que todo par de elementos $\{a, b\} \subset I$ tiene una cota superior (es decir, existe $c \in I$ con $a \leq c$ y $b \leq c$).

Definición A.3.2. Un *sistema de grupos dirigido* (o *sistema de grupos*) es un par (A_i, f_{ij}) donde $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de grupos, $(I, \leq)$ un conjunto dirigido, y $\{f_{ij} : A_i \rightarrow A_j | i \leq j\}$ una familia de homomorfismos verificando

1. $f_{ii} = \text{Id}_{A_i}$,
2. $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ si $i \leq j \leq k$.

Definición A.3.3. El *límite directo* de un sistema dirigido de grupos (A_i, f_{ij}) es el cociente

$$\varinjlim A_i := (\bigsqcup_i A_i) / \sim$$

donde $x_i \in A_i$ está relacionado con x_j si existe algún $k \geq \{i, j\}$ tal que $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$.

La idea intuitiva tras estas definiciones es la siguiente: Un sistema de grupos dirigido es una familia de grupos que *evoluciona* en función de una familia de índices dirigidos, con aplicaciones f_{ij} que establecen *hacia dónde* evolucionan los elementos de dichos grupos. La relación de equivalencia establece que dos elementos son iguales si en algún momento *acaban siendo el mismo*.

El cociente hereda el producto de los A_i de la siguiente forma. Sean $a_i \in A_i, b_j \in A_j$. Definimos

$$[a_i] \cdot [b_j] := [f_{ik}(a_i) \cdot f_{jk}(b_j)],$$

donde k es una cota superior de $\{i, j\}$. El producto no depende de la cota escogida. En efecto, si k' fuera otra cota superior de $\{i, j\}$ tendríamos que existe l cota superior de $\{k, k'\}$. De esta forma

$$f_{kl}(f_{ik}(a_i) \cdot f_{jk}(b_j)) = f_{il}(a_i) \cdot f_{jl}(b_j) = f_{k'l}(f_{ik'}(a_i) \cdot f_{jk'}(b_j))$$

por lo que $[f_{ik}(a_i) \cdot f_{jk}(b_j)] = [f_{ik'}(a_i) \cdot f_{jk'}(b_j)]$. Es rutinario ver que el producto no depende de los representantes a_i, b_j y que con esta ley de composición interna, $\varinjlim A_i$ es un grupo. Es inmediato comprobar que si todos los A_i son abelianos, el resultado también lo es.

Además, existen unos morfismos $\phi_j : A_j \rightarrow \varinjlim A_i$, que envían cada elemento x a su clase $[x]$ en el cociente.

Observación A.3.4. El concepto de límite directo se define análogamente para sistemas de conjuntos dirigidos, y el límite directo de conjuntos resulta ser un conjunto.

Definición A.3.5. Sean (A_i, f_{ij}) y (B_i, g_{ij}) dos sistemas de grupos indexados por el mismo conjunto dirigido de índices $(I, \leq)$. Un *morfismo de sistemas de grupos* es una familia de morfismos de grupos $\varphi = (\varphi_i, i \in I)$ ($\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$) tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{f_{ij}} & A_j \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi_j \\ B_i & \xrightarrow{g_{ij}} & B_j \end{array}$$

para cualesquiera $i, j \in I$. Es inmediato comprobar que los sistemas de grupos (indexados por el mismo conjunto de índices) y los morfismos así definidos forman una categoría.

Definición A.3.6. Si (A_i, f_{ij}) y (B_i, g_{ij}) dos sistemas de grupos y $\varphi = (\varphi_i : A_i \rightarrow B_i, i \in I)$ es un morfismo de sistemas de grupos, entonces podemos considerar el siguiente morfismo de grupos

$$\begin{aligned} \varinjlim \varphi_i : \varinjlim A_i &\rightarrow \varinjlim B_i \\ [a_i] &\mapsto [\varphi_i(a_i)], \end{aligned}$$

que está bien definido gracias a la conmutatividad del diagrama. Es rutinario comprobar que respeta la operación del grupo.

