LA ÓPERAD $\mathbb{E}_n$

GUILLERMO GALLEGO

1. Óperads en categorías monoidales

[Aquí, seguimos a Getzler-Jones [GJ94]]

1.1. Comenzamos considerando una categoría monoidal simétrica $\mathcal{S}$ con producto tensorial $\otimes$ y unidad $\mathbb{I}$. Suponemos además que $\mathcal{S}$ tiene límites y colímites pequeños, y que para todo objeto X de $\mathcal{S}$, el functor $X \otimes -$ preserva los colímites. En particular, la categoría $\mathcal{S}$ tiene un objeto inicial, que denotamos por 0, y un coproducto, que denotamos por $\oplus$. Los ejemplos típicos de $\mathcal{S}$ serán

- La categoría **Top** de espacios topológicos, donde el producto tensorial es simplemente el producto cartesiano (decimos entonces que se trata de una *categoría cartesiana*) y el coproducto es la unión disjunta.
- La categoría $\mathbf{Chain}_K$ de complejos de cadenas sobre un cuerpo K, donde el producto tensorial es el producto tensorial graduado y el coproducto es la suma directa.

1.2. El *grupoide simétrico* $\mathfrak{S}$ es el grupoide cuyos objetos son los conjuntos finitos, incluyendo el conjunto vacío, y cuyos morfismos son las biyecciones entre conjuntos. Como es habitual, denotamos $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, y denotamos por $k = (k-1) \cup \{k-1\} = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ al ordinal de k elementos. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{S}}(k) = \mathfrak{S}_k$ es el k-ésimo grupo simétrico.

1.3. Un $\mathfrak{S}$-*módulo* en $\mathcal{S}$ es un functor $\mathbb{P} : \mathfrak{S} \to \mathcal{S}$. Dicho functor determina una sucesión $\mathbb{P} = \{\mathbb{P}(k) : k \in \mathbb{N}\}$ de objetos $\mathbb{P}(k)$ de $\mathcal{S}$, cada uno de ellos equipado con la acción del grupo simétrico $\mathfrak{S}_k$, es decir, con un homomorfismo de grupos

$$\mathfrak{S}_k \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{S}}(\mathbb{P}(k)).$$

Podemos recuperar el functor $\mathbb{P}$ de esta sucesión si, para cada conjunto finito I, con cardinal $k = |I|$, definimos $\mathbb{P}(I)$ como el colímite

$$\mathbb{P}(I) = \left[\bigoplus_{f \in \mathrm{Biy}(k, I)} \mathbb{P}(k) \right]_{\mathfrak{S}_k}.$$

Date: Última versión: 19 de mayo de 2026.

1.4. Denotamos por $\mathcal{S}^{\mathfrak{S}} = \mathbf{Fun}(\mathfrak{S}, \mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ la subcategoría formada por los $\mathfrak{S}$-módulos en $\mathcal{S}$. A su vez, esta categoría posee una estructura monoidal, dada por la operación de *composición*

$$\circ : \mathcal{S}^{\mathfrak{S}} \times \mathcal{S}^{\mathfrak{S}} \to \mathcal{S}^{\mathfrak{S}},$$

definida como sigue. Para cada par de $\mathfrak{S}$-módulos $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$, y para cada conjunto finito I, definimos

$$\mathbb{P}_1 \circ \mathbb{P}_2(I) = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_1(r) \otimes_{\mathfrak{S}_r} \left[\bigoplus_{f:I\to r} \bigotimes_{i\in r} \mathbb{P}_2(f^{-1}(i)) \right].$$

Esta estructura de composición es compatible con el *functor de Schur*

$$\mathrm{Schur} : \mathcal{S}^{\mathfrak{S}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{Cat}}(\mathcal{S}),$$

que envía cada $\mathfrak{S}$-módulo $\mathbb{P}$ al functor que asocia cada objeto X de $\mathcal{S}$ al $\mathfrak{S}$-módulo

$$\mathrm{Schur}(\mathbb{P})(X) = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(r) \otimes_{\mathfrak{S}_r} X^{\otimes r}.$$

Lo que esto quiere decir es que existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{Schur}(\mathbb{P}_1 \circ \mathbb{P}_2) \cong \mathrm{Schur}(\mathbb{P}_1) \circ \mathrm{Schur}(\mathbb{P}_2),$$

de modo que el functor de Schur es *monoidal.*

1.5. Definición. Una *óperad simétrica en $\mathcal{S}$* es un monoide en $\mathcal{S}^{\mathfrak{S}}$, esto es, un $\mathbb{S}$-objeto $\mathbb{P}$ junto con dos morfismos $\gamma : \mathbb{P}\circ\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ y $\eta : \mathbb{I} \to \mathbb{P}$ que satisfacen los axiomas de asociatividad y unidad, respectivamente.

