EL SISTEMA DE HITCHIN

GUILLERMO GALLEGO

El origen de nuestro problema se encuentra en algunas de las ecuaciones fundamentales de la Física: las ecuaciones de Yang–Mills. En el caso más simple en el que el "grupo gauge" es abeliano ($\mathbb{R}$ ó $U(1)$), las ecuaciones de Yang–Mills son las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{cases} dF = \mu_0 J, \\ d \star F = 0, \end{cases}$$

donde F es el campo electromagnético, J contiene información de las cargas y las corrientes, d es la diferencial exterior y $\star$ es el operador "estrella de Hodge".

Estas ecuaciones pueden considerarse sobre cualquier variedad Riemanniana, en particular, sobre X una superficie de Riemann de género g. Más generalmente, pueden considerarse las *ecuaciones de Yang–Mills* en X. El contexto es el de un $U(n)$-fibrado principal $E \to X$. Una conexión A en E se dice de *Yang-Mills* si su curvatura F_A resuelve la ecuación análoga

$$d \star F_A = 0.$$

El *teorema de Narasimhan–Seshadri* identifica el espacio de móduli de las conexiones de Yang–Mills con el espacio de móduli de fibrados holomorfos estables de rango n en X.

Una generalización de estas ecuaciones son las *ecuaciones de Hitchin.* De nuevo, el contexto es el de un $U(n)$-fibrado principal $E \to X$, pero ahora también consideramos un *campo de Higgs* $\varphi \in \Omega^{0,1}(X, \mathfrak{u}_E)$. Un par (E, φ) de esta forma es una *solución a las ecuaciones de Hitchin* si

$$\begin{cases} F_A + [\varphi, \varphi^\dagger] = 0 \\ \bar{\partial}_A \varphi = 0. \end{cases}$$

Hitchin demostró que el espacio de móduli $\mathcal{M}$ de las soluciones a estas ecuaciones se identifica con el espacio de móduli de los *fibrados de Higgs estables* de rango n. Estos objetos están dados por pares $(\mathcal{E}, \varphi)$, donde $\mathcal{E}$ es un fibrado holomorfo en X y $\varphi \in H^0(X, \mathcal{E} \otimes K_X)$, siendo K_X el fibrado canónico en X.

Hitchin encontró una forma de construir fibrados de Higgs, y, por tanto, soluciones a las ecuaciones de Hitchin, mediante el sistema de Hitchin, una aplicación $h : \mathcal{M} \to \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es un espacio vectorial. Resulta que las fibras de esta aplicación son variedades abelianas, ya que se corresponden con las jacobianas de ciertas *curvas espectrales.*

En mi tesis consideramos varias generalizaciones del sistema de Hitchin a distintas situaciones que comentaremos en la charla.