Teoría *gauge* y geometría algebraica

25 de abril de 2024

GT FUTURE — Matemáticas UCM

Guillermo Gallego

Te han enseñado **MAL**

Análisis Complejo

Función holomorfa: Definición CRINGE

$f : U \overset{\text{abr.}}{\subset} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si

$\forall z_0 \in U$ existe

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} .$$

<u>IDEA</u>: Holomorfa = $\mathbb{C}$-análogo de diferenciable.

Las funciones holomorfas son ANALÍTICAS

$\boxed{\text{Principio de identidad}}$

"INESPERADA" RIGIDEZ DE LA GEOMETRÍA COMPLEJA

Veamos algunos ejemplos...

- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa + acotada $\Rightarrow f$ constante

- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa + $|f(z)| \leq C(1+|z|^n),\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow f$ polinomio, $\deg f \leq n$

Principio GAGA

Polinomios $\equiv$ Funciones holomorfas + cond. de frontera

Principio GAGA

Geometría Algebraica = Geometría compleja + cond. de contorno

Ejemplos de GAGA

- Funciones meromorfas en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ $\equiv$ Funciones racionales en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

- Esfera de Riemann $\equiv$ $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

- Superficies de Riemann $\equiv$ Curvas algebraicas

- <u>Teorema de Chow</u>:

$$\underset{\substack{\text{subvariedad}\\ \text{analítica}/\mathbb{C}}}{\mathcal{X}} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \implies \exists \underset{\substack{\text{subvariedad}\\ \text{algebraica}/\mathbb{C}}}{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \text{ t.q. } \boxed{\mathcal{X} = X^{an}}$$

GAGA de Serre

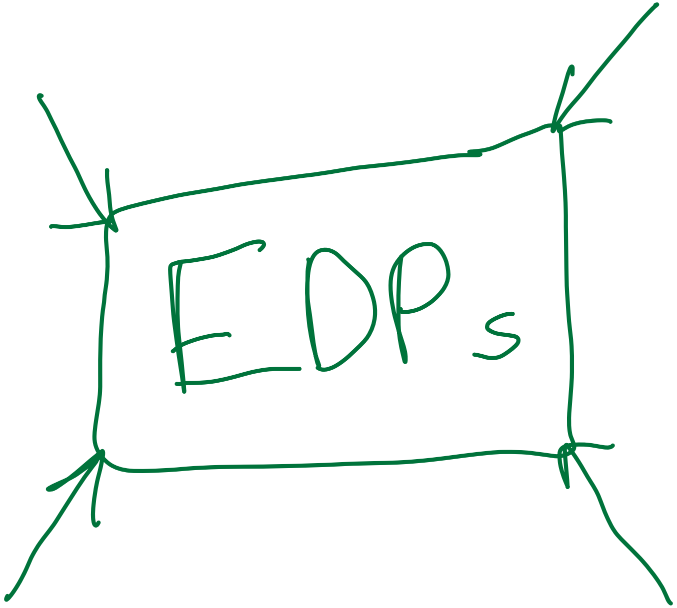
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Haces } \underline{\text{coherentes}} \text{ algebraicos} \\ \text{en } \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Analitificación}} \left\{ \begin{array}{c} \text{Haces coherentes analíticos} \\ \text{en } \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \end{array} \right\}$$

$\boxed{\text{Eq. de categorías}}$

tal que

$$H^n(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \mathcal{F}^{an}).$$

[Engloba todo lo anterior].


EDPs

Función holomorfa. Definición BUENA

$f : U \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si verifica las

ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \partial_x u - \partial_y v = 0 \\ \partial_x v + \partial_y u = 0 . \end{cases}$$

$\left(f(x,y) = u(x,y) + i\, v(x,y) \right).$

Funciones armónicas

- $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica si

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 .$$

- $f = u + iv$ holomorfa $\Rightarrow$ u, v armónicas

- u armónica $\Rightarrow$ $\exists f$ holomorfa t.q. $u = \mathrm{Re}(f)$.

{funciones holomorfas} $\longleftrightarrow$ {funciones armónicas} $\leftrightarrow$ $\boxed{\text{Teoría gauge de rango 1}}$

$\parallel$

$\boxed{\text{ELECTROMAGNETISMO}}$

GAGA reinterpretado

polinomios $\equiv$ funciones holomorfas + cond. frontera $\equiv$ funciones armónicas + cond. frontera $\equiv$ Teoría gauge

$$\boxed{\text{Geometría algebraica} \equiv \text{Teoría gauge}}$$

Teoría de Hodge / Teoría gauge abeliana

- C curva proyectiva compleja lisa.
- $S := |C|$ superficie diferenciable
- $\Gamma(C, K_C) := \{$1-formas algebraicas en $C\}$

<u>Teorema</u> $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(C, K_C) = \text{género}(S)$

-<u>Dem.</u> $\Gamma(C, K_C) \leftrightarrow \{$1-formas armónicas en $S\} \overset{\text{T}^{\text{a}}\text{ Hodge}}{\longleftrightarrow} H^1(S, \mathbb{R})$.