1.6. Nótese que un morfismo $\gamma : \mathbb{P} \circ \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ está determinado por una colección de morfismos

$$\mathbb{P}(r) \otimes \mathbb{P}(k_1) \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}(k_r) \to \mathbb{P}(k_1 + \cdots + k_r),$$

cada uno de ellos determinado por la partición de $k = k_1 + \cdots + k_r$, esto es, determinado por la función $f : k \to r$ con

$$\begin{cases} f(i) = 0 \text{ si } i < k_1, \\ f(i) = s \text{ si } \sum_{j=1}^{s} k_j \leq i < \sum_{j=1}^{s+1} k_j. \end{cases}$$

1.7. Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ es una *categoría enriquecida en $\mathcal{S}$* si para cualesquiera dos objetos X e Y de $\mathcal{C}$, la colección $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un objeto de $\mathcal{S}$, de modo que las identidades corresponden a morfismos $\mathrm{id}_X : \mathbb{I} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ y las composiciones están dadas por morfismos $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$.

1.8. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una categoría enriquecida en $\mathcal{S}$ y que también tiene una estructura monoidal simétrica. Es decir, $\mathcal{C}$ está a su vez equipada con un producto tensorial y una unidad, compatibles con la estructura enriquecida, que también denotamos por $\otimes$ e $\mathbb{I}$. En tal caso, a cada objeto X de $\mathcal{C}$ se le puede asociar una óperad simétrica $\mathrm{Op}(X)$ en $\mathcal{S}$, definida como

$$\mathrm{Op}(X)(k) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes k}, X),$$

donde $\mathfrak{S}_k$ actúa por permutación.

1.9. Un *álgebra sobre* $\mathbb{P}$, o equivalentemente, una $\mathbb{P}$-*álgebra* en $\mathcal{C}$ está dada por un objeto X de $\mathcal{C}$ junto con un morfismo de óperads simétricas en $\mathcal{S}$

$$\mathbb{P} \to \mathrm{Op}(X).$$

2. La óperad de discos pequeños

[Aquí, seguimos a Fresse [Fre17]].

2.1. Vamos a construir una familia de óperads $\mathbb{D}_n$, para $n \in \mathbb{N}$, en **Top**, llamadas las *óperads de discos pequeños*. Una $\mathbb{E}_n$-óperad será cualquier óperad en **Top** que sea débilmente homotópicamente equivalente a $\mathbb{D}_n$. Así, también podríamos considerar otras óperads relacionadas como la de los *cubos pequeños* o la dada por espacios de configuración de puntos en D^n (ver más abajo).

2.2. Denotamos por

$$D^n = \{t \in \mathbb{R}^n : \|t\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

la bola cerrada unidad, y por $B^n \subset D^n$ su interior. Un n-*disco pequeño* es una inmersión afín

$$c : D^n \to D^n : t \mapsto a + Rt,$$

para algún punto $a \in D^n$ y algún $R > 0$ con $R^2 \leq 1 - \|a\|^2$.

2.3. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, definimos

$$\mathbb{D}_n(k) = \{\underline{c} = (c_1, \ldots, c_k) : c_i : D^n \to D^n, c_i(B^n) \cap c_j(B^n) = \emptyset,\ i \neq j\},$$

aquí, cada c_i es un n-disco pequeño. Estos conjuntos $\mathbb{D}_n(k)$ admiten una topología natural, que puede definirse o bien como subespacio del espacio de aplicaciones continuas $\coprod_{i=1}^k D^n \to D^n$, equipado con la topología compacto-abierto, o bien directamente usando los a_i y los R_i de cada disco pequeño c_i. La primera descripción resulta más conveniente para estudiar espacios de lazos iterados, mientras que la segunda es la adecuada para estudiar espacios de configuración.

El grupo simétrico $\mathfrak{S}_k$ actúa en el espacio $\mathbb{D}_n(k)$ por permutación

$$\sigma \cdot \underline{c} = (c_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, c_{\sigma^{-1}(k)}).$$

El espacio $\mathbb{D}_n(1)$ consta de un solo elemento, la identidad id_{D^n}. Finalmente, dados k y l, para cada $i = 1, \ldots, k$, tenemos una operación de composición

$$\circ_i : \mathbb{D}_n(k) \times \mathbb{D}_n(l) \longrightarrow \mathbb{D}_n(k + l - 1),$$

definida como

$$\underline{a} \circ \underline{b} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i \circ b_1, \ldots, a_i \circ b_l, a_{i+1}, \ldots, a_k).$$

La idea es "meter" la colección de discos pequeños $\underline{b}$ dentro del disco pequeño a_i.