Esto mismo es susceptible de ser definido para sistemas de conjuntos dirigidos de forma completamente análoga.

Proposición A.3.7. El límite directo es exacto en el siguiente sentido: Sean (A_i, a_{ij}) , (B_i, b_{ij}) , (C_i, c_{ij}) sistemas de grupos indexados con el mismo conjunto dirigido $(I, \leq)$. Si para cada $i, j \in I$ se tiene que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_i & \longrightarrow & B_i & \longrightarrow & C_i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow a_{ij} & & \downarrow b_{ij} & & \downarrow c_{ij} \\ 0 & \longrightarrow & A_j & \longrightarrow & B_j & \longrightarrow & C_j \longrightarrow 0 \end{array}$$

conmuta y es exacta en las filas, entonces

$$0 \rightarrow \varinjlim A_i \rightarrow \varinjlim B_i \rightarrow \varinjlim C_i \rightarrow 0$$

es exacta.

Corolario A.3.8. El límite directo es un funtor covariante y exacto, de la categoría de sistemas dirigidos de grupos (indexadas por un conjunto dirigido fijo) a la categoría de grupos.

Observación A.3.9. Sea $\varphi : \{A_i\}_i \rightarrow \{B_i\}_i$ un morfismo de sistemas dirigidos de grupos. Sean $\phi_i : A_i \rightarrow \varinjlim A_i$ y $\psi_i : B_i \rightarrow \varinjlim B_i$ las aplicaciones canónicas. Entonces, para cada i , el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\varphi_i} & B_i \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \psi_i \\ \varinjlim A_i & \xrightarrow{\varinjlim \varphi} & \varinjlim B_i \end{array}$$

Ya que si $x \in A_i$ entonces $\varinjlim \varphi \circ \phi_i(x) = \varinjlim([x]) = [\varphi(x)] = \psi_i(\varphi(x))$.

Proposición A.3.10. El límite directo conmuta con la suma directa.

Apéndice B

Implementación del algoritmo de cálculo de grupos de cohomología

B.1 Ejemplo de ejecución I

Consideremos el nervio $N = \{(1), (2), (3), (4), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (2, 4), (2, 3, 4)\}$, que tiene la realización geométrica graficada en [4.2.3](#).

Los conjuntos de símlices son:

- $S_0 = \{(1), (2), (3), (4)\}$
- $S_1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
- $S_2 = \{(2, 3, 4)\}$
- $S_3 = \{\}$

De esta forma, el complejo de cocadenas es

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{d^0} \mathbb{Z}^5 \xrightarrow{d^1} \mathbb{Z}^1 \xrightarrow{d^2} 0.$$

Cálculo de d^0 :

$$\begin{array}{llll} \bar{e}_1 = (1) & (1, 2) & \longrightarrow & (-1)^1 = -1 \\ & (1, 3) & \longrightarrow & (-1)^1 = -1 \\ & (2, 3) & \longrightarrow & 0 \\ & (2, 4) & \longrightarrow & 0 \\ & (3, 4) & \longrightarrow & 0 \end{array} \Rightarrow d^0(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} \bar{e}_2 = (2) & (1, 2) & \longrightarrow & (-1)^0 = -1 \\ & (1, 3) & \longrightarrow & 0 \\ & (2, 3) & \longrightarrow & (-1)^1 = -1 \\ & (2, 4) & \longrightarrow & (-1)^1 = -1 \\ & (3, 4) & \longrightarrow & 0 \end{array} \Rightarrow d^0(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} \bar{e}_3 = (3) & (1, 2) & \longrightarrow & 0 \\ & (1, 3) & \longrightarrow & (-1)^0 = 1 \\ & (2, 3) & \longrightarrow & (-1)^0 = 1 \\ & (2, 4) & \longrightarrow & 0 \\ & (3, 4) & \longrightarrow & (-1)^1 = -1 \end{array} \Rightarrow d^0(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} \bar{e}_4 = (4) & (1, 2) & \longrightarrow & 0 \\ & (1, 3) & \longrightarrow & 0 \\ & (2, 3) & \longrightarrow & 0 \\ & (2, 4) & \longrightarrow & (-1)^0 = 1 \\ & (3, 4) & \longrightarrow & (-1)^0 = 1 \end{array} \Rightarrow d^0(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$d^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de d^1 :

