Una invitación al

Programa de Langlands Geométrico

Guillermo Gallego (UCM)

Índice:

1. Teoría de Galois

- Sea K un cuerpo

$$(\text{e.g. } K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

- Una <u>extensión</u> de K es

$$K \longrightarrow F,$$

F otro cuerpo. Se denota F/K.

<u>OBS 1</u> Todo homomorfismo de cuerpos es inyectivo.

<u>Ejemplo</u> $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(i)$$

<u>OBS 2</u> F es un K-espacio vectorial.

- Una extensión F/K es <u>finita</u> si

$$\dim_K F < \infty .$$

- Dada una extensión F/K, definimos el <u>grupo de Galois</u> de F/K como

$$\mathrm{Gal}\left(F/K\right) = \mathrm{Aut}_K(F) = \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}(F) \;\middle|\; \begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\sigma"] & & F \\ & K \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] & \end{tikzcd} \right\}.$$

<u>Ejemplo</u>

Sea $\zeta_n = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{Q}(\zeta_n) \leftarrow$ <u>cuerpo ciclotómico</u>

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_n) = \varphi(n) = \# \{ a < n \mid \mathrm{mcd}(a,n) = 1 \}.$$

↑ Función de Euler

$$\left(\mathbb{Z}/n\right)^{\times} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}\right)$$

$$a \bmod n \longmapsto \left(\zeta_n \mapsto \zeta_n^{a}\right)$$

$$\left(\mathbb{Z}/n\right)^{\times} = \left\{ a \bmod n \in \mathbb{Z}/n \mid \mathrm{mcd}(a,n) = 1 \right\}$$

$$\mathrm{ord}\left(\left(\mathbb{Z}/n\right)^{\times}\right) = \varphi(n).$$

- El <u>cierre algebraico</u> de un cuerpo K es la menor extensión $\overline{K}/K$ tal que $\forall\, p \in K[T]$, p tiene raíces en $\overline{K}$.

<u>Ejemplo</u> $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$

Teorema fundamental del Álgebra

2. Teoría de cuerpos de clases

- Un cuerpo de números es una extensión finita de $\mathbb{Q}$.
- Problema

  Estudiar $Gal(\bar{K}/K)$, para K un cuerpo de números.

  MUY DIFÍCIL

- Problema más tratable

  Estudiar $Gal(\bar{K}/K)^{\boxed{ab}}$ abelianizado

OBS

$$Gal(\bar{K}/K)^{ab} = Gal(K^{ab}/K),$$

para $K^{ab} = \left[\begin{array}{l}\text{la mayor } K'/K \text{ t.q. } Gal(K'/K) \\ \text{es abeliana}\end{array}\right]$.

→ El estudio de $Gal(K^{ab}/K)$ es la

<u>teoría de cuerpos de clases</u> (Class Field Theory) ←

Ejemplo

$$K = \mathbb{Q}$$

<u>Teorema</u> (Kronecker-Weber)

$$\mathbb{Q}^{ab} = \mathbb{Q}\left(\begin{array}{l}\text{todas las raíces} \\ \text{de la unidad}\end{array}\right).$$

Es decir, $\mathbb{Q}^{ab} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}(\zeta_n)$,

identificando:

$$\mathbb{Q}(\zeta_m) \hookrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_n) \quad \text{si } m \mid n.$$

Por tanto:

$$\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q}\right) = \varprojlim \left(\mathbb{Z}/n\right)^{\times} = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_n \in \left(\mathbb{Z}/n\right)^{\times} \\ p_{nm}(x_n) = x_m \end{array} \right\},$$

donde $\quad p_{nm} : \left(\mathbb{Z}/n\right)^{\times} \twoheadrightarrow \left(\mathbb{Z}/m\right)^{\times}$ si $m \mid n$.

- <u>Números p-ádicos</u>

  - p número primo.
  - Un <u>número p-ádico</u> es una serie formal de la forma

$$a_K p^K + a_{K+1} p^{K+1} + \dots,$$

para $K \in \mathbb{Z}$ y con los $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

  - $\mathbb{Q}_p = \{\text{números p-ádicos}\} \leftarrow$ <u>es un cuerpo</u>
  - $\mathbb{Z}_p = \{\text{números p-ádicos con } K \geq 0\}$

$\uparrow$ <u>enteros p-ádicos</u>

$$\mathbb{Q}_p = q.f.(\mathbb{Z}_p)$$

- $\mathbb{Q}_p$ es una <u>completación</u> de $\mathbb{Q}$ con la norma

$$\left| p^K \frac{a}{b} \right|_p = p^{-K}.$$

- Además:

<u>Teorema</u> (Ostrowski)

$$\{\text{Valores absolutos en } \mathbb{Q}\}/_{\text{iso.}} = \{|\ |_\infty\} \cup \{|\ |_p \mid p \text{ primo}\}.$$

(el de toda la vida)

Por tanto, $\{\text{Completaciones de } \mathbb{Q}\} = \{\mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{Q}_p \mid p \text{ primo}\}$.