2.4. Se define la *óperad de n-discos pequeños* como la óperad simétrica $\mathbb{D}_n$ determinada por la sucesión

$$\{\mathbb{D}_n(k) : k \in \mathbb{N}\}.$$

3. $\mathbb{E}_n$-ÁLGEBRAS

3.1. Dada cualquier categoría monoidal simétrica $\mathcal{C}$ enriquecida en **Top** (también llamadas categorías topológicas), podemos considerar una $\mathbb{D}_n$-álgebra en $\mathcal{C}$.

3.2. Recordemos que cualquier $(\infty, 1)$-categoría $\mathcal{C}$ puede verse como una categoría topológica $\mathcal{C}^{\mathrm{top}}$ de la siguiente manera: para cualesquiera dos objetos X e Y, tenemos un conjunto simplicial $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, y podemos tomar su realización topológica.

Destacamos los siguientes casos:

- Si $\mathcal{C}$ es cualquier categoría localmente pequeña usual (por ejemplo, **Sets** o $\mathbf{Vect}_K$), podemos verla como una $(\infty, 1)$-categoría y, por tanto, como una categoría topológica, tomando su nervio. Más directamente, esto consiste simplemente en dotar cada conjunto de morfismos de la topología discreta.
- Podemos construir una $(\infty, 1)$-categoría **Cat**, cuyos objetos son las categorías usuales localmente pequeñas, tomando, para cada dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, como conjunto simplicial $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ el nervio de la categoría de functores $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, cuyos objetos son functores $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y cuyos morfismos son transformaciones naturales entre functores.

3.3. Una $\mathbb{D}_n$-álgebra en una $(\infty, 1)$-categoría monoidal simétrica $\mathcal{C}$ es un objeto A de $\mathcal{C}$ junto con un morfismo de óperads

$$\mathbb{D}_n \longrightarrow \mathrm{Op}(A),$$

donde $\mathrm{Op}(A)$ es la óperad asociada a A como objeto de la categoría topológica $\mathcal{C}^{\mathrm{top}}$.

Tomando el ∞-grupoide fundamental en el morfismo anterior, obtenemos, para cada $k \in \mathbb{N}$, un morfismo de conjuntos simpliciales

$$\pi_\infty(\mathbb{D}_n(k)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A^{\otimes k}, A).$$

Esto motiva la siguiente definición.

3.4. Definición. Una $\mathbb{E}_n$-álgebra en una $(\infty, 1)$-categoría monoidal simétrica $\mathcal{C}$ es un objeto A de $\mathcal{C}$ junto con una sucesión de morfismos de conjuntos simpliciales

$$\left\{\pi_\infty(\mathbb{D}_n(k)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A^{\otimes k}, A) : k \in \mathbb{N}\right\},$$

con ciertas condiciones de compatibilidad proveniente de la combinatoria de la óperad $\mathbb{D}_n$.

Distinguimos los siguientes casos:

- Una $\mathbb{E}_n$-álgebra en una categoría monoidal simétrica usual localmente pequeña $\mathcal{C}$ es un objeto A de $\mathcal{C}$ junto con una sucesión de aplicaciones
$$\left\{\pi_0(\mathbb{D}_n(k)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A^{\otimes k}, A) : k \in \mathbb{N}\right\},$$
con ciertas condiciones de compatibilidad proveniente de la combinatoria de la óperad $\mathbb{D}_n$.
- Una $\mathbb{E}_n$-álgebra en **Cat** es una categoría usual localmente pequeña $\mathcal{C}$ junto con una sucesión de functores
$$\left\{\pi_{\leq 1}(\mathbb{D}_n(k)) \to \mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\times k}, \mathcal{C}) : k \in \mathbb{N}\right\},$$
con ciertas condiciones de compatibilidad proveniente de la combinatoria de la óperad $\mathbb{D}_n$. Aquí, $\pi_{\leq 1}$ denota el (1-)grupoide fundamental.

3.5. $\mathbb{E}_1$-álgebras. Un 1-disco es un intervalo. Dos colecciones $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ y $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ pueden conectarse por un camino en $\mathbb{D}_1(k)$ si y sólo si las tuplas de puntos $(a_1(0), \ldots, a_k(0))$ y $(b_1(0), \ldots, b_k(0))$ están en el mismo orden. Por tanto, $\pi_0(\mathbb{D}_1(k)) = k!$.