$$\begin{array}{llll} \bar{e}_1 = (1, 2) & (2, 3, 4) & \longrightarrow & 0 \Rightarrow d^1(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \\ \bar{e}_2 = (1, 3) & (2, 3, 4) & \longrightarrow & 0 \Rightarrow d^1(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \\ \bar{e}_3 = (2, 3) & (2, 3, 4) & \longrightarrow & (-1)^2 = 1 \Rightarrow d^1(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \\ \bar{e}_4 = (2, 4) & (2, 3, 4) & \longrightarrow & (-1)^1 = -1 \Rightarrow d^1(e_4) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \\ \bar{e}_5 = (3, 4) & (2, 3, 4) & \longrightarrow & (-1)^0 = 1 \Rightarrow d^1(e_5) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Por lo que

$$d^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y $d^2 = 0$.

Con esto tenemos el complejo de cocadenas perfectamente definido y podemos introducirlo en Sage-Math:

```
[1]: from sage.homology.chain_complex import ChainComplex
d0 = matrix(ZZ, [[-1,1,0,0],[-1,0,1,0],[0, -1, 1, 0],[0,-1,0,1],[0,0,-1,1]])
d1 = matrix(ZZ, [0,0,1,-1,1])
complex1 = ChainComplex([4,d0,5,d1,1])
```

```
[2]: ascii_art(complex1)
```

```
[2]:
          [-1  1  0  0]
          [-1  0  1  0]
          [ 0 -1  1  0]
          [ 0 -1  0  1]
          [ 0  0 -1  1]
    [ 0  0  1 -1  1]
0 <-- C_2 <----- C_1 <----- C_0 <-- 0
```

```
[3]: complex1.homology()
```

```
[3]: {0: Z, 1: Z, 2: 0}
```

Es decir,

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \check{H}^2(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) = 0,$$

que coincide con la cohomología de S^1 ya calculada.

