Espacios de móduli y estructuras geométricas

3 de julio de 2023

PhDay — Matemáticas UCM

Guillermo Gallego

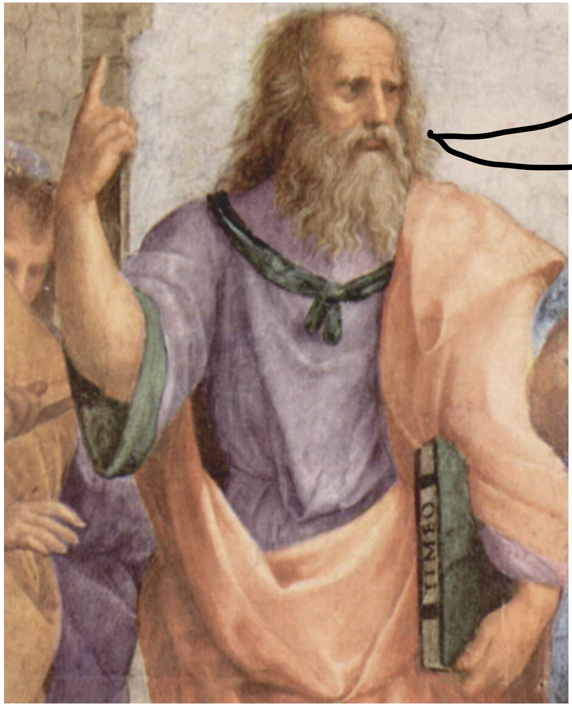
Problemas de clasificación

- Problema "<u>tradicional</u>".

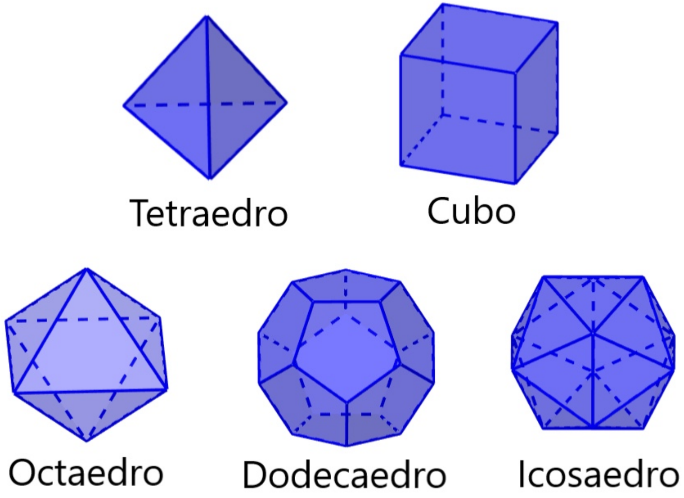
- Formulación moderna:

$$\{\text{Objetos de una categoría}\}/\text{isomorfismo}$$

Ejemplo 1 : Los sólidos platónicos



Son éstos:



Ejemplo 2 : Espacios vectoriales de dim $< \infty$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Espacios vectoriales} \\ \text{de dim} < \infty \end{array} \right\} \Big/ \text{iso.} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$$

$$V \longmapsto \dim V$$

Ejemplo 3 : Clasificación de las superficies compactas

$\Sigma_0 \cong S^2, \quad \Sigma_1 \cong T^2, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3, \ldots$

$g=0 \qquad g=1 \qquad g=2 \qquad g=3$

Orientables

(g = género = nº de asas)

No orientables

(k = número de "crosscaps")

$k=0 \qquad k=1 \qquad k=2$

$X_1 \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, $X_2 \cong$ Botella de Klein, ...

Espacios de móduli

- A veces, el problema de clasificación es "tan rico" que la propia "lista" tiene una estructura geométrica natural.