Veamos entonces lo que es una $\mathbb{E}_1$-álgebra en **Cat**. El functor $\pi_{\leq 1}(\mathbb{D}_1(0)) \to \mathbf{Fun}(0, \mathcal{C})$ determina una unidad $\mathbb{I} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. El functor $\pi_{\leq 1}(\mathbb{D}_1(1)) \to \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ envía la identidad a la identidad. El morfismo $\pi_{\leq 1}(\mathbb{D}_1(2)) \to \mathbf{Fun}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$ determina un producto $\gamma : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $(A, B) \mapsto A \otimes B$, así como isomorfismos naturales entre los functores $A \mapsto \mathbb{I} \otimes A$, $A \mapsto A \otimes \mathbb{I}$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. A su vez, el morfismo $\pi_{\leq 1}(\mathbb{D}_1(3)) \to \mathbf{Fun}(\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}, \mathcal{C})$ asocia a cada colección de discos pequeños (c_1, c_2, c_3) un functor $\mathcal{C}^{\times 3} \to \mathcal{C}$, de modo que si dos colecciones están conectadas en $\mathbb{D}_1(3)$, hay un isomorfismo natural entre los correspondientes functores. En particular, se obtiene un isomorfismo natural entre los functores $(A, B, C) \mapsto (A \otimes B) \otimes C$ y $(A, B, C) \mapsto A \otimes (B \otimes C)$. Juntando todo, obtenemos que una $\mathbb{E}_1$-álgebra en **Cat** es una categoría monoidal.

Siguiendo esta lógica, uno comprueba fácilmente que, si $\mathcal{C}$ es una categoría usual monoidal simétrica, una $\mathbb{E}_1$-álgebra en $\mathcal{C}$ es lo mismo que un *monoide* en $\mathcal{C}$. Es decir, es un objeto A de $\mathcal{C}$ junto con una unidad $1 : \mathbb{I} \to A$ y un producto $\cdot : A \otimes A \to A$ que cumple la propiedad asociativa. En efecto, procedemos como en el párrafo anterior, pero ahora los isomorfismos naturales inducidos por $\mathbb{D}_1(3)$ son simplemente igualdades $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$. En particular si $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_K$ es la categoría de K-espacios vectoriales, entonces una $\mathbb{E}_1$-álgebra es lo mismo que una K-álgebra (asociativa y con unidad).

3.6. $\mathbb{E}_n$-álgebras, con $n \geq 2$. Recordemos ahora el típico argumento de Eckman–Hilton, que explica que podemos mover dos discos dentro de un disco mayor. Esto implica que $\pi_0(\mathbb{D}_n(2)) = 1$, para $n \geq 2$. Por tanto, para $n \geq 2$, una $\mathbb{E}_n$-álgebra en una categoría usual monoidal simétrica $\mathbb{C}$ es lo mismo que un monoide conmutativo en $\mathbb{C}$. Es decir, igual que antes tenemos una unidad y un producto $\cdot : A \otimes A \to A$, pero ahora este producto es conmutativo, es decir $a \cdot b = b \cdot a$. En particular, una $\mathbb{E}_n$-álgebra, con $n \geq 2$, en $\mathbf{Vect}_K$ es lo mismo que una K-álgebra conmutativa.

El caso de **Cat** es un poco distinto. Ahora obtenemos, para cada dos objetos A y B de nuestra categoría monoidal $\mathcal{C}$, dos isomorfismos $\gamma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$ y $\gamma_{B,A} : B \otimes A \to A \otimes B$. Estos isomorfismos están sujetos a ciertos axiomas, determinados por la conmutatividad de dos diagramas hexagonales, que se deducen naturalmente de las relaciones de trenzado. Así, una categoría monoidal equipada con estos isomorfismos se denomina una *categoría monoidal trenzada*. Para $n \geq 3$ tenemos además la igualdad $\gamma_{A,B} \circ \gamma_{B,A} = \mathrm{id}_{A\otimes B}$, lo que nos da una categoría monoidal simétrica.

3.7. La tabla periódica de las categorías. Representamos

$$(k, n) = (\text{ orden categórico }, \text{ índice en } \mathbb{E}_n).$$

- $(1, 1)$. Monoide (álgebra asociativa).
- $(1, n \geq 2)$. Monoide conmutativo (álgebra conmutativa).
- $(2, 1)$. Categoría monoidal.
- $(2, 2)$. Categoría monoidal trenzada.
- $(2, n \geq 3)$. Categoría monoidal simétrica.