B.2 Ejemplo de ejecución II y código en SageMath

En este ejemplo vamos a calcular la cohomología del plano proyectivo real (para el haz $\mathbb{Z}$) usando la triangulación dada en la figura 4.3. Este caso, por ser notablemente más laborioso, lo ejecutamos usando un código implementado en SageMath, que sirve para cualquier complejo simplicial finito.

```
[1]: #importamos la librería para trabajar con complejos de (co)cadenas
from sage.homology.chain_complex import ChainComplex
#definimos las funciones para trabajar con el complejo simplicial
def dimension(N):
    '''retorna la dimensión del complejo'''
    out = 0
    for s in N:
        if len(s)>out: out = len(s)
    return out-1

def sorter1(N):
    '''retorna un diccionario con los simples agrupados por dimensión'''
    d = dimension(N)
    Simples = {}
    for i in range(0,d+1):
        i_simplices = []
        for s in N:
            if len(s)==i+1: i_simplices.append(s)
        Simples[i]=sorted(i_simplices)
    return Simples

def dk_matrix(k,N,simplices):
    '''retorna la matriz del k-ésimo operador cobordismo'''
    M=zero_matrix(len(simplices[k+1]),len(simplices[k]))
    for i in range(0,len(simplices[k])):
        for j in range(0,len(simplices[k+1])):
            if set(simplices[k][i]).issubset(set(simplices[k+1][j])):
                for p in range(0, len(simplices[k+1][j])):
                    if simplices[k+1][j][p] not in simplices[k][i]:
                        M[j,i] = (-1)**p
                        break
            else: M[j,i]=0
    return M
```

```
[2]: #los simples se representan con tuplas (ordenadas)
#plano proyectivo
N_0 = [(1,),(2,),(3,),(4,),(5,),(6,)]
N_1 = □
    ↪ [(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)]
N_2 = □
    ↪ [(1,2,4),(1,2,6),(1,3,4),(1,3,5),(1,5,6),(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(3,4,6),(4,5,6)]
N=N_0+N_1+N_2
simplices=sorter1(N)

differentials = []
for i in range(0,dimension(N)):
    differentials.append(dk_matrix(i,N,simplices))
```

```
complex1 = ChainComplex(differentials)
```

```
[3]: ascii_art(complex1)
```

```
[3]:
```

```

      [ 1  0 -1  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0]
      [ 1  0  0  0 -1  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0]
      [ 0  1 -1  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0]
      [ 0  1  0 -1  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0]
      [ 0  0  0  1 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1]
      [ 0  0  0  0  0  1  0 -1  0  0  1  0  0  0  0]
      [ 0  0  0  0  0  1  0  0 -1  0  0  1  0  0  0]
      [ 0  0  0  0  0  0  1 -1  0  0  0  0  1  0  0]
      [ 0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0 -1  0  1  0]
      [ 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1 -1  1]
0 <-- C_2 <----- C_1

[-1  1  0  0  0  0]
[-1  0  1  0  0  0]
[-1  0  0  1  0  0]
[-1  0  0  0  1  0]
[-1  0  0  0  0  1]
[ 0 -1  1  0  0  0]
[ 0 -1  0  1  0  0]
[ 0 -1  0  0  1  0]
[ 0 -1  0  0  0  1]
[ 0  0 -1  1  0  0]
[ 0  0 -1  0  1  0]
[ 0  0 -1  0  0  1]
[ 0  0  0 -1  1  0]
[ 0  0  0 -1  0  1]
[ 0  0  0  0 -1  1]
<----- C_0 <-- 0
```

```
[4]: complex1.homology()
```

```
[4]: {0: Z, 1: 0, 2: C2}
```

Bibliografía

- [1] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [2] Jean Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology 1900–1960*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2009. Reprint of the 1989 edition [MR0995842].
- [3] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. *Foundations of algebraic topology*, volume 2193. Princeton University Press, 1952.
- [4] Guillermo Gallego. Introducción a la teoría de hodge no abeliana. <https://guillego.xyz/files/noabeliana.pdf>, 2020. [Online; accessed 14-June-2024].
- [5] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, 1994.
- [6] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2013.
- [7] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University, 2005.
- [8] Thorgott (<https://math.stackexchange.com/users/422019/thorgott>). Induced morphism in Čech cohomology. Mathematics Stack Exchange. URL:<https://math.stackexchange.com/q/4934416> (version: 2024-06-18).
- [9] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on Manifolds: With a Short History. «Les débuts de la théorie des faisceaux»*. By Christian Houzel. Springer, 1990.
- [10] Emilio Lluis-Puebla. *Álgebra homológica, cohomología de grupos y k-teoría algebraica clásica*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.
- [11] Haynes Miller. Leray in oflag xviii: the origins of sheaf theory, sheaf cohomology, and spectral sequences. *Kantor 2000*, pages 17–34, 2000.
- [12] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer Science & Business Media, 1989.
- [13] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media, 1983.

-
- [14] Torsten Wedhorn. *Manifolds, sheaves, and cohomology*. Springer, 2016.
-

Agradecimientos

Me gustaría agradecer primero a Guillermo Sánchez Arellano y Guillermo Gallego Sánchez, por su infinita paciencia y vocación matemática. A Gabriel Abánades por la ayuda prestada con sus amplísimos conocimientos sobre teoría de cohomología. A (todos) mis profesores: los buenos y los malos, que me han ayudado a forjar (por las buenas y por las malas) lo que soy hoy. Y, por último, a mi familia y amigos, por hacerme sentir siempre arropado con su cariño tan sincero.