Teoría gauge no abeliana I

- S superficie diferenciable.
- $E \longrightarrow S$ fibrado vectorial complejo de rango r trivial ($E \cong S \times \mathbb{C}^r$).
- H métrica hermítica en E.

espacio de móduli

$$\mathcal{M} := \{A \text{ conexión } H\text{-unitaria} \mid F_A = 0\} / \text{gauge} = \{A \text{ conexión } H\text{-unitaria de Yang-Mills}\} / \text{gauge}$$

OBS $\mathcal{M}$ es un invariante topológico:

Frobenius

$$\mathcal{M} \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(S), U(r)) / U(r).$$

Teoría gauge no abeliana II

espacio de móduli

$$\mathcal{M} := \{A \text{ conexión } H\text{-unitaria} \mid F_A = 0\} / \text{gauge} = \{A \text{ conexión } H\text{-unitaria de Yang-Mills}\} / \text{gauge}$$

Teorema (Narasimhan - Seshadri)

Sea C curva proyectiva compleja lisa con $|C| = S$.

$$\mathcal{M} \longleftrightarrow \{\text{fibrados algebraicos estables de rango } r \text{ y grado } 0\} / \text{iso.}$$

Teoría gauge no abeliana III

Correspondencias de "Hitchin-Kobayashi"

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{soluciones a ecuaciones} \\ \text{de teoría gauge} \end{array} \right\} \Big/ \text{gauge} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{objetos algebraicos} \\ \text{"estables"} \end{array} \right\} \Big/ \text{iso.}$$

Ejemplos:

- "dim < ∞": Kempf-Ness.
- Narasimhan-Seshadri ⇝ Donaldson, Uhlenbeck-Yau.
- sols. ecuaciones de Hitchin ⟷ fibrados de Higgs [Hitchin-Simpson]
- monopolos ⟷ fibrados mini-holomorfos [Charbonneau-Hurtubise]

Teoría de Hodge no abeliana

- A veces, también tenemos correspondencias

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{soluciones} \\ \text{ecs. gauge} \end{array} \right\} \Big/ \text{iso} \longleftrightarrow \text{invariante topológico}$$

Ejs.

$$\{\text{1-formas armónicas}\} \xleftrightarrow{\text{Hodge}} H^1(S, \mathbb{R})$$

$$\{\text{conexiones YM}\}/\text{gauge} \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(S), U(n))/U(n)$$

$$\{\text{soluciones ecs. Hitchin}\}/\text{gauge} \xleftrightarrow{\text{Donaldson-Corlette}} \mathrm{Hom}(\pi_1(S), GL_n(\mathbb{C}))/GL_n(\mathbb{C})$$

Estructuras complejas

$$\left\{\begin{matrix}\text{sols. ecs.}\\ \text{Hitchin}\end{matrix}\right\} \Big/ \text{gauge}$$

$$\|$$

$\mathcal{M}_H \longleftarrow$ estructura hiperkähleriana (I, J, K)

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M}_H \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \mathcal{M}_{Dol} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Difeomorfismo}"] & & \mathcal{M}_B \end{tikzcd}$$

$\uparrow$ NO BIHOLOMORFISMO

$\{\text{fibrados de Higgs}\}/\text{iso.} = \mathcal{M}_{Dol}$

$\mathcal{M}_{Dol} \uparrow$ estructura compleja I

$\mathcal{M}_B = \operatorname{Hom}(\pi_1(S), GL_n(\mathbb{C}))/\!/GL_n(\mathbb{C})$

$\mathcal{M}_B \uparrow$ estructura compleja J

NAHT para monopolos ??

$\{\text{monopolos}\}/\text{gauge} = \mathcal{M} \longleftarrow$ estructura hiperkähleriana (I, J, K)

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \mathcal{M}_{\text{miniHol}} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \boxed{???} \end{tikzcd}$$

$\{\text{fibrados miniHolom.}\}/\text{iso.} = \mathcal{M}_{\text{miniHol}}$

$\mathcal{M}_{\text{miniHol}} \longleftarrow$ estructura compleja I

$\boxed{???} \longleftarrow$ Trabajo en curso con García-Prada y Hurtubise


GRACIAS!!!