4. Algunas consideraciones adicionales

[Aquí, seguimos a Ben-Zvi [Ben, Chapter 14]]

4.1. Espacios de configuración. Otra forma de representar la óperad $\mathbb{E}_n$ es utilizando espacios de configuración en vez de espacios de discos pequeños. Recordemos que el *espacio de configuración de k puntos en D^n* es el conjunto

$$\mathrm{Conf}_k D^n = \{k \hookrightarrow D^n\}$$

de aplicaciones inyectivas del conjunto de k-elementos en D^n; es decir, es el conjunto de posibles configuraciones de k puntos en D^n. Se puede probar que este espacio es homotópicamente equivalente a $\mathbb{D}_n(k)$.

4.2. Espacios de lazos iterados. Dado un espacio topológico con punto base (X, x), se define el correspondiente espacio de lazos iterados

$$\Omega^n X = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}((\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D^n), (X, x)).$$

Esto es, un lazo iterado es una aplicación continua $\sigma : \mathbb{R}^n \to X$ tal que $\sigma(a) = x$ para todo $a \notin D^n$. Nótese la óperad $\mathbb{D}_n$ actúa en los espacios de lazos iterados. En efecto, para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos una aplicación

$$\mathbb{D}_n(k) \times (\Omega^n X)^k \to \Omega^n X, (\underline{c}, \underline{\sigma}) \mapsto \underline{\sigma}^{\underline{c}}$$

definida como sigue

$$\underline{\sigma}^{\underline{c}}(a) = \begin{cases} \sigma_i(c_i^{-1}(a)) & \text{si } a \in c_i(D^n), \text{ para algún } i = 1, \ldots, k, \\ x & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por tanto, $\Omega^n X$ es una $\mathbb{D}_n$-álgebra en **Top**.

En particular, como, por definición $\pi_n(X, x) = \pi_0(\Omega^n X)$, el hecho de que $\Omega^n X$ sea una $\mathbb{E}_n$-álgebra prueba que $\pi_n(X, x)$ es conmutativo para $n \geq 2$.

Además, se tiene el siguiente resultado.

4.3. Teorema. *Si Y es un espacio topológico "suficientemente conexo", entonces existe una biyección entre el conjunto de isomorfismos $Y \to \Omega^n X$, para algún X, y el conjunto de estructuras de $\mathbb{E}_n$-álgebra en Y.*

4.4. Aditividad de Dunn–Lurie. Los discos se pueden introducir en discos de dimensión superior, es decir D^n y D^m se introducen en D^{n+m}. A nivel de óperads esto nos permite ver $\mathbb{E}_n$ y $\mathbb{E}_m$ como "subóperads" de $\mathbb{E}_{n+m}$. Esto permite definir un morfismo

$$\mathbb{E}_n \otimes \mathbb{E}_m \longrightarrow \mathbb{E}_{n+m}.$$

Dunn [Dun88] (y Lurie [Lur17], en el contexto ∞-categórico) demostró que esto da una equivalencia de operads. En particular, para cualquier $(\infty, 1)$-categoría monoidal simétrica $\mathcal{C}$ se tiene una equivalencia

$$\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_{n+m}}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_n}(\mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_m}(\mathcal{C})).$$

5. La ∞-categoría de discos

[Aquí, seguimos los artículos de Ayala y Francis [AF15; AF19]. Ver también las notas de Hiro Lee Tanaka [Tan20].]

5.1. Vamos a dar ahora una descripción de la óperad $\mathbb{E}_n$ y de las $\mathbb{E}_n$-álgebras, en términos de una ∞-categoría de discos. Será el modelo que emplearemos para definir la homología de factorización, tal y como lo hicieron Ayala y Francis.

5.2. Definimos la categoría topológica $\mathcal{M}_n$, cuyos objetos son n-variedades que admiten un recubrimiento finito por n-bolas cuyas intersecciones son a su vez homeomorfas a n-bolas. El espacio de morfismos es el espacio de encajes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_n}(M,N) = \mathrm{Emb}(M,N)$, equipado con la topología compacto-abierto. Además, dotamos a $\mathcal{M}_n$ de una estructura monoidal simétrica por medio de la unión disjunta $\coprod$. Dentro de $\mathcal{M}_n$, consideramos la ∞-subcategoría monoidal simétrica $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{M}_n$ cuyos objetos son uniones disjuntas (finitas) de n-bolas $\coprod_I \mathbb{R}^n$.