- Sea ahora $n \in \mathbb{N}$,

$$n = \prod_p p^{m_p}.$$

Entonces,

$$\mathbb{Z}/_n = \prod_p \mathbb{Z}/_{p^{m_p}}.$$

- Llamamos <u>enteros de Prüfer</u> al límite

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n .$$

Tenemos entonces

$$\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p \text{ primo}} \underbrace{\left(\varprojlim \mathbb{Z}/p^n \right)}_{\mathbb{Z}_p} = \prod_p \mathbb{Z}_p .$$

Por <u>Kronecker-Weber</u>:

$$\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q}\right) = \hat{\mathbb{Z}}^\times = \prod_p \mathbb{Z}_p^\times .$$

- En general, la CFT describe $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$

mediante

$$K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times .$$

Aquí, $\mathbb{A}_K$ son los <u>adèles</u> de K.

- Sea K un cuerpo de números y

$$\mathcal{O}_K = \{ x \in K \mid \exists\ p \in K[T] \text{ mónico t.q. } p(x) = 0 \}$$

su <u>anillo de enteros</u>, definimos los

<u>adèles</u> de K como

$$\mathbb{A}_K = \left\{ (x_v)_{v \in \{\text{valores abs. de } K\}/\text{iso}} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_v \in K_v, \\ x_v \in \mathcal{O}_v \\ \text{para toda } v \\ \text{salvo una cant.} \\ \text{finita} \end{array} \right\}.$$

Aquí:

$$K_v = \text{completación de } (K, v)$$

$$\mathcal{O}_v = \text{anillo de enteros de } K_v.$$

<u>Ejemplo</u>

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \left\{ \left((x_p)_{p \text{ primo}}, x_\infty \right) \;\middle|\; \begin{array}{cc} x_p \in \mathbb{Q}_p, & x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para} \\ x_\infty \in \mathbb{R}, & \text{casi todo } p \end{array} \right\}.$$

$$K \hookrightarrow \mathbb{A}_K \qquad \rightsquigarrow \qquad K^\times \hookrightarrow \mathbb{A}_K^\times .$$
$$x \longmapsto (x_v)_v$$

Por tanto, $K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times$ es un grupo abeliano bien def.

<u>Teorema</u> (Teoría de cuerpos de clases)

$$\mathrm{Gal}\left(K^{ab}/K\right) = \text{componentes conexas de } K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times .$$

3. <u>La teoría no abeliana</u>

- Sea A un anillo.

$$GL_n(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{matrices } n \times n \\ \text{con coef. en } A \\ \underline{\text{invertibles}} \end{array} \right\} .$$

- En particular, $GL_1(A) = A^\times$.

- Una <u>representación n-dimensional</u> de un grupo G es

$$\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}).$$

<u>Idea 1</u> Las representaciones de un grupo te dicen mucho sobre él.

<u>Idea 2</u> Como $\mathbb{C}^\times$ es abeliano

$$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{Hom}(G^{ab}, \mathbb{C}^\times).$$

Es decir

$$\text{Rep. 1-dim de } G = \text{Rep. 1-dim de } G^{ab}.$$

<u>Idea 3</u>

$$\begin{matrix} \text{Rep. 1-dim de} & \xleftrightarrow{\text{CFT}} & \text{Rep. 1-dim de} \\ \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) & & K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times \end{matrix}.$$

Idea 4

$$\mathrm{Hom}\left({}_{K^\times}\backslash^{\mathbb{A}_K^\times}, \mathbb{C}^\times\right) = \mathrm{Hom}(\mathbb{A}_K, \mathbb{C}^\times) \cap \left\{{}_{K^\times}\backslash^{\mathbb{A}_K^\times} \longrightarrow \mathbb{C}\right\}.$$

- En general, definimos las representaciones automórficas de $GL_n(\mathbb{A}_K)$ como

$$\mathrm{Hom}\left(GL_n(\mathbb{A}_K), \mathbb{C}^\times\right) \cap \left\{{}_{GL_n(K)}\backslash^{GL_n(\mathbb{A}_K)} \longrightarrow \mathbb{C}\right\}.$$

- Correspondencia de Langlands:

Representaciones n-dimensionales de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$	$\longleftrightarrow$	Representaciones automórficas de $GL_n(\mathbb{A}_F)$.