El espacio de móduli de Riemann

- C curva proyectiva compleja.
- C es homeomorfa a Σ_g, g = género de C.
- $$\mathcal{M}_g = \{\text{curvas proyectivas complejas de género } g\}/\text{iso.}$$

tiene una estructura geométrica natural

Mantra

- Usar los espacios de móduli para "tender puentes"

entre:

- geometría algebraica
- EDPs
- geometría diferencial
- topología algebraica

Esquema general

$$\mathcal{M} = \{\text{soluciones a cierta EDP}\}/\text{"gauge"}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{objetos}\\ \text{algebraicos}\end{matrix}\right\}/\text{iso.} \xleftrightarrow{\sim} \mathcal{M} \xleftrightarrow{\sim} \left\{\begin{matrix}\text{objetos}\\ \text{geométrico-diferenciales}\end{matrix}\right\}/\text{iso} \xleftrightarrow{\sim} \begin{matrix}\text{invariante}\\ \text{topológico}\end{matrix}$$

GEOMETRÍA ALGEBRAICA

EDPs

GEOMETRÍA DIFERENCIAL

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

Ejemplo "de juguete": La teoría de Hodge

- C curva proyectiva compleja de género g.
- K_C = divisor canónico de C.

$$\Gamma(C, K_C) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{1-formas} \\ \text{armónicas} \\ \text{en } C \end{array} \right\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} H^1_{\text{de Rham}}(C) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} H^1(C, \mathbb{R})$$

GEOMETRÍA ALGEBRAICA — EDPs — GEOMETRÍA DIFERENCIAL — TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

(todos estos espacios son isomorfos a $\mathbb{R}^{2g}$).

La teoría de Hodge no abeliana

- C curva proyectiva compleja.
- $$\mathcal{M}_{\text{Hitchin}} = \left\{ (A,\varphi) \;\middle|\; \underbrace{\begin{array}{l} F_A + [\varphi,\varphi^*] = \lambda\,\omega_C \\ \bar{\partial}_A \varphi = 0 \end{array}}_{\text{Ecuaciones de Hitchin}} \right\} \Big/ \text{gauge}$$

$$\left\{ \begin{array}{c}\text{fibrados}\\ \text{de Higgs}\end{array} \right\} \Big/ \text{iso} \longleftrightarrow \mathcal{M}_{\text{Hitchin}} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c}\text{fibrados}\\ \text{planos}\end{array} \right\} \Big/ \text{iso.} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c}\text{Representaciones}\\ \text{lineales de}\\ \pi_1(C)\end{array} \right\} \Big/ \text{iso.}$$

GEOMETRÍA ALGEBRAICA

EDPs

GEOMETRÍA DIFERENCIAL

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

En mi tesis ...

- C curva proyectiva compleja, $Y = S^1 \times C$.
- $\mathcal{M}_{\text{Monopolos}} = \left\{ \begin{array}{l} U(n)\text{-Monopolos} \\ \text{de tipo Dirac} \end{array} \right\} \Big/ \text{gauge}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{fibrados} \\ \text{mini-holomorfos en } Y \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{(Charbonneau-Hurtubise)}} \mathcal{M}_{\text{Monopolos}} \longleftrightarrow \;??\; \longleftrightarrow \;??$

$\Big\updownarrow \wr$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{fibrados de Higgs} \\ \text{multiplicativos en } X \end{array} \right\}$

GEOMETRÍA ALGEBRAICA

EDPs

GEOMETRÍA DIFERENCIAL

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

En mi tesis ...

- C curva proyectiva compleja, $Y = S^1 \times C$.
- $\mathcal{M}_{\text{Monopolos}} = \left\{ \begin{array}{l} U(n)\text{-Monopolos} \\ \text{de tipo Dirac} \end{array} \right\} / \text{gauge}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{filtrados} \\ \text{mini-holomorfos en } Y \end{array} \right\}$ $\longleftrightarrow$ (Charbonneau - Hurtubise) $\mathcal{M}_{\text{Monopolos}}$

$\Big\updownarrow \sim$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{filtrados de Higgs} \\ \text{multiplicativos en } X \end{array} \right\}$

GEOMETRÍA ALGEBRAICA

EDPs

PROBLEMA

$\longleftrightarrow$?? $\longleftrightarrow$??

GEOMETRÍA DIFERENCIAL

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

TRABAJO EN PROGRESO CON O. GARCÍA-PRADA Y J. HURTUBISE


GRACIAS!!!