5.3. $\mathbb{B}\mathrm{O}(n)$**.** Todo grupo G puede verse como una categoría usual si consideramos una categoría con un solo objeto y con morfismos dados por G, a su vez, esta categoría puede verse como un ∞-grupoide $\mathbb{B}G$. La realización topológica de este ∞-grupoide es un espacio topológico BG, el *espacio clasificador* de los G-fibrados principales. Dar un morfismo $X \to BG$ equivale a dar un G-fibrado principal $E \to X$, el pullback del G-fibrado universal $EG \to BG$. En términos de ∞-grupoides, dar un morfismo $X \to \mathbb{B}G$ equivale a dar un G-fibrado principal $E \to X$, a través del diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \mathbb{B}G, \end{tikzcd}$$

donde $* = \Delta^0$ es el punto.

Estamos particularmente interesados en el n-ésimo grupo ortogonal real $G = \mathrm{O}(n) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. El ∞-grupoide $\mathbb{B}\mathrm{O}(n)$ es equivalente a la ∞-subcategoría $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{M}_n$ cuyo único objeto es el espacio $\mathbb{R}^n$. En efecto, esta equivalencia equivale a dar una equivalencia de homotopía entre el grupo topológico $\mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ de encajes de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo y el grupo de Lie $\mathrm{O}(n)$, y dicha equivalencia es bien conocida, dada por la siguiente cadena

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \arrow[r, hookleftarrow] \arrow[r, bend right, "f\mapsto f-f(0)"'] & \mathrm{Emb}_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \arrow[r, hookleftarrow] \arrow[r, bend right, "f\mapsto d_0 f"'] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \arrow[r, hookleftarrow] \arrow[r, bend right, "\mathrm{G-S}"'] & \mathrm{O}(n), \end{tikzcd}$$

donde G–S denota la aplicación natural inducida por el algoritmo de Gram–Schmidt. En particular, esto induce una equivalencia de ∞-categorías

$$\mathbf{PShv}(\mathcal{E}_n) \simeq \mathbf{Spaces}_{/\mathbb{B}\mathrm{O}(n)},$$

donde **Spaces** denota la ∞-categoría de ∞-grupoides.

5.4. El clasificador tangente. Tenemos la siguiente cadena de functores

$$\tau : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathbf{PShv}(\mathcal{M}_n) \longrightarrow \mathbf{PShv}(\mathcal{E}_n) \simeq \mathbf{Spaces}_{/\mathbb{B}\mathrm{O}(n)},$$

donde el primer functor es la inmersión de Yoneda, y el segundo está dado por restricción de $\mathcal{M}_n$ a $\mathcal{E}_n$. Componiendo, a cada n-variedad M en $\mathcal{M}_n$ le podemos asociar un morfismo $\tau_M : \tau(M) \to \mathbb{B}\mathrm{O}(n)$. Este morfismo es simplemente el morfismo $\tau_M : M \to \mathbb{B}\mathrm{O}(n)$ que clasifica el fibrado tangente $TM \to M$ (o, para ser mas exactos, su correspondiente $\mathrm{O}(n)$-fibrado principal de referencias ortogonales) [Esto es un ejercicio interesante].

5.5. Referencias móviles. Dado un espacio $B \to \mathbb{B}\mathrm{O}(n)$, una B-*referencia* en una n-variedad M es una aplicación continua $g : M \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\tau_M"'] & B \arrow[d] \\ & \mathbb{B}\mathrm{O}(n). \end{tikzcd}$$

Equivalentemente, g corresponde a una sección del producto fibrado

$$\begin{tikzcd} B \times_{\mathbb{B}\mathrm{O}(n)} M \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\tau_M"] & \mathbb{B}\mathrm{O}(n). \end{tikzcd}$$

Recordemos que una *referencia móvil* (aka *sistema de referencia*, aka *framing*) en una n-variedad M es simplemente una trivialización del fibrado tangente TM. Por tanto, en este lenguaje una referencia móvil es simplemente una $*$-referencia, donde $*$ es el punto, con su morfismo natural $* \to \mathbb{B}\mathrm{O}(n)$.

También podemos reinterpretar una *orientación* como una $\mathbb{B}\mathrm{SO}(n)$ referencia, donde $\mathbb{B}\mathrm{SO}(n) \to \mathbb{B}\mathrm{O}(n)$ es el morfismo inducido por la inclusión $\mathrm{SO}(n) \hookrightarrow \mathrm{O}(n)$. En efecto, $\mathbb{B}\mathrm{SO}(n) \to \mathbb{B}\mathrm{O}(n)$ es un espacio recubridor de dos hojas, y su pullback a M es el recubridor orientado $\tilde{M} \to M$, para el cual dar una sección suya equivale a dar una orientación de M.