- En particular, nos interesa la corresp. "sin ramificar", donde nos restringimos a rep. de $GL_n(\mathbb{A}_F)$ en

$$\left\{{}_{GL_n(K)}\backslash^{GL_n(\mathbb{A}_F)}/_{GL_n(\mathcal{O})} \longrightarrow \mathbb{C}\right\}, \text{ para } \mathcal{O} = \prod_v \mathcal{O}_v.$$

4. Cuerpos de funciones

- Cuerpos finitos

– El anillo $\mathbb{Z}/n$ es un cuerpo $\Longleftrightarrow$ $n = p$ es primo.

En tal caso, denotamos $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$.

– ¿Existen más cuerpos finitos?

Sí, las extensiones finitas de los $\mathbb{F}_p$,

$$\mathbb{F}_q \ , \text{ para } \ q = p^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Sea $k = \mathbb{F}_q$ un cuerpo finito.

- Sea X una $\underbrace{\text{curva proyectiva lisa}}$ $/ k$.

↳ Ceros de polinomios homogéneos en algún $\mathbb{P}^n_k$, sin singularidades y de dim. 1.

- Si $U \overset{ab.}{\subset} X \subset \mathbb{P}^n_k$, una función $f : U \longrightarrow k$ es <u>regular</u>

  si $f = g/h$, para $g, h \in k[X_0, \ldots, X_n]$ pol. homogéneos.

- Definimos el <u>cuerpo de las funciones racionales de X</u>

  como

$$K(X) = \left\{ (U, f) \;\middle|\; \begin{array}{l} U \overset{ab.}{\subset} X \\ f : U \to k \text{ regular} \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

$$(U, f) \sim (V, g) \iff f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}.$$

- Los cuerpos K de la forma $K = K(X)$ para alguna curva X, se llaman <u>cuerpos de funciones</u>.

<u>Ejemplo</u>

$$X = \mathbb{P}^1_k$$

$$K(X) = k(T) = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in k[T] \\ \text{mcd}(p, q) = 1 \end{array} \right\}.$$

- Para los cuerpos de funciones, existe una corresp. de Langlands, que se expresa igual:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Representaciones}\\ n\text{-dimensionales}\\ \text{de } Gal(\bar{K}/K)\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Representaciones}\\ \text{automórficas}\\ \text{de } GL_n(\mathbb{A}_F).\end{array}\right\}$$

Pero..., ¿qué son los adèles?

- <u>Adèles de un cuerpo de funciones</u>

- En principio, podemos dar la misma definición:

$$\mathbb{A}_K = \left\{ (x_v)_{v \in \{\text{valores abs. de } K\}/\text{iso}} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_v \in K_v, \\ x_v \in \mathcal{O}_v \\ \text{para toda } v \\ \text{salvo una cant.} \\ \text{finita} \end{array} \right\}.$$

- ¿Cuáles son los valores absolutos?

Functor de puntos

- Supongamos que X esta dada por los ceros de un polinomio $f(x,y)$ con coef. enteros.

  (Ej. $X =$ ceros de x^2+y^2-1).

- Podemos considerar el "conjunto de ceros" de f en cualquier anillo A

$$X(A) = \{(x,y) \in A^2 \mid f(x,y) = 0\}.$$

A-puntos de X

- Además, $\varphi : A \longrightarrow B$ induce

$$\begin{aligned} X(A) &\longrightarrow X(B) \\ (x,y) &\longmapsto (f(x), f(y)). \end{aligned}$$

- Podemos entender X como un functor

$$\begin{aligned} X : \text{Anillos} &\longrightarrow \text{Conjuntos} \\ A &\longmapsto X(A). \end{aligned}$$

- En el caso del ejemplo, $X(\mathbb{Z}) = \emptyset$

$$X(\mathbb{Q}) = \{\text{Ternas pitagóricas}\}/\mathbb{Z}$$

$$X(\mathbb{R}) = S^1.$$

- Si $\Bbbk$ es un cuerpo y X es una variedad algebraica sobre $\Bbbk$, podemos considerar $X(\Bbbk')$ para cualquier extensión de cuerpos $\Bbbk'/\Bbbk$.

En particular, $X(\overline{\Bbbk}) \neq \emptyset$.