Denotamos por $\mathcal{M}_n^B$ la ∞-categoría monoidal simétrica de las n-variedades topológicas con una B-referencia, que se puede obtener como el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_n^B \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Spaces}_{/B} \arrow[d] \\ \mathcal{M}_n \arrow[r, "\tau"] & \mathbf{Spaces}_{/\mathbb{B}\mathrm{O}(n)}. \end{tikzcd}$$

En particular, el espacio $\mathrm{Emb}^B(M,N)$ de encajes $M \to N$ que preservan ciertas B-referencias se obtiene como el pullback homotópico

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Emb}^B(M,N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Map}_B(M,N) \arrow[d] \\ \mathrm{Emb}(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Map}_{\mathbb{B}\mathrm{O}(n)}(M,N). \end{tikzcd}$$

Los tipos de homotopía de estos espacios $\mathrm{Emb}^B(M,N)$ son fáciles de tratar. Esto es debido a que una B-referencia $g:\mathbb{R}^n\to B$ determina una equivalencia de homotopía entre $\mathrm{Emb}^B(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ y $\Omega_g B$, el espacio de lazos definido como

$$\Omega_g B=\{\sigma:[0,1]\to B:\sigma(0)=\sigma(1)=g(0)\}.$$

En efecto, como $\mathbb{R}^n$ es contractible, tenemos

$$\mathrm{Map}_B(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\simeq \mathrm{Map}_B(g(0),g(0))=\Omega_g B$$

y, además,

$$\mathrm{Map}_{\mathbb{B}\mathrm{O}(n)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\simeq \mathrm{Map}_{\mathbb{B}\mathrm{O}(n)}(*,*)\simeq \Omega\mathbb{B}\mathrm{O}(n)\simeq \mathrm{O}(n)\simeq \mathrm{Emb}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n).$$

5.6. Recuperando $\mathbb{E}_n$ (y mucho más). Podemos considerar ahora la ∞-categoría monoidal simétrica $\mathcal{D}_n^B$ definida como la ∞-subcategoría plena de $\mathcal{M}_n^B$ cuyos objetos son uniones disjuntas de n-bolas con B-referencia. En particular, cuando $B=*$, denotamos $\mathcal{D}_n^{\mathrm{fr}}=\mathcal{D}_n^*$.

Esta ∞-categoría $\mathcal{D}_n^{\mathrm{fr}}$ contiene la misma información que la óperad $\mathbb{E}_n$. En efecto, para cada conjunto finito I, tenemos una equivalencia de homotopía

$$\mathbb{D}_n(I)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_n^{\mathrm{fr}}}(\coprod_I \mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n).$$

En particular, podemos (re)definir una $\mathbb{E}_n$-álgebra en una ∞-categoría monoidal $(\mathcal{C},\otimes)$ simplemente como un functor monoidal

$$A:\mathcal{D}_n^{\mathrm{fr}}\longrightarrow\mathcal{C}.$$

Más generalmente, definimos una *$\mathcal{D}_n^B$-álgebra en $\mathcal{C}$* como un functor monoidal

$$A:\mathcal{D}_n^B\longrightarrow\mathcal{C}.$$

Podemos también considerar la ∞-categoría de las $\mathcal{D}_n^B$-álgebras

$$\mathrm{Alg}_{\mathcal{D}_n^B}(\mathcal{C}):=\mathbf{Fun}^{\otimes}(\mathcal{D}_n^B,\mathcal{C}).$$

5.7. Homología de factorización. Es habitual en matemáticas estar interesados en functores monoidales

$$Z:\mathcal{M}_n^B\longrightarrow\mathcal{C},$$

por ejemplo, cuando uno estudia teorías topológicas de campos (TFTs). Restringiendo a $\mathcal{D}_n^B$ una Z como esta induce un “álgebra de operadores locales” $A:\mathcal{D}_n^B\to\mathcal{C}$, que es una $\mathcal{D}_n^B$-álgebra. Una pregunta natural es entonces si es posible recuperar, a partir de una $\mathcal{D}_n^B$-álgebra, un functor $Z:\mathcal{M}_n^B\to\mathcal{C}$ que cumpla una serie de buenas propiedades. Esto nos lo dará la homología de factorización.

Dada una $\mathcal{D}_n^B$-álgebra A en $\mathcal{C}$, se define su *homología de factorización* $\int A:\mathcal{M}_n^B\to\mathcal{C}$, $M\mapsto\int_M A$, como la extensión de Kan por la izquierda en el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_n^B \arrow[r, "A"] \arrow[d] & \mathcal{C} \\ \mathcal{M}_n^B. \arrow[ur, dashed, "\int A"] & \end{tikzcd}$$

En particular, dada una variedad M, su homología de factorización $\int_M A$ se obtiene como el colímite

$$\int_M A = \lim_{\coprod_I \mathbb{R}^n \hookrightarrow M} \bigotimes_{i\in I} A(\mathbb{R}^n).$$

6. Siguientes pasos

Enumeramos a continuación algunas sugerencias para continuar el seminario:

- **Colímites homotópicos y extensiones de Kan en ∞-categorías**. Como primer paso importante, conviene entender estas construcciones generales, para tratar de visualizar la definición de la homología de factorización. Conviene conjugar esto con las otras definiciones alternativas dadas por Ayala-Francis (como colímite de un diagrama en categorías discos relativas).
- **Ejemplos. Homología de Hochschild**. Habría que entender varios ejemplos. En las notas de Hiro Lee Tanaka [Tan20] vienen unos cuantos. En particular es muy importante el ejemplo de S^1, que da la homología de Hochschild. Conviene entonces entender la homología de Hochschild (para un álgebra asociativa y más generalmente para una $\mathbb{E}_1$-álgebra en $\mathbf{Chain}_K$, también conocida como una A_∞-álgebra).
- **Acción del mapping class group**. Parece ser que una propiedad importante de la homología de factorización es una acción del mapping class group. En particular, hay una acción de S^1 en la homología de Hochschild que parece ser muy bien conocida, e importante; convendría entender esto.
- **Caracterización axiomática**. El resultado principal de Ayala y Francis [AF15] es la caracterización de la homología de factorización en términos de ciertas propiedades ($\otimes$-escisión, etc).
- **Hacia las TQFTs y la hipótesis del cobordismo**. Un camino natural es ver cómo esto conecta con las TQFTs y cómo puede servir para "atacar" la hipótesis del cobordismo. Aquí, no conozco referencias, pero un sitio para empezar podría ser el último capítulo de [Tan20].
- **Conexión con variedades de caracteres de grupos cuánticos**. Esto puede ser un buen colofón al seminario, para conectar con algo más cercano a nuestros temas de investigación.
- **Conexión con Langlands geométrico, álgebras quirales, etc.**. Igual que antes, a lo mejor Luis nos puede contar algo.

Referencias

[AF15] David Ayala y John Francis. "Factorization homology of topological manifolds". En: *Journal of Topology* 8.4 (oct. de 2015), págs. 1045-1084. ISSN: 1753-8424. DOI: 10.1112/jtopol/jtv028. URL: http://dx.doi.org/10.1112/jtopol/jtv028.

[AF19] David Ayala y John Francis. *A factorization homology primer*. 2019. arXiv: 1903.10961 [math.AT]. URL: https://arxiv.org/abs/1903.10961.

[Ben] David Ben-Zvi. *Between electric-magnetic duality and the Langlands program (notes by Jackson Van Dyke)*. URL: https://web.ma.utexas.edu/users/vandyke/notes/langlands_sp21/langlands.pdf.

[Dun88] Gerald Dunn. "Tensor product of operads and iterated loop spaces". En: *J. Pure Appl. Algebra* 50.3 (1988), págs. 237-258. ISSN: 0022-4049,1873-1376. DOI: 10.1016/0022-4049(88)90103-X. URL: https://doi.org/10.1016/0022-4049(88)90103-X.

[Fre17] Benoit Fresse. *Homotopy of operads and Grothendieck-Teichmüller groups. Part 1.* Vol. 217. Mathematical Surveys and Monographs. The algebraic theory and its topological background. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017, págs. xlvi+532. ISBN: 978-1-4704-3481-6. DOI: 10.1090/surv/217.1. URL: https://doi.org/10.1090/surv/217.1.

[GJ94] Ezra Getzler y J. D. S. Jones. *Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces*. 1994. arXiv: hep-th/9403055 [hep-th]. URL: https://arxiv.org/abs/hep-th/9403055.

[Lur17] Jacob Lurie. *Higher algebra*. 2017. URL: https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf.

[Tan20] Hiro Lee Tanaka. *Lectures on Factorization Homology, ∞-Categories, and Topological Field Theories*. Springer International Publishing, 2020. ISBN: 9783030611637. DOI: 10.1007/978-3-030-61163-7. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-61163-7.

Email address: guillermo.gallego@uam.es
Web: guillegallego.xyz