Ej: $X = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = -1\}$

$$X(\mathbb{R}) = \emptyset \qquad X(\mathbb{C}) \neq \emptyset$$

Teorema Si $K = K(X)$ es un cuerpo de funciones, X var. $/\Bbbk$,

$$\{\text{Valores absolutos de } K\} \longleftrightarrow \{\overline{\Bbbk}\text{-puntos de } X\}$$

$$\Bbbk((t_x)) \longleftarrow\!\!\!\shortmid \quad x \ \Bbbk'\text{-punto } (\Bbbk'/\Bbbk)$$

(t_x "coordenada local en x").

Aquí: $\mathcal{O}_x = \Bbbk[[t_x]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k t_x^k \;\middle|\; a_k \in \Bbbk \right\}$ ← Series de potencias formales

$K_x = \Bbbk((t_x)) = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k t_x^k \;\middle|\; a_k \in \Bbbk \right\}$ ← Series de Laurent formales

Por tanto:

$$\mathbb{A}_K = \left\{ (x_v)_{v \in \{\text{valores abs. de } K\}/\text{iso}} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_v \in K_v, \\ x_v \in \mathcal{O}_v \\ \text{para toda } v \\ \text{salvo una cant.} \\ \text{finita} \end{array} \right\}$$

$$\cong \left\{ (f_x)_{x \in X} \;\middle|\; \begin{array}{c} f_x \in K_x \\ f_x \in \mathcal{O}_x \\ \text{para casi} \\ \text{toda } x \end{array} \right\}.$$

5. Superficies de Riemann

- Las curvas proyectivas lisas sobre $\mathbb{C}$ estan en correspondencia con las superficies de Riemann (compactas).

- Una superficie de Riemann (compacta) es una terna

$$X = \left(S,\ \mathcal{U},\ \{\varphi_U\}_{U \in \mathcal{U}}\right), \quad \text{con,}$$

S — espacio topológico compacto y T_2

$\mathcal{U}$ — rec. por abiertos de S

$\varphi_U : U \longrightarrow \overset{\text{dominio}}{D_U} \subset \mathbb{C}^n$ un homeomorfismo,

tal que, $\forall\ U, V \in \mathcal{U}$, la función

$$\psi_{UV} : \underset{\substack{\cap \\ D_U}}{\varphi_U(U \cap V)} \xrightarrow{\varphi_U^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\varphi_V} \underset{\substack{\cap \\ D_V}}{\varphi_V(U \cap V)}$$

es <u>holomorfa</u>.

- <u>Representaciones de Galois y sistemas locales</u>

- Si $K(X)$ es un cuerpo de funciones, para X curva proyectiva sobre $\mathbb{K}$, e $Y \longrightarrow X$ es un espacio recubridor, resulta que $K(Y)/K(X)$ es una extensión y

$$\mathrm{Gal}\left(K(Y)/K(X)\right) \cong \mathrm{Deck}\left(Y/X\right) = \left\{ f \in \mathrm{Aut}(Y) \;\middle|\; \begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \right\}.$$

- Esto permite pensar en $\mathrm{Gal}\left(\overline{K(X)}/K(X)\right)$ como un "grupo fundamental" de X.

- Tenemos entonces la siguiente analogía:

X curva proyectiva sobre un cuerpo finito $k = \mathbb{F}_q$ $\longleftrightarrow$ X superficie de Riemann

$$\mathrm{Gal}\left(\overline{K(X)}/K(X)\right) \longleftrightarrow \pi_1(X)$$

Representaciones de Galois $\longleftrightarrow$ Representaciones del grupo fundamental

- Las representaciones del grupo fundamental se corresponden con los <u>sistemas locales</u>.

- Un <u>sistema local</u> $\mathcal{F}$ en X está dado por:

  - Un recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X

  - Para cada $U \in \mathcal{U}$, un $\mathbb{C}$-espacio vectorial

- Para cada $U, V \in \mathcal{U}$, un isomorfismo

$$g_{UV} : \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(V).$$

- <u>Adèles y fibrados</u>

- Recordemos que, para X una curva sobre $\mathbb{F}_q$,

$$\mathbb{A}_{K(X)} = \left\{ (f_x)_{x \in X} \;\middle|\; \begin{array}{l} f_x \in K_x \\ f_x \in \mathcal{O}_x \\ \text{para casi} \\ \text{toda } x \end{array} \right\}.$$

- En una sup. de Riemann, todos los anillos locales son isomorfos: si $x \in X$

$$\mathcal{O}_x \cong \mathbb{C}[[t]] =: \mathcal{O}$$

$$K_x \cong \mathbb{C}((t)) =: K.$$

Podemos considerar:

$$\mathbb{A}_X = \left\{ (f_x)_{x \in X} \;\middle|\; f_x \in \mathbb{C}((t)),\ f_x \in \mathbb{C}[[t]] \ \text{para casi toda } x \right\}.$$

- Un <u>fibrado holomorfo de rango n</u> sobre X es un espacio topológico $E \xrightarrow{p} X$ tal que:

- $\forall x \in X \;\; \exists U^x$ y $\varphi_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{C}^n$ t.q.

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U. &
\end{tikzcd}$$

- Las aplicaciones $g_{UV} : U \cap V \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$(U\cap V) \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi_U^{-1}} p^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_V} (U \cap V) \times \mathbb{C}^n$$

$$(x, v) \longmapsto (x, g_{UV}(x) \cdot v)$$

son <u>holomorfas</u>.

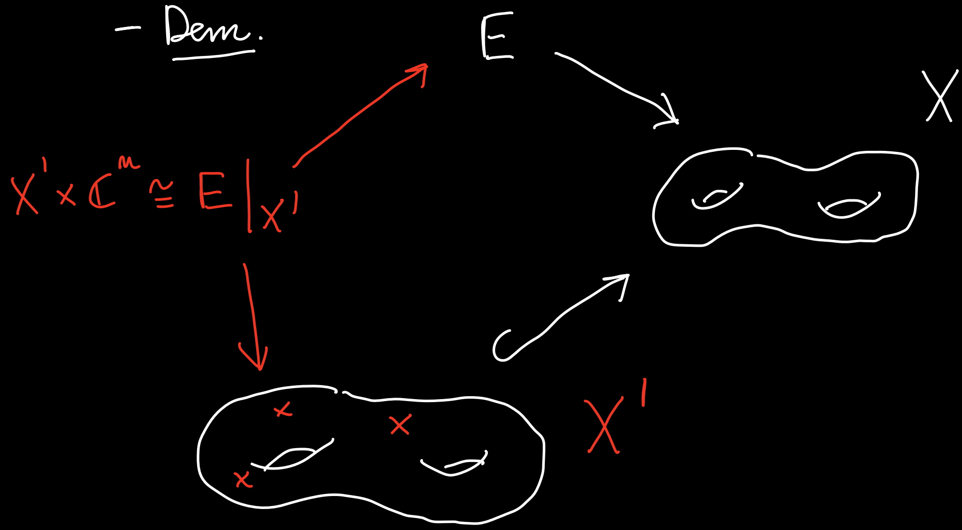
- Sea

$$\mathrm{Bun}_n(X) = \left\{ \begin{matrix} \text{Fibrados} \\ \text{holomorfos} \end{matrix} / X \right\} \Big/ \text{iso}.$$

<u>Teorema</u> (Weil)

$$\mathrm{Bun}_n(X) \cong GL_n(K) \backslash GL_n(\mathbb{A}_X) / GL_n(\mathcal{O}).$$

- Dem.



En $X' \rightsquigarrow E|_{X'} \xrightarrow{\varphi} X' \times \mathbb{C}^n$.

En torno a cada "agujero" $x \in X$ tomo un disco $D_x \subset X$.

$$E|_{D_x} \xrightarrow[\cong]{\varphi_x} D_x \times \mathbb{C}^n.$$

E está determinado por las funciones holomorfas

$$g_{X'D_x} : \underbrace{X' \cap D_x}_{D_x^*} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Pasando al límite, obtenemos $g \in \mathbb{C}((t))$.

La elección de φ y de φ_x da una acción de $GL_n(K)$ por la izquierda y de $GL_n(\mathcal{O})$ por la derecha.

Finalmente obtenemos

$$[g] \in GL_n(K) \backslash GL_n(\mathbb{A}_K) / GL_n(\mathcal{O}).$$

#

- Langlands geométrico

- Finalmente, en la analogía geometrica, las funciones en $GL_n(K) \backslash GL_n(\mathbb{A}_K) / GL_n(\mathcal{O})$ han de sustituirse por $\mathcal{D}$-módulos en $Bun_n(X)$.

- La correspondencia de Langlands geométrica relaciona objetos de la forma

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Sistemas locales}\\ \text{de rango } n \text{ en } X\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\mathcal{D}\text{-módulos}\\ \text{en } \mathrm{Bun}_n(X)\end{array}\right\}.$$

- Referencia
  - Edward Frenkel, Lectures on the Langlands program and conformal field theory. (arXiv: hep-th/0512172v1).